

IMPLEMENTACIÓN DE UN SISTEMA AUTOMATIZADO PARA EL ESTUDIO DE OSCILACIONES ACOPLADAS

Implementation of an automated system for
the study of coupled oscillations

E. O. Espinel¹, J. C. Mosquera²

¹ Universidad del Quindío. Programa de Física, Armenia (Colombia); ORCID: 0000-0001-7707-1147.
Contacto: eoespinelm@uqvirtual.edu.co

² Universidad del Quindío. Instituto interdisciplinario de las ciencias, Armenia (Colombia); ORCID: 0000-0001-7874-0736. Contacto: jcmosquera@uniquindio.edu.co

Resumen

Este proyecto consistió en la automatización de la adquisición de datos de un sistema de péndulos acoplados con un resorte. La toma de datos se realizó por medio de una tarjeta Arduino-uno, a la cual se le ajustaron dos acelerómetros MPU-6050. Los códigos se desarrollaron en los softwares libres Arduino y Python, siendo este último de gran utilidad para el análisis de algunas medidas. Con este sistema automatizado no solo es posible la medición de los modos normales de oscilación, las frecuencias de las pulsaciones y las frecuencias de los sistemas parciales, sino también el estudio de oscilaciones amortiguadas y, por lo tanto, la realización de un estudio energético de sistemas mecánicos acoplados. Se desarrolló una guía básica de laboratorio con el objetivo de facilitar el uso del sistema y permitir la implementación de diferentes prácticas de laboratorio que desarrollan los docentes en conjunto con los estudiantes. Una interfase gráfica desarrollada en Python acompaña la implementación del sistema de adquisición de datos y facilita el procesamiento de los mismos, al permitir, entre otras, la presentación gráfica de los resultados y el cálculo de la transformada Fourier de la serie de tiempos que es obtenida de una medición realizada.

Palabras clave

Arduino, acelerómetro, laboratorios de física, modos normales de oscilación, transformada rápida de Fourier.

Abstract

This project consisted of automating the acquisition of data from a pendulum system coupled with a spring. The data was collected using an Arduino-one card and to which two MPU-6050 accelerometers were adjusted. The codes were developed in the free software Arduino and Python, the latter being very useful for the analysis of some measures. With this automated data collection system, it is not only possible to measure normal oscillation modes, pulsation frequencies and frequencies of partial systems, but also the study of damped oscillations and, therefore, it is possible to perform an energetical study of coupled mechanical systems. A basic laboratory guide was developed with the objective of facilitating the use of the system and allowing the implementation of different laboratory practices developed by teachers in conjunction with students.

A graphical interface developed in Python accompanies the implementation of the data acquisition system and facilitates the processing of the data by allowing,

among others, the graphical presentation of the results and the calculation of the Fourier transform of the time series that is obtained from the measurements.

Keywords

physics laboratories, Arduino, accelerometer, normal oscillation modes, fast Fourier transform

I. INTRODUCCIÓN

Las prácticas de laboratorio son parte fundamental en la formación de los estudiantes de ciencias, porque constituyen un vínculo entre la teoría estudiada en clase y los sistemas reales. Hay diferentes tipos de prácticas de laboratorio, como aquellos que buscan desarrollar destrezas y habilidades en el estudiante, o experimentos que pretenden corroborar y evidenciar teorías; también están los que permiten calcular constantes, pero en general, el objetivo fundamental es didáctico: se trata de prácticas didácticas más que científicas.

Estas prácticas didácticas pueden tener un carácter cualitativo o cuantitativo, dependiendo del enfoque que se busque, siendo la precisión en la recolección de datos de primordial importancia dentro de las prácticas cuantitativas, por lo cual los estudiantes deben incursionar en la teoría y práctica de las incertidumbres correspondientes a todo experimento.

Sabiendo que la precisión es importante en las prácticas de laboratorio, los errores que se presentan en la adquisición de datos dificultan inferir relaciones matemáticas descritas por leyes: las formas funcionales que se encuentran en el experimento pueden no corresponder a lo descrito en la teoría, las constantes que se calculan del experimento posiblemente no coincidan con las reportadas, por lo cual es posible que se complique el proceso del estudiante para inferir nuevo conocimiento con base en la práctica.

Algunos aspectos que influyen en la correcta realización de un experimento son de carácter instrumental, tales como la alta estabilidad y resistencia al desgaste de los materiales utilizados, la sensibilidad y respuesta de los sensores, la eliminación de ruido a través de filtros o diseño experimental, entre muchas otras consideraciones que permitirán al estudiante recorrer, de una manera eficiente, este proceso de aprendizaje [1] [3].

Asimismo, la instrumentación en un experimento es fundamental para obtener datos fiables, reproducibles, con un porcentaje de error conocido, con control de parámetros.

En este trabajo se propone diseñar y montar una práctica de laboratorio de dos péndulos acoplados [4] [5], en donde se miden, mediante un acelerómetro instalado en cada péndulo, las variaciones en la posición.

Este instrumento registra tres coordenadas y mediante el software que se diseñó, se pueden obtener los valores de los ángulos en función del tiempo, se calculan las frecuencias propias del sistema y se estudian las propiedades de disipación de la energía contenida en el sistema. El experimento, su diseño, el software y los cálculos están definidos para pequeños ángulos de oscilación, pero es posible usarlo para casos de ángulos mayores donde el sistema deja de ser lineal.

El estudio de sistemas oscilatorios con dos grados de libertad puede realizarse a partir de un sistema de dos péndulos físicos acoplados, como el que se muestra en la Fig. 1.

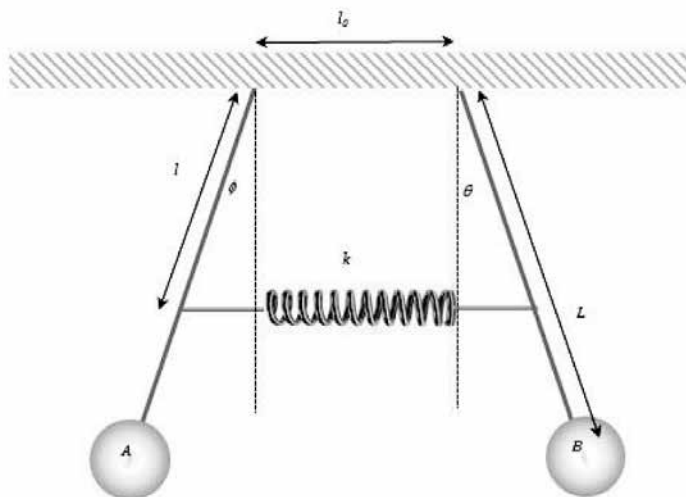


Fig. 1. Montaje esquemático del sistema de péndulos acoplados.

Cada péndulo está compuesto de una barra delgada de longitud L , que puede girar libremente en un plano. Sujeta a uno de sus extremos se halla una masa m . Un resorte de longitud l_0 y constante de elasticidad k conecta los péndulos a una distancia l medida desde el centro de giro de cada péndulo, como se observa en la Fig. 1.

La descripción de la posición de cada masa en función del tiempo se puede realizar en un sistema de coordenadas polares, introduciendo los ángulos $\theta(t)$ y $\varphi(t)$, medidos respecto a la vertical. En este trabajo se considerará que los ángulos son pequeños, de forma tal que es posible considerar que $\sin \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$.

De igual manera, se puede analizar el sistema de la Fig. 1. de forma energética, mediante el formalismo de Lagrange, de tal modo que se puedan obtener las siguientes ecuaciones acopladas:

$$mL^2\ddot{\theta} - kl^2(\varphi - \theta) + mgL \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$mL^2\ddot{\varphi} + kl^2(\varphi - \theta) + mgL \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) describen cómo se comporta el sistema. Si se trata con un sistema real, aparecerá un término adicional en estas ecuaciones, el cual hace referencia al amortiguamiento del sistema, de tal modo que:

$$mL^2\ddot{\theta} - kl^2(\varphi - \theta) + mgL \sin \theta + \epsilon_\theta = 0 \quad (3)$$

$$mL^2\ddot{\varphi} + kl^2(\varphi - \theta) + mgL \sin \varphi + \epsilon_\varphi = 0 \quad (4)$$

Realizando las consideraciones pertinentes para poder desacoplar las ecuaciones (3) y (4), se pueden obtener las siguientes funciones:

$$\theta(t) = e^{\epsilon t} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \quad (5)$$

$$\varphi(t) = e^{\epsilon t} \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) representan el comportamiento del sistema de forma desacoplada en función de las frecuencias ω_1 , que representa la forma en

la cual oscila el péndulo descrito por la función y ω_2 , que describe cómo se transfiere la energía de dicho péndulo al otro.

Para poder llevar a cabo el desacople de las ecuaciones (3) y (4), se deben utilizar unas coordenadas nuevas que se conocen como coordenadas normales, que dejan introducir el concepto de modo normal de oscilación, importante dentro de la física referente a los sistemas acoplados.

Un sistema con dos grados de libertad posee dos modos normales de oscilación, fase y contrafase, que aportan al movimiento del sistema, razón por la cual la forma en que oscilan los péndulos puede ser analizada con base en estos modos normales.

Dicho de otro modo, es como si cada grado de libertad aportara una cierta energía al sistema para que pueda presentar un movimiento, donde este aporte se describe por el modo normal de oscilación y la frecuencia normal correspondiente a él.

II. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se montó el sistema formado por una barra horizontal soportada por ambos extremos; en esta barra se ubicaron dos rieles móviles, de los cuales se sostiene cada uno de los péndulos, que se acoplaron por medio de un resorte.

Cada péndulo se construyó con una varilla de acero, cuya masa se acopla a la varilla mediante un tornillo, de tal modo que esta se pueda mover en dicha varilla para así variar la longitud del péndulo. Cada péndulo se unió al eje horizontal por medio de una balinera para evitar al máximo la fricción y, a su vez, se adaptó paralelo al eje de giro de estas, con el fin de evitar los errores correspondientes a la variación de las coordenadas no medidas, los sensores mpu6050.

De forma paralela, se programó la lectura de los acelerómetros mpu6050 en lenguaje C, directamente en el software de Arduino [6] [9]. Dichos acelerómetros se ubicaron lo más cercano posible al eje de giro de cada uno de los péndulos, para poder obtener medidas más precisas. Luego se conectaron los acelerómetros a un Arduino-uno que ya tiene cargado el código, microcontrolador encargado de dirigir los procesos.

Sumado a lo anterior, se diseñó un aplicativo en el software Python 3.7.1, con el cual se busca controlar las medidas del sistema, realizar gráficas con los datos adquiridos y una transformada rápida de Fourier, que permita determinar las frecuencias de la medida y confirmar si esa fue la correcta.

El sistema admite grabar los datos con un módulo micro-SD en dos archivos con formato *.txt, en los cuales se escriben los valores del ángulo de apertura de cada uno de los péndulos y el tiempo correspondiente a cada uno de estos valores.

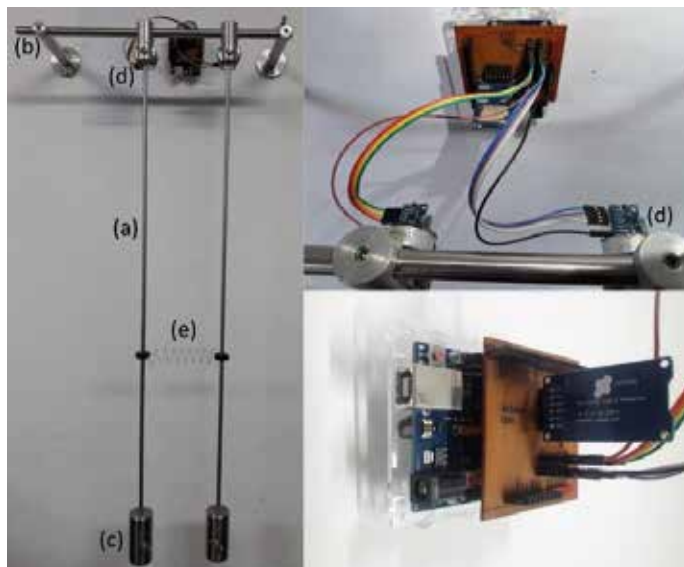


Fig. 2. Fotografía del sistema real.

El montaje experimental que se muestra en la Fig. 2., se desarrolló en el laboratorio de Acusto - óptica del Instituto Interdisciplinario de las Ciencias. Dos barras de acero inoxidable de diámetro 6.4 mm y longitud 0.800m (a), se suspendieron de un único soporte (b), como se muestra en la Fig. 1. En el extremo de cada barra se colocó una masa cilíndrica de 0.800 kg (c) que puede ser desplazada a lo largo de cada varilla, a fin de contar con diferentes disposiciones de los sistemas parciales que conforman la estación experimental.

Los módulos IMU se colocaron en los ejes de giro de cada péndulo (d), cuidando de que quedaran centrados a fin de garantizar una medición correcta del ángulo de inclinación de cada péndulo. Estos módulos IMU se conectaron al Arduino

a través de un circuito implementado en una tarjeta. El acople de los péndulos se realizó con un resorte (e) de 15 cm de longitud, aproximadamente. Toda la programación de los sensores se ambientó en el software propio de Arduino.

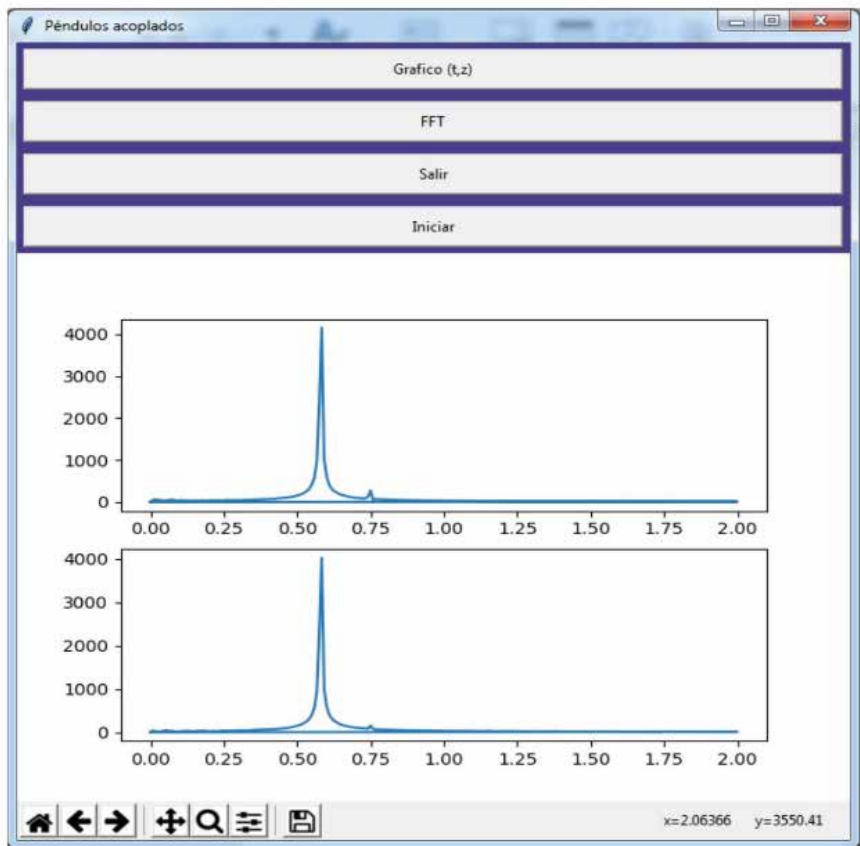


Fig. 3. Aplicación del Python.

Se decidió crear una aplicación en el software Python 3.7.1, la cual se muestra en la Fig. 3., que realiza el control del experimento, captura a través del Arduino los datos y luego procede a realizar el respectivo análisis de datos, que incluye:

- a) Gráfica del ángulo de los péndulos en función del tiempo.
- b) Las frecuencias del sistema mediante una transformada rápida de Fourier.
- c) Las frecuencias normales para cada modo de oscilación. d) La frecuencia de pulsación γ , e) El coeficiente de amortiguamiento.

Es de anotar que actualmente, la tendencia en muchas universidades es reemplazar los laboratorios reales por los virtuales, como lo menciona [10]. Esto posiblemente sucede por el interés de reducir los costos de funcionamiento de los programas académicos, sin embargo, en este artículo se muestra cómo se desarrolló un sistema experimental real de muy bajo costo para el estudio de un sistema de oscilaciones acopladas con dos grados de libertad.

Desarrollo experimental

El resorte de acople se fijó a una distancia de 0.47 m desde el centro de giro. Para el desarrollo de la práctica aquí presentada, la masa se colocó en el extremo de la varilla. Los cálculos indican que la longitud efectiva del péndulo, en este caso, es de 0.77 m.

Como un primer ejercicio se realizaron mediciones para las configuraciones en fase y en contra fase. Luego se repitieron las mediciones para una longitud efectiva del péndulo de 0.722 m. Las gráficas y su correspondiente transformada de Fourier se muestran en las Fig. 4. y 6.

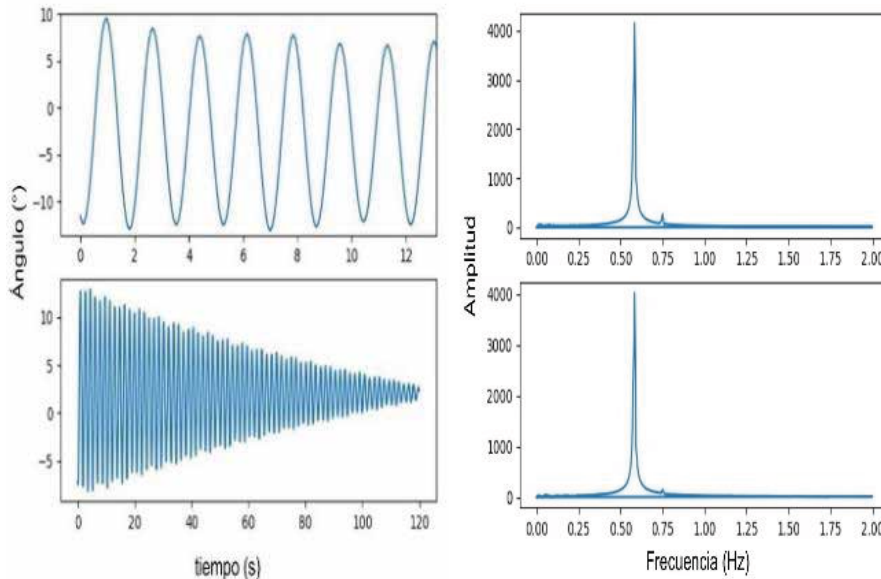


Fig. 4. Medida 1. Configuración en fase.

En la Fig. 4 se observa la gráfica de la posición angular para dos intervalos diferentes de tiempo. También se puede ver la gráfica de la transformada de Fourier, la cual, al aparecer un solo pico de tamaño no despreciable, confirma que se ha logrado un movimiento que tiene contribución de solamente un modo normal de oscilación.

Todas las medidas y gráficas se realizaron con la aplicación desarrollada. Para el caso de la medida de la Fig. 4., la frecuencia que calculó el sistema fue de 0.58309038 Hz.

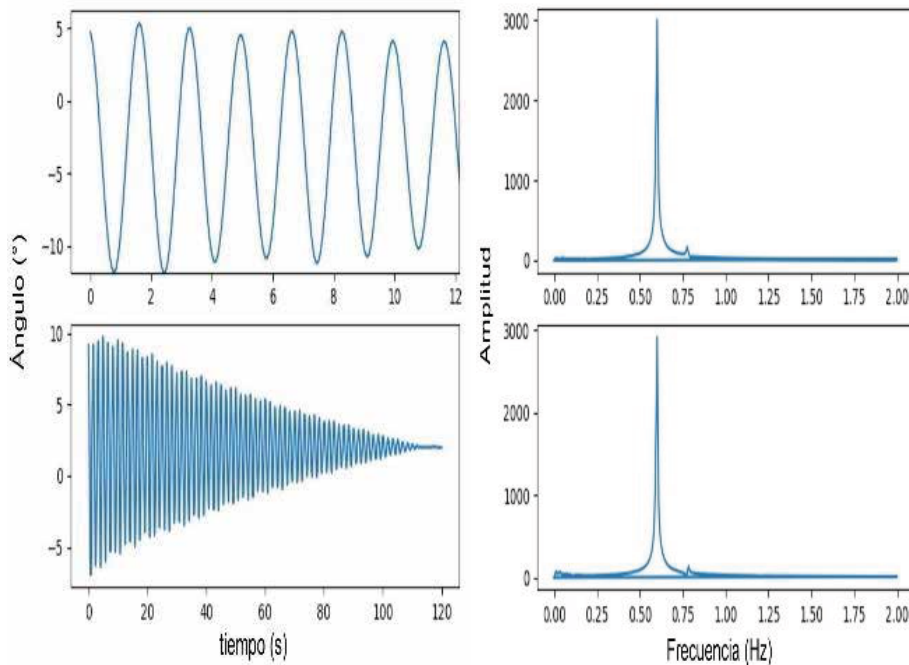


Fig. 5. Medida 2. Configuración en fase.

En la Fig. 5. se observa un comportamiento igual que en el de la Fig. 3., para la gráfica de la posición angular en función del tiempo. Del sistema se pudo obtener que la frecuencia para esta medida fue de 0.59975010 Hz, lo cual implica que hubo un aumento en la frecuencia fundamental del modo normal de oscilación, situación que ya era predecible, pues la teoría explica que la frecuencia del sistema será inversamente proporcional a la longitud del péndulo.

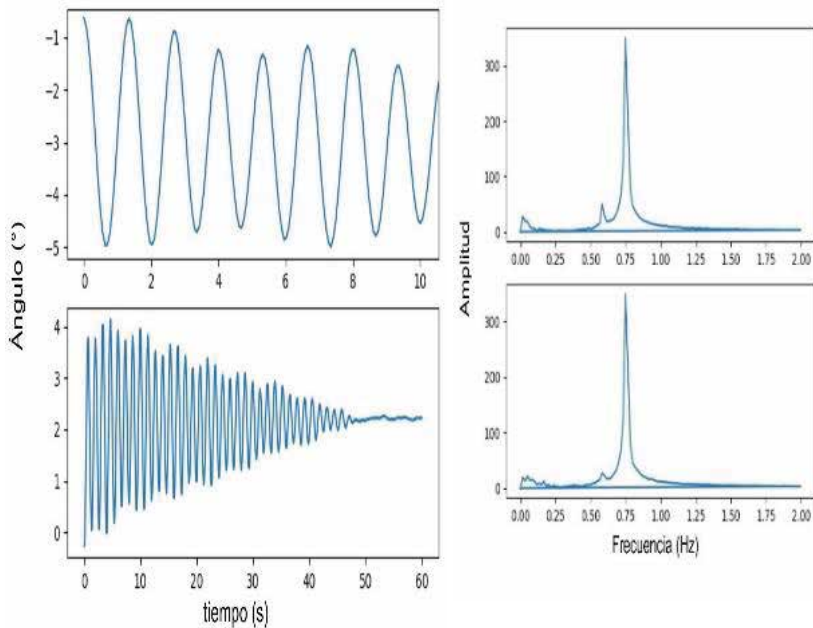


Fig. 6. Medida 1. Configuración contra fase.

La frecuencia obtenida para la medida 1 de la configuración en contrafase fue de 0.78255078 Hz. En la Fig. 6. se ve que el tiempo requerido para que el sistema disipe la energía es inferior a los 50 segundos, lo cual implica un aumento considerable en la velocidad que disipó la energía del sistema en esta medida, en comparación con las medidas en fase. Este hecho también lo explica la teoría, ya que esta predice que los modos normales de oscilación con mayor frecuencia disiparán energía más rápido.

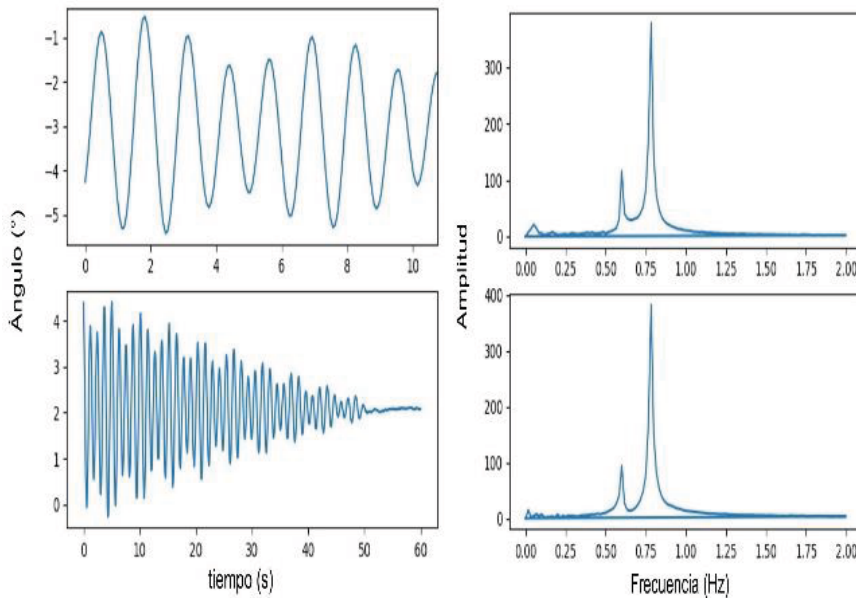


Fig. 7. Medida 2. Configuración contra fase.

Las gráficas de la posición angular en función del tiempo mostradas en la Fig. 7., parecieran hacer ver que el sistema tiene un comportamiento de cierto modo pulsado, es decir, que tiene contribución de no solamente un modo normal de oscilación. Este hecho lo confirma la gráfica de la transformada de Fourier, que muestra un segundo pico de tamaño nada despreciable, lo cual implica que, efectivamente, el sistema posee una contribución de ambos modos normales de oscilación (fase y contrafase).

Como un segundo ejercicio, se retiró un péndulo de su posición de equilibrio y luego se liberó desde el reposo. De esta manera, se excitaron en el sistema simultáneamente los dos modos de oscilación, lo que conlleva a que cada péndulo describa oscilaciones pulsantes, como se muestra en la Fig. 8.

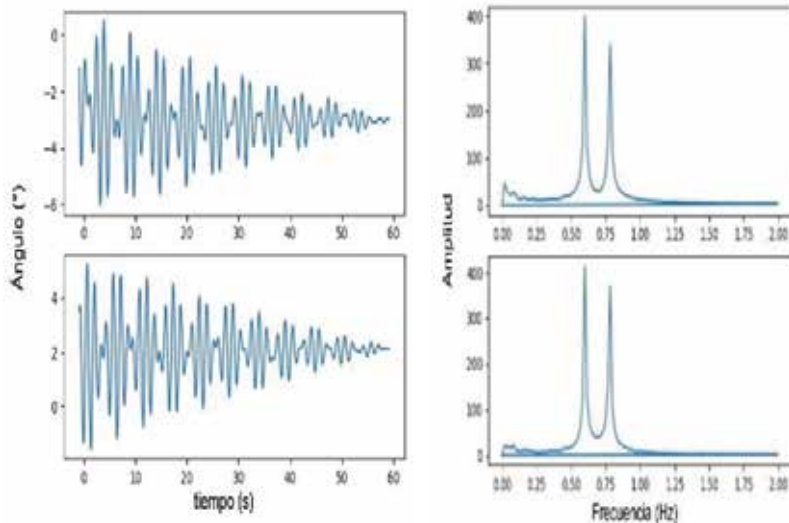


Fig. 8. Medida 1. Configuración en pulsaciones.

Es importante notar que la gráfica de la transformada de Fourier muestra dos picos de similar tamaño, lo cual confirma que se logró obtener un movimiento pulsado, donde se da la contribución casi por igual de los dos modos normales de oscilación. Para esta configuración, se pudo calcular un factor de calidad promedio de 273. También las frecuencias propias fueron 0.59940060 Hz.

III. CONCLUSIONES

Se construyó un sistema de péndulos acoplados que posee un factor de calidad de 273.504. Este valor es bueno, teniendo en cuenta la cantidad de medidas que puede realizar este sistema en el tiempo que dura oscilando.

Asimismo, se diseñó la instrumentación, a un costo económico muy bajo, de un montaje que permite el análisis, paso a paso, del comportamiento del sistema, puesto que mide el ángulo en función del tiempo, lo cual es indispensable para cálculos como el del coeficiente de amortiguamiento, y guarda los datos medidos en un archivo.

Se desarrolló un aplicativo en el software computacional Python, que permite controlar el tiempo que se desea medir y realizar la gráfica del ángulo medido en función del tiempo. Además, se puede realizar la transformada de Fourier

de la última medida del ángulo en función del tiempo, y brinda los valores en frecuencia (frecuencias normales del sistema) de los máximos de amplitud, para determinar los modos de oscilación.

REFERENCIAS

- [1] D. L. V. Sánchez, “Los tipos de trabajo práctico experimental como herramientas para mejorar las prácticas”, *PPDQ Boletín*, p. 48, 2011.
- [2] E. J. C. Madera y T. A. Vizoso, “Clasificación de las prácticas de laboratorio de Física”, *Pedagogía Universitaria*, vol. 6 no. 2, 2001.
- [3] E. A. Espinosa-Ríos, K. D. González-López y L. T. Hernández-Ramírez, “Las prácticas de laboratorio: una estrategia didáctica en la construcción de conocimiento científico escolar”, *Entramado*, vol. 12, no. 1, pp.266-281, 2016.
- [4] J. C. Mosquera-Mosquera, P. A. Ruiz-Ochoa y L. A Muñoz, “Oscilaciones y Ondas”. Edi Elizcon, Armenia 2008.
- [5] A. Guerrero, “Péndulos acoplados mecánica clásica”, 2013. Disponible en: <https://es.scribd.com/doc/164641249/Pendulos-acoplados>.
- [6] L. Llamas, “Cómo usar un acelerómetro en nuestros proyectos de Arduino.” (2018, septiembre 25). [Online]. Disponible en: <https://www.luisllamas.es/como-usar-un-acelerometro-arduino/>.
- [7] L. Llamas, “Cómo usar un giroscopio en nuestros proyectos de Arduino”. (2018, septiembre 25). [Online]. Disponible en: <https://www.luisllamas.es/como-usar-un-giroscopio-arduino/>.
- [8] Tr4nsduc7or. “Tutorial de Arduino y MPU-6050.” (2018, noviembre 11). [Online]. Aavailable: <https://robologs.net/2014/10/15/tutorial-de-arduino-y-mpu-6050/>.

- [9] H. E. Leyton, “Incorporación de simuladores en el diseño de una unidad didáctica para la enseñanza y aprendizaje del tema movimiento oscilatorio desde la articulación de los conceptos físicos, el modelamiento matemático y sus aplicaciones”. Tercer Encuentro Internacional sobre la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Católica de Pereira, 2015, pp. 197 - 215

Edwin Orlando Espinel Munévar

Egresado de Programa de Física de la Universidad del Quindío 2019. ORCID: 0000-0001-7707-1147

Áreas de investigación: Instrumentación física, enseñanza de la física.

Julio César Mosquera Mosquera

PhD en Física de la Universidad Estatal de Moscú M.V.

Lomonosov en el año 2008. Docente de planta de la Universidad del Quindío desde el año 2008. Director de Programa de Física de la Universidad del Quindío en los años 2016-2018. Vinculado al grupo de investigación “Optoelectrónica” del Instituto Interdisciplinario de las Ciencias de la Universidad del Quindío, el cual se encuentra en categoría A en Colciencias. Par evaluador reconocido por Colciencias. Investigador Asociado (I) (con vigencia hasta 2019-12-05) - Convocatoria 781 de 2017. ORCID: 0000-0001-7874-0736

Áreas de investigación: Instrumentación física, enseñanza de la física, acusto - óptica, procesamiento de imágenes.