Un método unificador en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales de primer orden

A unifying method in teaching first order differential equations

H. H. Ortiz[1]

1 Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, código ORCID: 0000-0001-5605-1980. Contacto: hhortiza@unal.edu.co.

Resumen

En este trabajo se presenta un método poco conocido en la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden a nivel de pregrado y su posible incorporación o discusión en los microcurrículos correspondientes. El método en cuestión se fundamenta en el estudio de las transformaciones puntuales y su efecto sobre las ecuaciones diferenciales. En particular serán de interés aquellas transformaciones que dejen invariante la ecuación diferencial, pues permiten la construcción de un sistema de coordenadas en las cuales la ecuación diferencial sea separable. Cabe resaltar que aquellas ecuaciones que generalmente se abordan en cursos de pregrado (Lineal, homogénea, Bernoulli, exactas y de factores integrantes) son susceptibles de ser abordadas con esta técnica. Para lo anterior, se abordan los fundamentos básicos del método y se expone mediante ejemplos su aplicación. Por último se hacen algunas observaciones sobre cómo podría implementarse en un curso regular de ecuaciones diferenciales ordinarias en programas de matemáticas o ingeniería.

Palabras clave

Ecuaciones diferenciales, grupos de Lie, coordenadas canónicas.

Abstract

In this paper a littleknown method is presented in the solution of first-order differential equations at the undergraduate level and its possible incorporation or discussion in the corresponding microcurriculum. The method in question is based on the study of point transformations and their effect on differential equations. In particular, those transformations that leave the differential equation invariant will be of interest, since they allow the construction of a coordinate system in which the differential equation is separable. It should be noted that those equations that are generally addressed in undergraduate courses (Linear, homogeneous, Bernoulli, exact and integrating factors) are likely to be addressed with this technique. For the above, the basic foundations of the method are addressed, and its application is explained by examples. Finally, some observations are made on how it could be implemented in a regular course of differential equations for mathematics or engineering programs.

Keywords

Differential equations, Lie groups, canonical coordinates

I. INTRODUCCIÓN

El estudio de las ecuaciones diferenciales surge de manera natural con la aparición del cálculo diferencial e integral, estas ecuaciones han servido para el modelamiento de diversos fenómenos como el crecimiento de poblaciones, desarrollo de reacciones químicas, vibraciones libres y forzadas son solo algunos ejemplos. Habitualmente la aproximación analítica en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales de primer orden se replica semestre a semestre como una sucesión de técnicas para cada clase de ecuación diferencial. Las lineales con su factor integrante, las homogéneas y de Bernoulli con su sustitución especial, etc. El matemático noruego Sophus Lie logró relacionar esta área con los trabajos de Evarist Galois en la solución de ecuaciones algebraicas. Entre los resultados más relevantes de Lie, está el haber identificado la invariación de una EDO de primer orden bajo un grupo de simetrías como una condición para su solución en términos de cuadraturas. Lo anterior, permite abordar la mayoría de EDO's que se estudian en un curso regular de ecuaciones diferenciales, desde una mirada unificadora, que recoge bajo la característica de la invariación ecuaciones que históricamente se fueron resolviendo bajo diferentes heurísticas sin una aparente relación conceptual entre ellas (Ortiz, 2012).

A pesar de que esta teoría se aborda a nivel de maestría y doctorado en programas muy específicos de matemática, puede ser considerada como una alternativa para la enseñanza en cursos de pregrado, respetando claro está las realidades sobre las competencias matemáticas observadas a este nivel.

En el desarrollo se presenta inicialmente un a discusión sobre los fundamentos teóricos del método. Luego, se ilustra el método mediante la solución de varias ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's) de primer orden. Por último se presentan conclusiones y observaciones sobre la posible utilización de esta técnica en cursos de pregrado.

II. CONCEPTOS TEÓRICOS

2.1. Conceptos teóricos básicos

2.1.1 Invariación de una función.

Una ecuación diferencial de primer orden $f(x,y,y')=0$ es invariante bajo un grupo de simetrías de la forma:

$$x_1=\varphi(x,y,\alpha), \qquad y_1=\phi(x,y,\alpha),$$
$$y'_1=\theta(x,y,y',\alpha)=\frac{dy_1}{dx_1}, \tag{1}$$

(donde α toma valores en los reales), si . Lo anterior es equivalente a la condición

$$df(x_1,y_1,y'_1)=0. \tag{2}$$

Es posible demostrar que la ecuación (2) es a su vez equivalente a la ecuación (3) [1],

$$\xi f_x+\eta f_y+(\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-\xi_y(y')^2)f_{y'}=0 \tag{3}$$

donde,

$$\xi(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0},\quad \eta(x,y)=\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} \tag{4}$$

2.1.2 Generadores infinitesimales. A todo grupo uniparamétrico de transformaciones de la forma (1) están asociados generadores o simetrías infinitesimales dados por (4) si se imponen condiciones de diferenciabilidad adecuadas a las funciones que intervienen [2,6].

2.1.3 Coordenadas canónicas. Si una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es invariante bajo un grupo de transformaciones uniparamétrico, entonces existen coordenadas canónicas que permiten transformar dicha ecuación diferencial en una de variables separables [3].

Primero debe observarse que una EDO de variables separables de la forma $\frac{dy}{dx}=h(x)$ es invariante bajo el grupo de traslación $x_1=x$ y $y_1=y+\alpha$.

En estas nuevas coordenadas, obtenemos de nuevo $\frac{dy_1}{dx_1}=h(x_1)$.

2.1.4 Teorema

Sean $(X(x,y)\ ,Y(x,y))$ *nuevas coordenadas que transforman una EDO de primer orden invariante bajo un grupo de transformaciones a un parámetro, con generadores infinitesimales* ξ *y* η*. Para que la ecuación así transformada sea de variables separables, es decir para que sea invariante bajo el grupo de traslación paralela al eje x, debe cumplirse*

$$\begin{aligned} \xi X_x + \eta X_y &= 0, \\ \xi Y_x + \eta Y_y &= 1. \end{aligned} \tag{5}$$

La solución de estas dos ecuaciones proporciona las coordenadas buscadas X y Y a las cuales se les conoce como coordenadas canónicas. En estas nuevas coordenadas se obtiene como ecuación transformada

$$\frac{dY}{dX} = g(X,Y) \tag{6}$$

Donde $g(X,Y)$ debe identificarse para cada ecuación diferencial a resolver.

III. APLICACIÓN DEL MÉTODO

En resumen, Si una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es invariante bajo un grupo de transformaciones uniparamétrico, entonces es posible construir un cambio de coordenadas bajo los cuales la ecuación diferencial se transforme en una de variables separables. Dichas coordenadas dependen también de los generadores infinitesimales [4].

Ejemplo 1:

Para ilustrar el método se empezará con el estudio de la solución de una ecuación lineal. Aunque la solución tradicional es conocida, nos aportará en la comprensión de la técnica. En un trabajo anterior [1] de esta misma autoría, para la ecuación

$$y' + \frac{3}{x} y = e^x$$

se obtuvo:

$$f_x = -\frac{3}{x^2} y - e^x$$

$$f_y = \frac{3}{x}$$

$$f_{y'} = 1$$

$$y' = e^x - \frac{3}{x} y$$

Suponiendo $\xi = 0$, la ecuación (3) se reduce a:

$$\eta \frac{3}{x} + \eta_x + \eta_y (e^x - \frac{3}{x}) y = 0$$

Asumiendo $\eta_y = 0$, se obtiene: $\eta = e^{-\int \frac{3}{x} dx}$

luego, un grupo bajo el cual es invariante esta ecuación diferencial está determinado por los generadores:

$$\xi = 0 \quad y \quad \eta = e^{-\int \frac{3}{x} dx} = x^{-3} + c$$

Ahora bien, para estos generadores, la condición (5) puede escribirse como

$$0X_x + (x^{-3})X_y = 0,$$

$$0Y_x + \eta Y_y = 1.$$

Lo que conduce a las coordenadas canónicas

$$X = x,$$

$$Y = x^3 y,$$

En estas coordenadas

$$\frac{dY}{dX} = 3x^2 y + \frac{dy}{dx} x^3,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3} \frac{dY}{dX} - \frac{3}{x} y,$$

Remplazando en la ecuación a resolver obtenemos la ecuación separable en las nuevas variables

$$\frac{dY}{dX} = X^3 e^X \quad ,$$

con solución

$$Y = e^X (X^3 - 3X^2 + 6X - 6) + C \quad ,$$

en las variables originales la solución general es

$$x^3 y = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C \quad ,$$

En [1] se hace una descripción de programas especializados para el cálculo de los generadores infinitesimales de EDO's de diferente orden tanto ordinarias como parciales. En este mismo trabajo se hallan con el programa LIE 5.1 los generadores infinitesimales de la ecuación de Bernoulli que sirve como siguiente ejemplo.

Ejemplo 2: Ecuación de Bernoulli

Para la ecuación de Bernoulli: $2xy\dfrac{dy}{dx} + 2y^2 + 3x = 0,$ (9)

se obtuvieron tres vectores:

$$v_1 = -\frac{1}{x^2 y}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad v_2 = -x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{2y}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$v_3 = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{3}{2xy}\frac{\partial}{\partial y}.$$

y

Cada vector obtenido tiene la forma $v_2 = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}.$

Para v_1 se identifican los generadores $\xi = 0$ y $\eta = -\dfrac{1}{x^2 y}$, de nuevo la condición (5) lleva a las coordenadas canónicas

$X = x$,

$Y = -\frac{x^2 y^2}{2}$,

Y a la ecuación transformada en las nuevas variables $\frac{dY}{dX} = \frac{3}{2}X^2$,

con solución general en las variables originales $-\frac{x^2 y^2}{2} = \frac{1}{2}x^3 + C$

Identificación de los generadores infinitesimales

Como ya se ha discutido en [1] la identificación de los generadores infinitesimales es el paso crítico en el procedimiento de solución. Para una ecuación diferencial dada la ecuación de invariación (3) requiere para su solución diversas heurísticas, que podrían desanimar en cuanto al uso de esta técnica. Si embargo, como es habitual en la enseñanza de las integrales y las transformadas de Laplace, el uso de tablas es un camino alternativo de fácil manejo. Por ejemplo, en [3] se incluyen tablas en las cuales se presentan generadores infinitesimales para algunas familias generales de ecuaciones diferenciales junto con sus respectivas coordenadas canónicas [3].

Hereman hace una clasificación extensiva de los paquetes computacionales especializados en el cálculo de simetrías, [5], teniendo en cuenta los alcances de cada uno de ellos en el cálculo de simetrías puntuales (las que hemos analizado), generalizadas y no clásicas, de si resuelven o reducen el sistema determinante o si permiten o no interactuar con el usuario.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, se propone el siguiente procedimiento alternativo para el estudio y enseñanza de solución de EDO's de primer orden invariantes bajo grupos de simetrías puntuales o transformaciones uniparamétricas.

- Plantear la ecuación de invariación.

- Identificar ξ y η que verifiquen la ecuación anterior (tablas, software especializado o de manera analítica)
- Construir coordenadas canónicas
- Encontrar la ecuación separable en las nuevas coordenadas y resolverla
- Identificar la solución general en las variables originales.

IV. CONCLUSIONES

El método de los grupos de Lie o de simetrías infinitesimales se constituye en un concepto unificador en la teoría de solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Aunque aquellas ecuaciones que no presenten este tipo de invariación bajo los grupos de transformaciones uniparamétricos no son susceptibles de ser abordados con esta metodología, si lo son de las que conocemos su solución por los métodos tradicionales.

Las dificultades intrínsecas en la aplicación del método de coordenadas canónicas, como son la solución de la condición de invariación y la condición para el cálculo de dichas coordenadas, pueden obviarse para la enseñanza mediante el uso de tablas de EDO's, generadores y coordenadas canónicas, previamente desarrolladas por diversos autores o mediante el uso de software especializado.

Para nosotros como docentes en esta área particular de la matemática es importante reconocer la invariación de las EDO's de primer orden bajo grupos de simetría a un parámetro como el elemento en común de las EDO's de solución conocida consideradas en los cursos regulares de pregrado.

REFERENCIAS

[1] H.H Ortiz, F.N Jiménez, A.E. Posso. "Una Metodología para la Enseñanza de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Mediante la Teoría de los Grupos de LIE en Cursos de Ingeniería". Revista entre ciencia e ingeniería, vol 6, No 11. 2012, pp. 149 -163.
[2] P.J. Olver, "Application of Lie Groups to Differential Equations". 2 ed, New York: Springer Verlag, 1993.
[3] G. Emanuel, "Solution of Ordinary Differential Equations by Continuous Groups". United States: Chapman and Hall/Crc, 2001.

[4] G. Bluman, S. Kumel, "Symmetries and Differential Equations", 2 ed., New York: Springer Verlag, 1989.
[5] W. Hereman, "Review of Symbolic Software for Lie Symmetrie Analysis. Algorithms and software for symbolic analysis of nonlinear systems", Mathematical and Computer Modelling. Vol. 25, num 8, 1997, pp. 115-132.
[6] A. Campos, "Iniciación en el análisis de ecuaciones diferenciales mediante grupos de Lie. Colombia: Prepublicación. Universidad Nacional de Colombia, 1995.

Biografía. Hugo Hernán Ortiz Álvarez

Es Doctor en ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia y Magister en enseñanza de la matemática de la Universdiad Tecnológica de Pereira. Es docente del departamento de matemática de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales desde el 2008 en dedicación de catedra y docentes de tiempo completo de la Universidad de Caldas desde 2009.

Áreas de investigación: Ecuaciones diferenciales, enseñanza de la matemática, modelamiento y simulación.