Cap 3. Cantidades Vectoriales

Los vectores son herramientas matemáticas que permiten definir y estudiar muchos fenómenos físicos tales como la velocidad, el desplazamiento, la aceleración, la fuerza, la cantidad de movimiento, el campo eléctrico, la inducción magnética; los cuales involucran, algunas características como la magnitud y dirección, elementos que deben ser considerados conjuntamente para comprender mejor los modelos matemáticos explicativos que los estructuran. La presente sección busca conceptualizar algunos elementos de vectores en $\mathbf{R}^2$, es decir aquellos vectores que se pueden representar en un plano ortogonal, y en $\mathbf{R}^3$, que son los vectores dados en tres dimensiones; definiendo para cada uno las operaciones básicas de suma, resta y multiplicación en adición a algunos tipo de representaciones matemática-geométrica que suelen tener; sin embargo antes de iniciar este estudio es necesario establecer claramente las diferencias entre las cantidades vectoriales y las cantidades escalares.

Cantidades Escalares

Las cantidades escalares son aquellas cantidades que quedan totalmente especificadas si de ellas se conoce su orden de magnitud, es decir su valor o su longitud con su correspondiente unidad de medida; como ejemplos pueden nombrarse dentro de las magnitudes escalares la masa de un cuerpo, la temperatura absoluta, el color, el volumen entre otras. Conociendo el valor de la masa de un cuerpo se está especificando completamente esta característica, la masa es independiente de la forma del cuerpo y de su posición, del sitio donde se pueda encontrar el cuerpo, del color del mismo y de cualquier otro parámetro; al decir por ejemplo que un cuerpo tiene 40 kg se conoce totalmente la masa del mismo, a esta masa se le puede añadir otra masa y sin ningún otro procedimiento especial, se suman para encontrar una masa resultante. Algo semejante sucede con el volumen, la longitud y la temperatura. Por otro lado existe un segundo tipo de cantidades, a las cuales hay que definir procedimientos diferentes para las operaciones matemáticas, estas son las cantidades vectoriales o simplemente vectores.

Al unir o mezclar dos cuerpos de diferentes masas, volúmenes y temperaturas es posible establecer que la masa resultante es igual a la suma de cada una de las masas, sin embargo esto no es necesariamente cierto con el volumen y la temperatura. Al mezclar dos gases, el volumen resultante no es obligatoriamente igual a la suma de los volúmenes de cada muestra, depende de otros factores como la presión y la temperatura.

Así mismo sucede con la temperatura, cuando se mezclan por ejemplo dos líquidos de diferentes temperaturas, la temperatura final nunca es igual a la suma algebraica de las temperatura de cada muestra, de hecho es un promedio ponderado a la cantidad de masa y al calor específico de las sustancias.

Por lo anterior es necesario poner atención al momento de realizar ciertas operaciones matemáticas con cantidades escalares, ya que estas pueden verse afectadas, atendiendo a la naturaleza del parámetro mismo.

3.1. Vectores

Los vectores son aquellas cantidades que además de poseer un orden de magnitud como en las cantidades escalares, se necesita también definir otros parámetros como la dirección, el sentido y el punto de aplicación; un ejemplo clásico de cantidades que se modelan matemáticamente como vectores son las fuerzas. Al actuar dos fuerzas sobre un mismo cuerpo y querer obtener una fuerza equivalente, no se puede simplemente sumar o restar las magnitudes de estas fuerzas, es necesario tener en cuenta hacia donde apuntan las fuerzas y en dónde actúan, no es lo mismo aplicar una fuerza sobre la chapa de una puerta, que sobre las bisagras, el efecto que se obtiene es diferente; considere ahora que se necesita levantar un cuerpo que está sumergido en agua, al aplicar la fuerza hacia arriba se obtienen algunos resultados, al aplicar la misma fuerza pero hacia abajo, se obtienen otros resultados, por tanto es importante el sentido y dirección que esa fuerza tiene ya que con causas diferentes se obtienen efectos diferentes.

Se puede definir un vector como una asociación ordenada de números reales[1] que en términos geométricos y para los objetivos de este curso, existe en el espacio euclidiano; este orden ya preestablecido es importante e históricamente se ha usado (x,y,z) como convención.

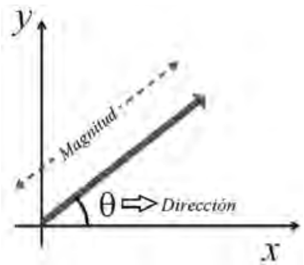


***Figura 3.1**. Forma gráfica de representar un vector. Fuente Propia*

La figura anterior muestra un vector representado en forma geométrica como una flecha orientada sobre el plano; para diferenciarlo de otras cantidades la representación simbólica es con letras mayúsculas en negrilla o con una pequeña flecha colocada en la parte superior.

[1] Inclusive es posible definir vectores cuyo conjunto ordenado sean números imaginarios y hasta complejos.

Vector → $\boldsymbol{A} = \vec{A}$

Las cantidades vectoriales quedan completamente definidas con un orden de magnitud (tamaño, longitud o norma), una dirección, un sentido y un punto de aplicación. A continuación se hace una breve descripción de lo que es cada concepto.

Magnitud→$|\vec{A}|$: Es la longitud o dimensión del vector, también conocida como Norma corresponde el tamaño del vector

Dirección→$\boldsymbol{\theta}$: Es el ángulo o conjunto de ellos, que forma el vector con respecto a algún eje de referencia.

Sentido: Indica la posición y ubicación en el espacio bidimensional o tridimensional, estableciendo si el vector sube, baja, tiende hacia un lado o a otro.

Punto de aplicación: Es el lugar geométrico desde donde actúa el vector.

Existen diversas formas para representar un vector, tanto gráficas como analíticas, en la forma gráfica se usa la flecha orientada y para las formas analíticas se presta especial atención a las formas cartesianas, polares y unitarias que son las que se emplea con mayor frecuencia en física. En la representación cartesiana el punto origen del vector se le hace coincidir con el origen coordenado[2], de esta manera el punto terminal del vector $\vec{A}$ identificado como el punto (a_x, a_y) define un mecanismo que permite representar cualquier vector euclidiano; de la misma manera un vector **B** en el espacio tridimensional queda explicitado en notación cartesiana como

$$\vec{B} = (b_x, b_y, b_z)$$

Donde b_i es la proyección del vector en el eje i-ésimo. La siguiente figura ilustra la representación del vector **A**y un vector **B**.

[2] El origen de un vector se puede colocar en cualquier punto del plano cartesiano y sus propiedades como la magnitud, la dirección y el sentido se mantiene, sin embargo, se acostumbra escoger el origen pues simplifica cálculos.

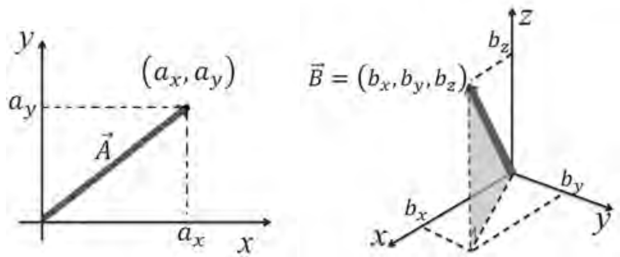


Figura 3.2. Representación Cartesiana de un Vector en el plano yen el espacio. Fuente Propia

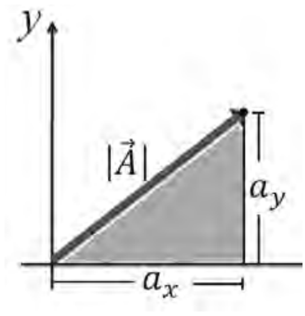


Figura 3.3. Magnitud y Dirección de un Vector. Fuente Propia.

En el plano cartesiano, al ubicar el punto origen de un vector en el origen del plano cartesiano se puede notar que se forma un triángulo rectángulo para el cual la hipotenusa hace las veces de la magnitud, y el ángulo se mide entre la hipotenusa y el cateto adyacente y aunque la posición del ángulo no tiene que ser con respecto al eje x, pudiéndose referenciar con respecto a otro eje, sí es importante especificar muy claramente esa referencia cuando se cambia.

$$|\vec{\boldsymbol{A}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \text{[Ec. 3.1]}$$

Y para vectores en el espacio tridimensional se tiene:

$$|\vec{\boldsymbol{B}}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \qquad \text{[Ec. 3.2]}$$

Y por definiciones trigonométricas, la dirección del vector es:

$$\theta = arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right) \qquad \text{[Ec. 3.3]}$$

Medida desde el semieje x positivo.Estas últimas expresiones llevan a un segundo sistema para representar vectores analíticamente, y es la forma **polar,** cuya estructura es equivalente a la forma mostrada a continuación.

$$\vec{A} = |\vec{A}|\angle\theta$$

Donde $|\vec{A}|$ es la magnitud del vector y θ la dirección del vector medida desde el semieje x positivo.

Por otro lado cuando de un vector se tiene la magnitud y la dirección en forma polar, se pueden obtener las componentes cartesianas del mismo; aplicando principios básicos de la trigonometría se puede concluir que:

$$cos\theta = \frac{a_x}{|\vec{A}|} \qquad sen\theta = \frac{a_y}{|\vec{A}|} \qquad \text{[Ec. 3.4]}$$

Con lo que se llega a

$$a_x = |\vec{A}|cos\theta \quad \text{y} \quad a_y = |\vec{A}|sen\theta \qquad \text{[Ec. 3.5]}$$

Con lo que se tiene el mecanismo para convertir un vector expresado en un sistema cartesiano a sistema polar y viceversa.

3.2. Vectores Unitarios

Una tercera forma de representar los vectores utilizando las facilidades que brinda el plano cartesiano, son los vectores unitarios. Un vector unitario es un vector paralelo a cada eje cartesiano, cuya magnitud es uno (1); cada componente de cualquier otro vector se puede escribir como n veces la magnitud del vector unitario.

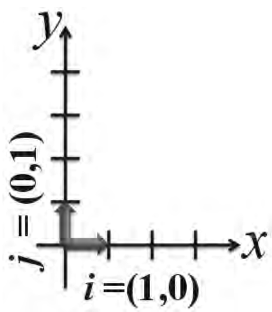


***Figura 3.4**. Vectores Unitarios. Fuente Propia*

Si se consideran vectores en el plano, hay dos vectores unitarios: el vector $\hat{\imath} = (1{,}0)$ es un vector de magnitud 1 y paralelo al eje de las abscisas; el otro vector unitario es $\hat{\jmath} = (0{,}1)$ que es un vector de magnitud 1 y paralelo al eje de las ordenadas como se muestra en la figura; como ejemplo, si se tiene el vector $\vec{A} = (2{,}3)$ este se puede representar en términos de los vectores unitarios como $\vec{A} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$; de igual manera si $\vec{B} = (-2{,}4)$ su representación en términos de los vectores unitarios corresponde a $\vec{B} = -2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$. Una de las ventajas de usar la representación de vectores con vectores unitarios, estriba en el hecho que se puede cambiar el orden sin que esto implique un cambio en vector mismo.

Para el caso de vectores tridimensionales, el tratamiento es muy similar anexando un tercer eje –eje z– y paralelo a este un vector unitario k, con lo que las coordenadas de los tres vectores unitarios paralelos a los ejes coordenados es:

$$\boldsymbol{i} = (1{,}0{,}0) \qquad \boldsymbol{j} = (0{,}1{,}0) \qquad \boldsymbol{k} = (0{,}0{,}1) \qquad \text{[Ec. 3.6]}$$

Por tanto, un vector $\vec{A} = (a_x, a_y.a_z)$ expresado en coordenadas cartesianas, tiene en términos de vectores unitarios la forma:

$$\vec{A} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

La figura 3.5., muestra la representación geométrica de los vectores unitarios en R^3

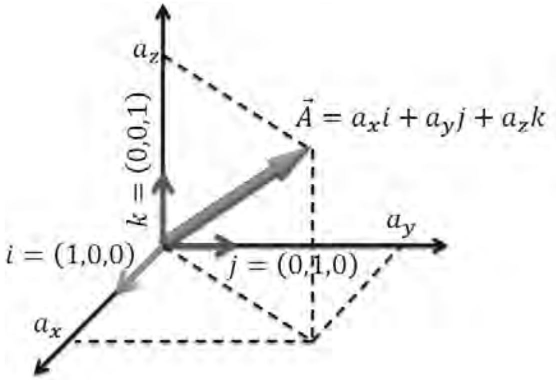


Figura 3.5. *Representación tridimensional de vectores en el espacio, en términos de los vectores unitarios. Fuente Propia.*

Aunque los vectores son cantidades n–dimensionales, es decir están definidos para 2, 3 o más dimensiones, en esta parte de la física solo interesan los vectores en el plano o en el espacio. Por otro lado, a los vectores como cantidades matemáticas, se les puede asociar algunos comportamientos, propiedades y operaciones especiales; a continuación se fundamentan algunos de estos conceptos necesarios para comprender desde el análisis matemático los fenómenos naturales.

3.3. Operaciones Básicas con Vectores

Los vectores son cantidades con los cuales se pueden realizar operaciones como suma, resta, la multiplicación de un vector por un escalar, el producto punto entre dos vectores y el producto cruz entre dos vectores entre otras. A continuación se fundamentan de manera sencilla estas operaciones y queda a criterio del lector, profundizar en las mismas.

Suma y Resta de dos o más vectores

Cuando se tienen los vectores en representación cartesiana o en términos de los vectores unitarios, sumarlos o restarlos es una operación matemática simple, que equivale a sumar o restar término a término los que sean semejantes, es decir se operan las componentes correspondientes. Para ejemplificar esto considérense los vectores tridimensionales A, B y C:

$$\vec{A} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$
$$\vec{B} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$
$$\vec{C} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k}$$

A los cuales la operación suma se define como:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (a_x + b_x + c_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y + c_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z + c_z)\boldsymbol{k}$$

Dos de las propiedades importantes que cumple la suma de vectores, es que es conmutativa y asociativa, es decir el orden en que se suman los vectores NO modifica el resultado y la forma como se agrupen para sumarlos, tampoco altera el resultado.

Propiedad Conmutativa en Vectores

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{B} + \vec{A} + \vec{C} = \vec{A} + \vec{C} + \vec{B}$$

Propiedad Asociativa en Vectores

$$\left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C} = \vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right)$$

La resta por otro lado, es una operación binaria tanto en cantidades escalares como en cantidades vectoriales, está definida inicialmente para pares de elementos a la vez, lo que significa que solamente se pueden restar de forma directa dos vectores; en caso de haber una segunda resta, esta debe realizarse con el resultado de la primera resta. En el caso de los vectores y de la misma forma que la suma, la resta se hace componente con componente; así dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ anteriormente definidos, se llega para la diferencia de vectores a la expresión:

$$\vec{A} - \vec{B} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k} \qquad \text{[Ec. 3.7]}$$

Al igual que en los reales, la resta de vectores NO cumple con la propiedad conmutativa por lo que se debe prestar especial atención al momento de realizar este cálculo, verificando cuál es el vector que resta y cuál es el vector restado.

También es posible realizar gráficamente la suma de dos o más vectores a través de una estrategia denominada **Método del Paralelogramo**; consiste en ubicar un vector a continuación del otro, hasta ubicarlos todos, posteriormente la suma es el vector que resulta de unir la cola del primer vector con la cabeza del último vector ubicado.

Considérese el caso mostrado en la figura 3.6., bajo el siguiente contexto; una persona realiza dos desplazamientos en línea recta, partiendo del punto *a* y llegando al punto *c* representándose estos desplazamientos como vectores; el efecto final –llegar al punto c– hubiese sido exactamente el mismo si la persona, partiendo del mismo punto *a*, hace un desplazamiento directo al punto c, a través de un vector C que se denominará **vector suma** o **vector resultante**.

Una de las propiedades geométricas interesantes de esta operación, es que el orden en que se suman los vectores NO cambia el resultado, es decir el vector resultante que en este caso es el vector suma, sigue siendo el mismo en magnitud y dirección, lo se puede apreciar fácilmente en la figura 3.6.

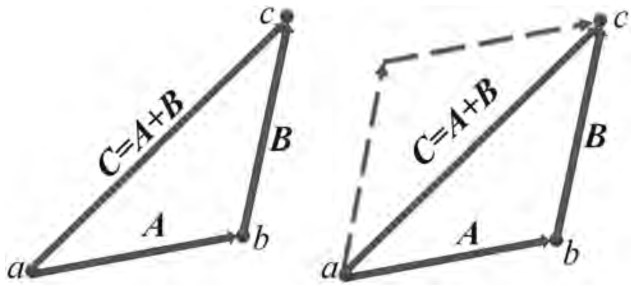


Figura 3.6. *Propiedad conmutativa para la suma de vectores. Fuente Propia*

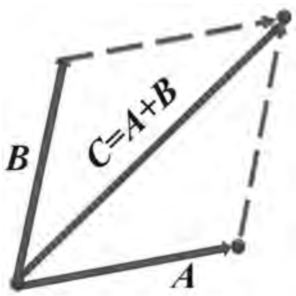


Figura 3.7. *Método del paralelogramo para la suma de vectores. Fuente Propia*

Combinando las dos gráficas de la figura 3.6., se tiene el Método del Paralelogramo para la suma gráfica de vectores según se muestra en la figura 3.7., lo que en forma resumida plantea que para el Método del Paralelogramo se traslada de forma paralela cualquiera de los dos vectores hasta llegar la cabeza del otro –si se quiere se puede hacer simultáneamente con los dos vectores pero el resultado sigue siendo el mismo–, posteriormente se traza el vector suma o vector resultante entre el punto inicial y el punto final donde terminan por encontrarse los vectores. Para ejemplificar esto mejor considérese la siguiente situación en R^2.

Ejemplo 3.1: Sumar gráficamente

$$\vec{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \text{con } \vec{B} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} \text{ con } \vec{C} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

Solución: Como se plantea, el método consiste en unir la cabeza de un vector con la cola del otro, esta operación se ilustra en la figura 3.8.

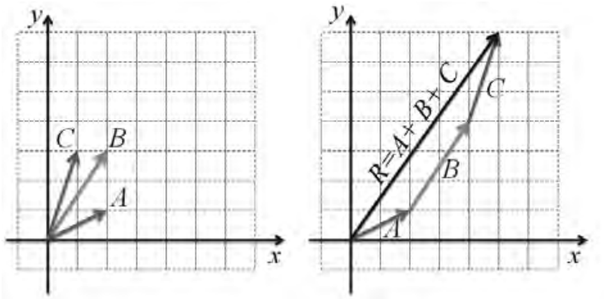


***Figura 3.8**. Suma gráfica de tres vectores. Fuente Propia.*

Lo que se puede fácilmente corroborar de forma analítica

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) + (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) + (\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) = 5\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}$$

$$\vec{R} = 5\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}$$

Que corresponde con el resultado obtenido por forma gráfica.

En el caso de tener la forma polar de cantidades vectoriales y se precise sumar o restar analíticamente, lo más aconsejable es transformar los vectores a la forma cartesiana o en términos de los vectores unitarios.

Para la restar de vectores de forma gráfica, el vector que resta –el vector negativo– gira 180º y se procede a sumar el primer vector con el vector girado, lo que de forma analítica corresponde a:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right) \qquad \text{[Ec. 3.8]}$$

Considérese la situación mostrada en la figura 3.9, en la representación se tiene el vector **B** al cual por la naturaleza misma de la operación se cambia de sentido –situación 2–, posteriormente se suman los dos vectores, el vector **A** con el vector **–B** para obtener el vector resultante.

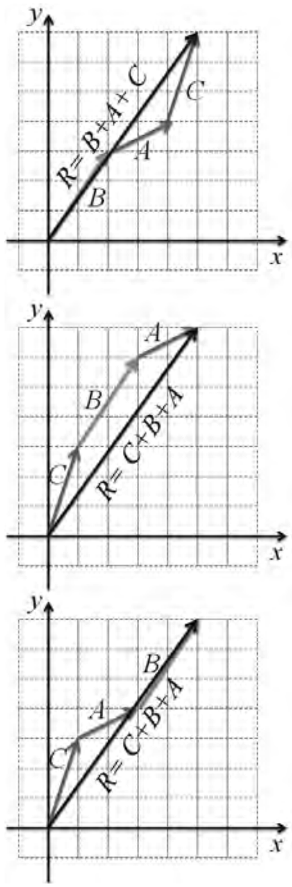


***Figura 3.9**. Propiedad conmutativa de la suma de vectores. Fuente Propia.*

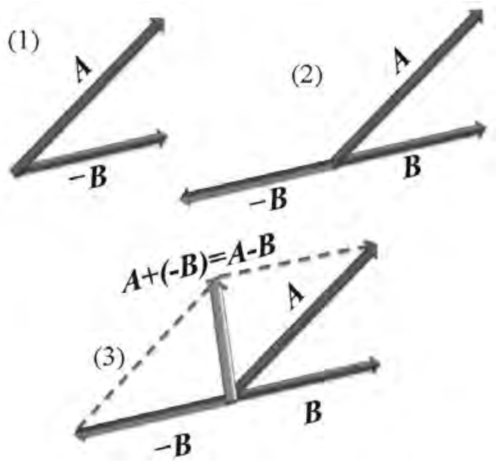


Figura 3.10. *Resta de dos vectores. Fuente Propia*

Sin embargo existe una segunda forma gráfica para restar vectores. En la misma situación considérese que se tienen los vectores **A** y **B** representados en el plano y se quiere restarlos, para ello simplemente se dibujan los vectores partiendo de un mismo punto y se dibuja el vector resta partiendo del vector que resta hasta el vector que es restado como se muestra en la figura 3.11.

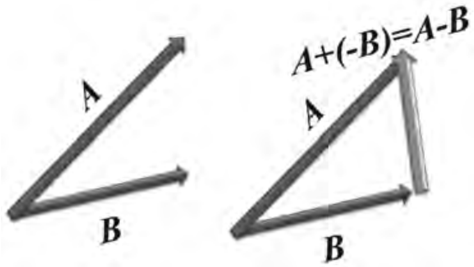


Figura 3.11*. Método triangular para resta de vectores. Fuente Propia.*

Nótese que tanto el método del paralelogramo para restar vectores como el método anteriormente visto –denominado método triangular– obtienen vectores de la misma magnitud, dirección y sentido, tal vez difieren en el punto de aplicación pero considerando que es posible en física trasladar vectores de forma paralela, sin que ello implique el cambio en las características de la solución, se puede concluir que se llega exactamente a la misma respuesta con cualquiera de las dos estrategias.

***Ejemplo 3.3**: Restar gráficamente los vectores* $\vec{A} = 5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ *y* $\vec{B} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$

***Solución**: La figura 3.12., muestra gráficamente la solución de este problema, (2) usando el método del paralelogramo, (3) usando el método triangular.*

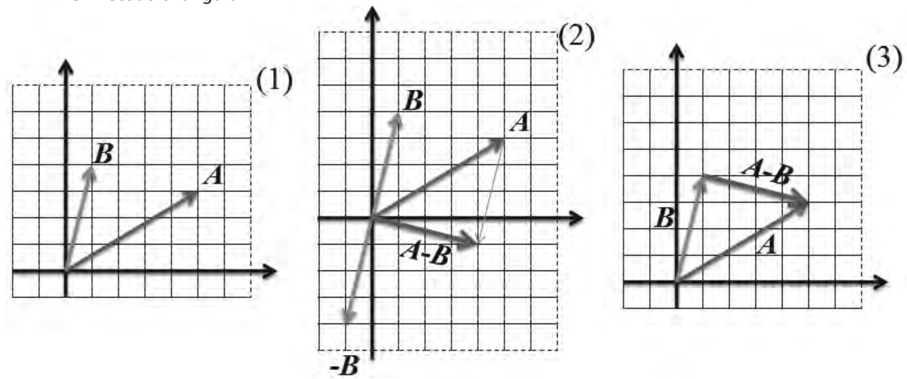


***Figura 3.12**. Resta de dos vectores del ejemplo 3.3*

Analíticamente se tiene que:

$$\vec{A} - \vec{B} = (5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) - (\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}) = 5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i} + 3j - 4\boldsymbol{j} = 4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$$

Que corresponde al resultado obtenido de forma gráfica tanto en la forma (2) como en la forma (3). El siguiente conjunto de operaciones para vectores son las multiplicaciones; a continuación se conceptualizan algunos procesos relacionados con el producto de vectores.

Multiplicación de dos vectores

Existen tres tipos de operaciones relacionadas con la multiplicación que se pueden realizar con vectores; la multiplicación de un vector por un escalar, el producto escalar entre dos vectores o producto punto y el producto vectorial entre dos vectores o producto cruz.

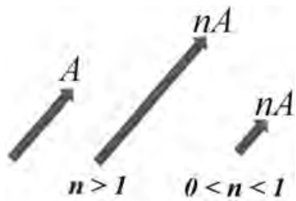


***Figura 3.13**. Multiplicación de un vector por un escalar. Fuente Propia.*

En el producto escalar simple, se multiplica un vector por una constante, esto equivale a multiplicar cada componente del vector por el escalar lo que resulta en un nuevo vector paralelo al original, ampliado, reducido y/o rotado 180º cuando la constante es negativa.

Sea el vector $\vec{A} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ un vector en tres dimensiones el producto escalar simple $n\vec{A}$donde n es una constante numérica no nula –diferente de cero– equivale a:

$$n\vec{A} = na_x\boldsymbol{i} + na_y\boldsymbol{j} + na_z\boldsymbol{k} \qquad \text{[Ec. 3.9]}$$

- ☑ Si n > 1 el vector resultante tiene una mayor magnitud y es paralelo al vector original.
- ☑ Si 0 < n < 1 el vector resultante tiene una menor magnitud y es paralelo al vector original.
- ☑ Si –1< n < 0 el vector resultante tiene una menor magnitud y está rotado 180º
- ☑ Si n < –1 el vector resultante tiene una mayor magnitud y está rotado 180º

La conclusión importante es que al multiplicar un vector por un escalar, varía su magnitud y su sentido si la constante es menor que cero, pero no cambia la inclinación, es decir su dirección.

Producto Punto

Una segunda forma de multiplicación vectorial es lo que se denomina el **producto punto o producto escalar** entre dos vectores y corresponde a la multiplicación de la proyección de uno de los vectores sobre otro vector por la magnitud del segundo vector; para comprender mejor este concepto, tómese inicialmente dos vectores no paralelos en el plano.

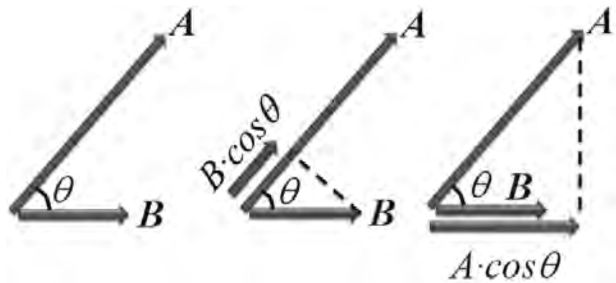


***Figura 3.14**. Producto Punto de dos Vectores. Fuente Propia*

Así el producto punto de dos vectores se define como se muestra en la ecuación 3.10.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\theta \qquad \text{[Ec. 3.10]}$$

Otra conclusión muy importante es que el producto punto de dos vectores corresponde a un escalar, es decir un número y en tal sentido se cumple la propiedad conmutativa; adicionalmente cuando los vectores son perpendiculares, el producto punto vale cero ya que $cos\frac{\pi}{2} = 0$ y esto se explica por el hecho que cuando dos vectores son perpendiculares, no existe proyección de uno sobre el otro.

Cuando dos vectores son paralelos el producto punto es igual a la multiplicación de las magnitudes ya que el coseno del ángulo vale 1 {cos(0º)=1} en el caso que tengan el mismo sentido o vale –1 cuando tienen sentidos opuestos, es decir formen entre ellos un ángulo de 180º. Lo anterior permite definir el producto punto entre vectores unitarios con fines de establecer la forma analítica del producto punto de vectores.

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = (1)(1)cos0 = 1$$

$$i \cdot j = j \cdot k = i \cdot k = (1)(1)cos\frac{\pi}{2} = 0$$

De esta manera el producto de dos vectores en el plano:

$$\vec{A} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} \text{ y } \vec{B} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}$$

se obtiene como se muestra en la expresión 3.11.

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\theta = a_xb_x + a_yb_y} \quad \text{[Ec. 3.11]}$$

Y si están en el plano tridimensional quedan:

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\theta = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z} \quad \text{[Ec. 3.12]}$$

Donde θ corresponde al ángulo entre los dos vectores

***Ejemplo 3.4**: Encuentre el producto punto entre los vectores*

$$\vec{M} = 8\angle 30º \text{ y } \vec{N} = 6\angle 135º$$

***Solución**: Existen dos formas con las cuales se puede encontrar el resultado del producto punto entre los vectores; la primera es*

El Vector

Etimológicamente la palabra vector viene del latín Vectoris que significa "el que conduce, el que lleva" y esta connotación lo ha llevado a ser aplicado en muchas ramas de la ciencia.

En las matemáticas por ejemplo el término Vector se usa para representar cantidades que llevan en si, otras cantidades con cierto orden y dos operaciones fundamentales, la suma y el producto. En medicina también se usa la palabra vector para representar a todos aquellos organismos capaces de transportar enfermedades.

http://blog.ciencias-medicas.com

***Figura 3.15**. Zancudo Aedes aegypti*

El zancudo Aedes aegypti, es único vector que transmite la enfermedad conocida como Fiebre Amarilla, que ha causado más muertes que todas las guerras de la humanidad, juntas.

usando la magnitud y ángulo entre ellos y la segunda usando las componentes. A continuación se exploran cada una de ellas.

***Primera Forma**: atendiendo a la representación gráfica de los vectores que se muestra en la figura 3.16.*

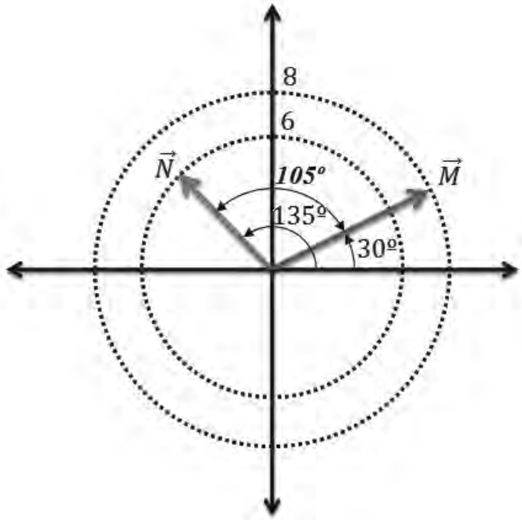


***Figura 3.16.** Representación de los vectores en el problema 3.4.*

El ángulo entre vectores vale 105º, así el producto punto vale:

$$\vec{M} \cdot \vec{N} = (8)(6)\cos(105º) \approx 12{,}42$$

***Segunda forma**: A partir de la representación polar, se obtiene las componentes para la representación en términos de los vectores unitarios.*

$$\vec{M} = 8\cos(30º)\,\boldsymbol{i} + 8\,\mathrm{sen}(30º)\,\boldsymbol{j} = 6{,}93\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$$

*De la misma forma para el vector **N**.*

$$\vec{N} = 6\cos(135º)\,\boldsymbol{i} + 6\,\mathrm{sen}(135º)\,\boldsymbol{j} = -4{,}24\boldsymbol{i} + 4{,}24\boldsymbol{j}$$

Con estas componentes se puede encontrar el producto punto dada la ecuación 3.12.

$$\vec{M} \cdot \vec{N} = (6{,}93)(-4{,}24) + (4)(4{,}24) \approx 12{,}42$$

Los dos procedimientos son igualmente válidos, la aplicación de uno u otro depende del contexto del problema y de la naturaleza de los datos que se tienen.

Producto Cruz

El último producto que se analiza en este libro –el **producto vectorial** entre dos vectores o **producto cruz**– es una operación definida en el espacio tridimensional es decir en R^3, y se denota mediante la expresión matemática:

$$\vec{A} \times \vec{B}$$

Para definir el producto vectorial, se dibujan nuevamente los dos vectores en el plano unidos por la cola, el resultado del producto cruz es un tercer vector ortogonal al plano donde están los dos primeros vectores tal como lo muestra la figura 3.17.

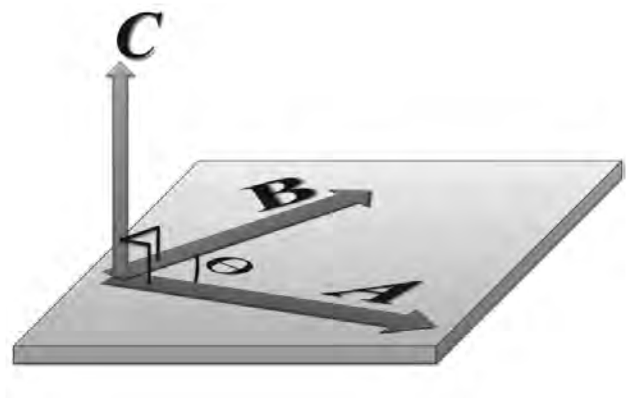
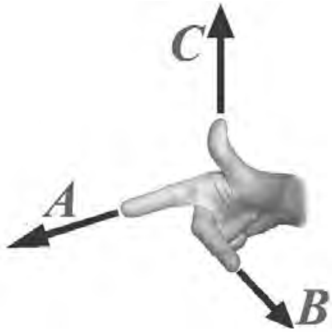


***Figura 3.17**. Producto Cruz de dos Vectores.*

Sin embargo siempre existen dos direcciones perpendiculares al plano de los vectores que se multiplican, para escoger el correcto se sigue lo que se conoce como la **Regla de la Mano Derecha**, para esto asúmase que el vector A gira hasta alinearse con el vector **B** escogiendo siempre el ángulo más pequeño entre **A** y **B**, usando la mano derecha y rotando los dedos índice y central sobre la perpendicular con las puntas señalando en la dirección de los vectores que se multiplican, la dirección correcta del vector producto cruz $\vec{A} \times \vec{B}$es siempre la dirección hacia donde apunta el dedo pulgar.



Adaptado de http://wdict.net/es/gallery/regla+de+la+mano+derecha/

Figura 3.18.*Sentidos en el Producto Cruz de dos Vectores.*

Y de la misma manera se determina la dirección de $\vec{B} \times \vec{A}$ haciendo girar el vector B hacia el vector A, siendo la dirección del vector la misma que hacia donde apunta el dedo pulgar.

En términos matemáticos es posible establecer que el producto vectorial o producto cruz de dos vectores, denotado como $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ está dado por la relación:

$$\boxed{|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta} \qquad \text{[Ec. 3.13]}$$

Por tanto, si dos vectores son paralelos entonces su producto cruz vale cero y si son perpendiculares, su producto cruz es máximo; tómese ahora los vectores unitarios y la ley de la mano derecha anteriormente descrita, así se puede establecer claramente que:

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

Pero también

$$i \times j = k \qquad j \times k = i \qquad k \times i = j$$

$$j \times i = -k \qquad k \times j = -i \qquad i \times k = -j$$

Figura 3.19. *Producto cruz entre vectores unitarios.*

La figura 3.19., muestra el sentido positivo en el orden en que se deben multiplicar los vectores unitarios para obtener el vector siguiente, si se va contra de este sentido el vector resultante será de signo negativo; esto concuerda con los planteamientos dados en las expresiones anteriores del producto cruz de los vectores unitarios.

Ejemplo3.5*: Obtener el producto cruz de los vectores*

$$A = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} \quad \text{y} \quad B = 2\boldsymbol{k}$$

Solución*: Indicando la operación dada la expresión 6.13., se tiene*

$$\vec{A} \times \vec{B} = (2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}) \times 2\boldsymbol{k}$$

Que es igual a

$$\vec{A} \times \vec{B} = 4(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}) - 6(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}) = 4(-\boldsymbol{j}) - 6(\boldsymbol{i})$$

Por tanto

$$\vec{A} \times \vec{B} = -6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$$

En el caso que se tengan vectores tridimensionales, resulta más útil aplicar el método matricial–determinante para hallar el resultado del producto cruz. Para ejemplificarlo, considérese los vectores A y B en R^3

$$\vec{A} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \quad \vec{B} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

Entonces$\vec{A} \times \vec{B}$ se dispone como un determinante para una matriz de 3x3.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Con lo que se llega a la expresión para el producto cruz de vectores.

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\boldsymbol{i} - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)\boldsymbol{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\boldsymbol{k}}$$

Que corresponde a un tercer vector C, perpendicular al plano formando entre los vectores A y B.

Ejemplo 3.6*: Obtenga el producto cruz de*

$$\vec{A} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}y \qquad \vec{B} = -2\boldsymbol{i} + 2j + 3\boldsymbol{k}$$

Solución*: Usando el arreglo matricial se tiene:*

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Con lo que obtiene

$$\vec{A}\times\vec{B} = (12+2)\boldsymbol{i} - (9-2)\boldsymbol{j} + (6+8)\boldsymbol{k}$$

Y se llega a

$$\vec{A}\times\vec{B} = 14\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k}$$

Que es un vector perpendicular al plano formado por los otros dos vectores.

Preguntas y Ejercicios de Vectores

Preguntas

1. ¿La suma de dos vectores no nulos, puede dar cero? Ejemplifique su respuesta.
2. ¿El producto punto de dos vectores no nulos, puede dar cero? Ejemplifique su respuesta.
3. ¿El producto cruz de dos vectores no nulos, puede dar cero? Ejemplifique su respuesta.
4. ¿A qué es igual la magnitud de la suma de dos vectores que son perpendiculares?
5. Dado el vector $|A| = 4cm$ y el vector $|B| = 3cm$ encuentre los valores máximos y mínimos para la magnitud del vector resultante suma. Analice el comportamiento del ángulo entre los vectores.
6. ¿Es posible que la magnitud de un vector sea una cantidad negativa?
7. ¿Es posible que la dirección de un vector sea una cantidad negativa?

Ejercicios

1. Para los siguientes vectores, determine la magnitud y la dirección y represéntelos en el plano:

a.	(–1,2)	b.	(2,3)	c.	(4,5)
d.	(–1,–2)	e.	(3,–4)	f.	(–3,4)
g.	(–3,–4)				

2. Para los siguientes vectores, determine la magnitud y la dirección y represéntelos en el plano:

a.	$3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$	b.	$-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$	c.	$-3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$
d.	$3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$	e.	$\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$	f.	$\sqrt{2}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$
g.	$\pi\boldsymbol{i} + e\boldsymbol{j}$	h.	$\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{3}{4}\boldsymbol{j}$	i.	$\frac{1}{3}\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$

3. Para los siguientes vectores expresados en forma polar, obtenga la representación en términos de los vectores unitarios:

a.	$12\angle 30º$	b.	$8\angle 95º$	c.	$\frac{1}{2}\angle -30º$
d.	$200\angle 135º$	e.	$\sqrt{5}\angle 220º$	f.	$1\angle -135º$
g.	$48\angle 330º$	h.	$48\angle -30º$	i.	$14\angle 140º$

Sean los siguientes vectores

$$\vec{A} = 2i + 3j \qquad \vec{B} = 2i + j - 2k \qquad \vec{C} = i + 3j - 4k \qquad \vec{D} = -i + 3j + k$$

4. Obtenga la norma para cada uno.

5. Realice las siguientes operaciones vectoriales de manera analítica y gráfica.

a.	A+B	b.	A+C–D	c.	B–A+C
d.	C–A+B–D	e.	2A+3B	f.	5D+4B
g.	–2B–3C	h.	2A+3B–4D		

6. Realice las siguientes operaciones vectoriales empleando diversos métodos.

a.	A·B	b.	–B·C	c.	C·(–D)
d.	A×B	d.	B×A	e.	(A×D)·B
f.	(B×C)·(C×D)	g.	(A+B)×(C-D)		