



APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN DE VARIABLE REAL DESDE SUS DIFERENTES REPRESENTACIONES USANDO GEOGEBRA¹

Learning the concept of real variable function
from its different representations using
GeoGebra

S. Quintero², F. N. Jiménez³

1 El trabajo se enmarca en un trabajo de la Maestría en Enseñanza de las ciencias exactas y naturales de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales

2 Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, sergiovivaz@gmail.com.

3 Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, Universidad Autónoma de Manizales, código ORCID <https://orcid.org/0000-0003-1546-8426>, francy@autonoma.edu.co.

Resumen

La tecnología, como mediadora para la representación de conceptos matemáticos, ha sido un tema preponderante en el campo de la educación matemática durante los últimos años. En este trabajo se diseñó e implementó una estrategia para el aprendizaje del concepto de función haciendo uso del software GeoGebra con estudiantes de grado décimo de una institución educativa de Colombia. Se realizó un test inicial para la identificación de obstáculos en el aprendizaje del concepto de función, posteriormente una serie de actividades para propiciar la adquisición del concepto matemático y, por último, un test final que buscaba identificar los progresos y avances obtenidos por parte de los estudiantes con la implementación de esta estrategia. Se tomó como base principal la teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval para determinar cómo el uso de GeoGebra posibilita el aprendizaje del concepto de función de variable real desde sus diferentes representaciones. Se obtuvo un balance positivo en la adquisición del concepto, dado que el uso del software facilitó el entorno adecuado para la conversión y transformación de los diferentes registros de representaciones.

Palabras clave

Aprendizaje, función, GeoGebra, representaciones semióticas, variable real.

Abstract

Technology as a mediator for the representation of mathematical concepts has been a predominant topic in the area of mathematical education in recent years. In this work, a strategy for the learning of the concept of function was designed and implemented using GeoGebra software with tenth grade students of an educational institution in Colombia, in which an initial test was carried out to identify difficulties or obstacles in the Learning the concept of function, then a series of activities to promote the acquisition of the same concept and finally a final test that sought to identify the progress and advances made by students in the implementation of this strategy, it is ok to highlight that it was carried out based on the theory of semiotic representations of Raymond Duval and where it was sought to answer the big question, how can the use of GeoGebra enable the learning of the concept of real variable function from its different representations? In which a positive balance was obtained in the acquisition of the concept given that the use of the software facilitated the appropriate environment for the coordination of the different records of representations of the same concept.

Keywords

Function, semiotic representations, GeoGebra, Learning.

I. INTRODUCCIÓN

Dado que la tecnología juega un papel importante en muchos campos del conocimiento, dentro de los cuales está el campo de la educación matemática, surge la propuesta de implementar GeoGebra para abordar el concepto de función a través de sus representaciones.

Uno de los referentes centrales en la teoría de representaciones es Raymond Duval, pues gracias a sus resultados en educación matemática, dentro de los cuales se encuentra el uso de las representaciones semióticas en el proceso de aprehensión de objetos matemáticos, se ha llegado a comprender que “el entendimiento de un concepto matemático requiere de las conversiones y transformaciones de sus diferentes registros” [citado en Bello, 1, p. 15].

A partir de los planteamientos de Duval se definen tres actividades principales para llevar a cabo el proceso de aprendizaje. La primera es la formación de una representación en un registro dado, la cual constituye el conjunto de marcas perceptibles que permiten dar forma a la representación de un objeto en un sistema determinado. La segunda es el tratamiento de una representación, que es la transformación interna de la representación dentro del mismo registro en el que ha sido formada. La tercera es la conversión de una representación, es decir, la transformación de la representación en una diferentes, de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial [2].

Un ejemplo de estas tres actividades se registra en la Tabla I:

TABLA I. CÁLCULO DE VOLÚMENES.	
El volumen de un cubo es 1000 unidades cúbicas, ¿Cuál es la medida de sus lados?	
Conversión (cambiando el registro, sin cambiar el objeto) $1000 = l^3$	Tratamiento (transformación conservando el mismo registro) $1000 = l^3$ $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{l^3}$ $10 = l$

Duval establece: “Sólo podemos trabajar en y desde representaciones semióticas, porque son temas de procesamiento. Al mismo tiempo, debemos poder activar en paralelo dos o tres registros de representaciones” [Citado en Vega, 3, p. 24], entendiendo la diferencia entre el objeto y sus representaciones, para la adquisición de algún concepto, en este caso, el de función.

Se plantea entonces como objetivo de este trabajo, desarrollar una estrategia didáctica para el aprendizaje del concepto de función a través de sus diferentes representaciones, usando como herramienta principal el software GeoGebra.

II. METODOLOGÍA

Este trabajo tiene un enfoque cuantitativo y se realizó dentro de un diseño pre – experimental. Como técnicas e instrumentos, se aplicó: un test de entrada, con el propósito de identificar ideas previas y determinar dificultades de aprendizaje en los estudiantes acerca del concepto de función; tres guías para el uso de GeoGebra y cuatro actividades que les permitieron a los estudiantes movilizarse por las distintas representaciones del concepto de función, con el uso de GeoGebra; un test de salida para evaluar lo aprendido durante la estrategia implementada, aplicado sin el apoyo de GeoGebra; y, por último, un test con escala Likert para analizar el grado de satisfacción y las diferentes apreciaciones de los estudiantes en la implementación de la estrategia.

El diseño y estructuración de los recursos implementados con los estudiantes (test, guías, actividades) se construyó con base en los aportes de la teoría de las representaciones de Duval, y se enfocaron en posibilitar el aprendizaje del concepto de función, por medio de la coordinación de sus diferentes registros de representación.

El espacio de la investigación fue el Colegio Salesiano San Medardo de la ciudad de Neiva; la unidad de trabajo estuvo conformada por 29 estudiantes de grado décimo, con quienes se trabajó durante el año 2018.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis de los resultados del test inicial evidenció algunos obstáculos para el aprendizaje del concepto de función. En este sentido, se encontró que los estudiantes:

- Presentan dificultades en el reconocimiento de las diferentes representaciones de un objeto matemático, en este caso, de una función.
- Desconocen la relación de dependencia e independencia entre las variables de una función real.
- No relacionan el dominio de una función con su representación verbal, el cual en algunas ocasiones restringe el mismo.
- Realizan lecturas acertadas de representaciones gráficas de una función, pero cuando se pide interpretar la gráfica, asociándola al dominio, menos de la mitad del grupo logra hacerlo de una forma adecuada.
- Desconocen el concepto de función de manera total o parcial, y tampoco logran identificar sus elementos.

Durante el proceso de implementación de las guías y actividades, los estudiantes realizaron procesos de tratamiento y conversión de las diferentes representaciones en situaciones que involucran funciones de variable real, con el apoyo de GeoGebra como mediador en el proceso.

Actividad de aprendizaje 1:

Los resultados de la pregunta 1 muestran que el proceso de conversión algebraico – gráfico es un apoyo importante para los estudiantes, ya que debían determinar cuáles representaciones algebraicas correspondían a relaciones funcionales y cuáles no, utilizando el criterio de recta vertical con ayuda de Geogebra. Además, debían justificar de forma verbal su respuesta. Un total de 23 estudiantes respondió los 6 ítems que la componían acertadamente, y 6 erraron en uno de los ítems.

Algunas justificaciones sobre cuándo no es una relación funcional se mencionan a continuación: 7 estudiantes lo hacen con un nivel de comprensión alto: *“No es función porque le corresponden dos elementos al mismo punto”*; 19 con un nivel de comprensión medio, ya que justifican basados en lo que perciben gráficamente: *“La figura se corta en dos puntos”*; y 3 no justifican con claridad: *“Porque los elementos no repiten los elementos del dominio”*.

En la pregunta 2, los estudiantes debían escribir 5 expresiones algebraicas que representaran funciones; se obtuvieron buenos resultados, los cuales se presentan en la Fig. 1.

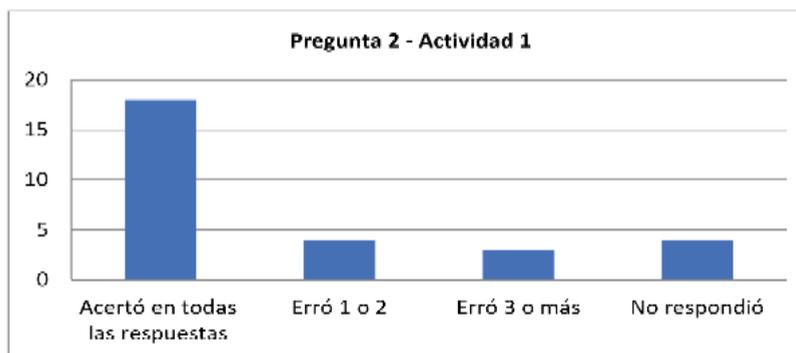


Fig. 1. Expresiones algebraicas

Vale la pena aclarar que los procesos de conversión se realizaron con GeoGebra, un software que facilita esta operación, ya que según Duval [citado en Bello, 1], la conversión de las representaciones semióticas se constituye en la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de alcanzar para la gran mayoría de los alumnos.

Actividad de aprendizaje 2:

En los resultados de la pregunta 2, cuyo objetivo fue desarrollar el proceso de conversión tabular – algebraico y justificar si la tabla representa una función, se observa que solo un estudiante no logró realizar este proceso; en cuanto a si la tabla representaba una función o no, todos respondieron acertadamente. A pesar de que no se les solicita hacer la gráfica, la mayoría de los jóvenes recurre a este registro para justificar su respuesta.

Algunos de sus comentarios son: *“Porque si ponemos la recta perpendicular en cualquier parte del eje x esta toca a la gráfica en una sola parte”*, lo que muestra que el criterio de la recta vertical facilita la identificación de las relaciones funcionales y no funcionales; algunos estudiantes infieren más allá del gráfico y justifican con mayor claridad: *“Cada elemento llega a un único punto y todos los valores tienen pareja”*.

En la pregunta 2 que pide relacionar la tabla de valores con su respectiva expresión algebraica, es decir, conversión tabular – algebraica, los estudiantes realizan la gráfica de cada una de las coordenadas de las tablas en el plano cartesiano, y luego la gráfica de las expresiones algebraicas. También verificaron la pertenencia de esas coordenadas a cada gráfico y establecieron las relaciones correspondientes. Todos los estudiantes respondieron acertadamente, además argumentaron por qué cada expresión es una función, o no.

Actividad de aprendizaje 3:

En la pregunta 3 se pide solucionar una serie de problemas asociados a distintos tipos de funciones que modelan de forma verbal situaciones de la vida real, como se muestra a continuación.

En un punto se solicita a los estudiantes que, con la información del enunciado, respondan qué ocurre después de ciertos tiempos establecidos; aproximadamente el 90% respondió de manera correcta, y 80% recurre a la representación tabular de la situación (aunque el ejercicio no lo solicitaba), lo cual muestra un proceso de conversión verbal – tabular, como se observa en la Fig. 2.

X	y
0	72
2	36
4	108
6	324
8	972

X	y
0	72
4	108
6	324
8	972

t	No Bacterias
4	108
6	324
8	972

Fig. 2. Ejercicio de tabulación

Antes de esta actividad, los estudiantes aprendieron a utilizar el comando «Ajuste Base Exp» de GeoGebra, el cual se sugiere emplear para encontrar la expresión algebraica que modela la situación enunciada, es decir, realizar la conversión verbal – gráfico – algebraico; solo 3 estudiantes no logran hacerlo.

Pese a que los procesos de conversión son apoyados por GeoGebra, los estudiantes muestran mayor solvencia para realizar cambios de registros, ya sea recurriendo a la aplicación o no, lo cual es muy importante, ya que “dominar un concepto matemático requiere conocer y reconocer sus principales representaciones, para así convertirlas o traducirlas de un modo a otro” [4, p. 2117].

Algunas preguntas tuvieron la intención de que los estudiantes comprendieran que, cuando una función está ligada a una representación verbal asociada a un problema de la vida cotidiana, el dominio debe restringirse para que se ajuste a dicha representación. El 59% acertó en las respuestas, lo cual deja ver que la identificación del dominio es aún un problema para los estudiantes.

En una de las preguntas debían seleccionar la gráfica que mejor representara la situación descrita (tarifa de los automóviles) en las preguntas inmediatamente anteriores, y todos los estudiantes seleccionaron la representación correcta; esto muestra que, pese a que en el momento de realizar operaciones algebraicas presentan cierto tipo de confusión o dificultad, tienen claridad al identificar la gráfica más adecuada.

Además, al solicitarle a los estudiantes determinar si la situación descrita representa una función, todos respondieron correctamente que sí, y justificaron su respuesta, situación que evidencia la apropiación del concepto de función porque dieron, en su mayoría, justificaciones elaboradas: *“Porque todos los puntos de x tienen donde llegar”*. *“Si ponemos una recta perpendicular a x tocaría solamente en un punto”*, y *“Porque todos los puntos de x de tiempo tienen a donde llegar”*.

Posteriormente, se pidió realizar un bosquejo de gráfica que representara la situación descrita en las preguntas anteriores (conversión Verbal–Gráfica); todos los estudiantes elaboraron un bosquejo adecuado, como los que se muestran en la Fig. 3.

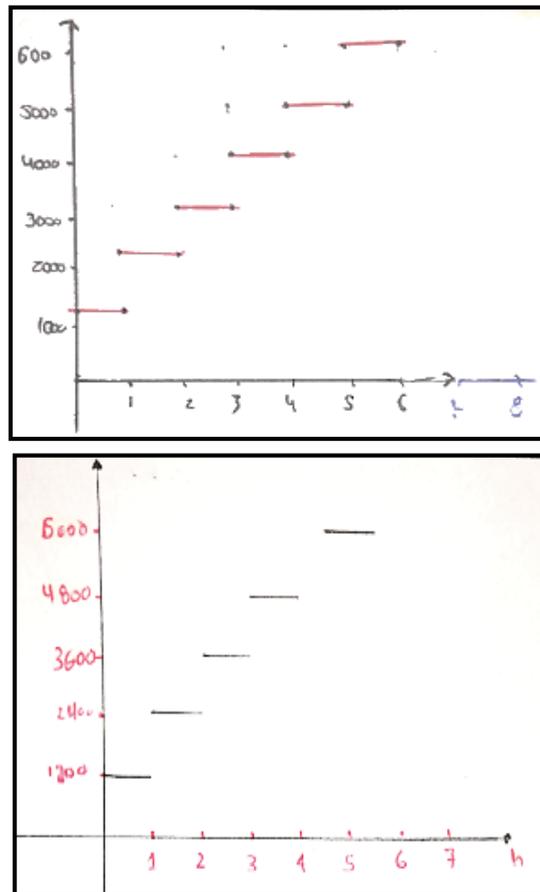


Fig. 3. Representaciones gráficas elaboradas por los estudiantes.

Resultados test final

En cuanto a la identificación del dominio de una función, el 81% respondió satisfactoriamente, un resultado positivo ya que en el test inicial menos de la mitad de los estudiantes (41%) respondió de modo correcto. También se resalta que de estos, el 90% justificó bien la respuesta con afirmaciones como: *“Porque la gráfica solo muestra por libra”*,

“la fracción no tiene precio, x debe ser entero”, *“porque solo viene por libras completas”*.

En una de las preguntas se pidió a los estudiantes completar una tabla relacionada con una expresión algebraica, y una descripción verbal; el 55% la completó en su totalidad, y el 24% completó un 80% de la tabla. En otra

pregunta, los estudiantes debían realizar una tabla y un gráfico representando la situación: el 72% realizó el gráfico de forma adecuada, como en los dos ejemplos que se muestran en la Fig. 4.

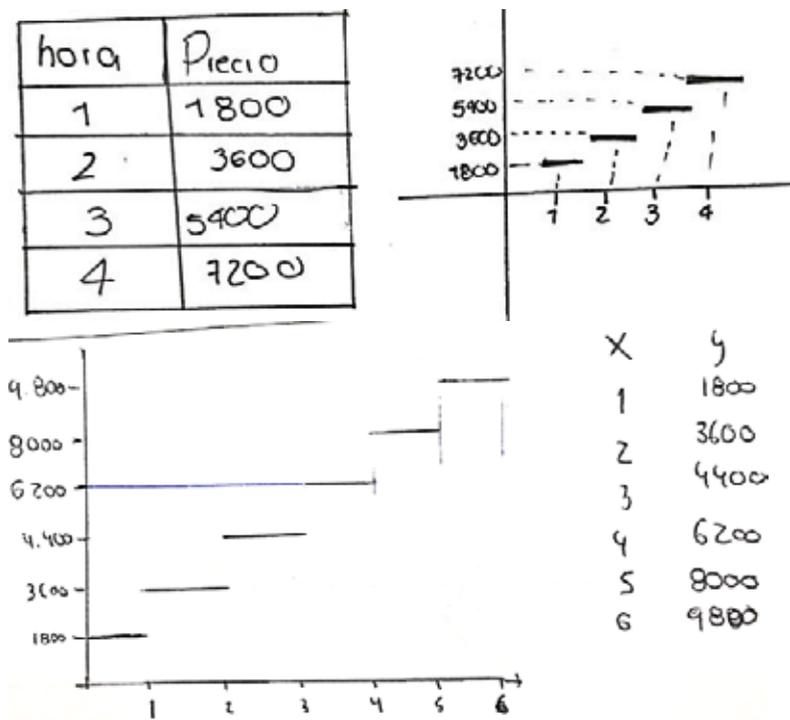


Fig. 4. Construcción de gráficos

Asimismo, los estudiantes debían responder si la situación era o no función: 26 de 29 estudiantes acertó al responder sí, pero cuando debían especificar cuál era el dominio y el rango de dicha función, solo 5 estudiantes respondieron adecuadamente, lo que deja en evidencia que aún existen dificultades para identificar estas partes de la función. La misma situación se presentó en otra de las preguntas, ya que la actividad pedía a los estudiantes que después de mirar la gráfica de una serie de funciones, determinarían sus respectivos dominios y rangos. Los resultados se muestran en la Fig. 5.

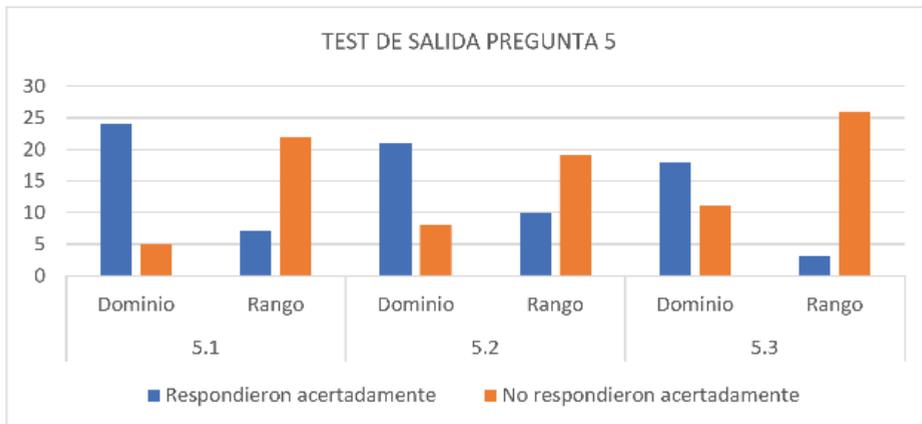


Fig. 5. Identificación de las partes de la función.

En la pregunta 6, se les presentó a los estudiantes una serie de situaciones descritas de forma verbal; estos debieron realizar el proceso de conversión Verbal – Algebraica y determinar su dominio. Los resultados se muestran en la Fig. 6.

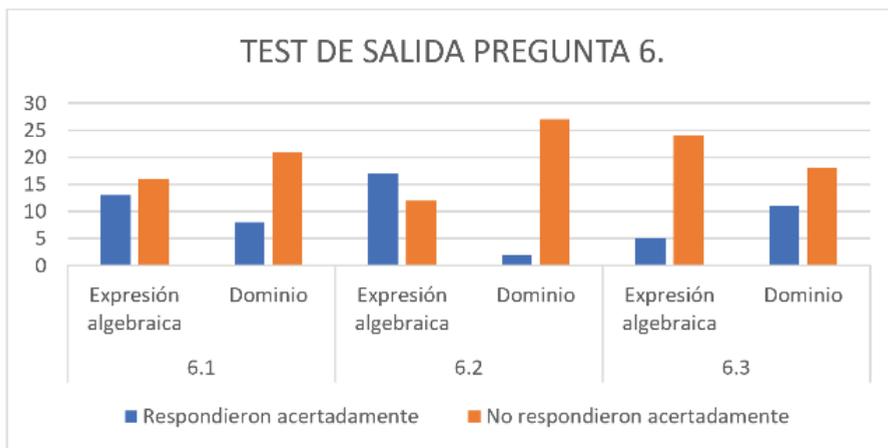


Fig. 6. Expresión algebraica.

Aunque los resultados no son los mejores, se observa una evolución positiva con respecto a algunas de las actividades anteriores, teniendo en cuenta que los estudiantes no están haciendo uso de la herramienta GeoGebra.

En cuanto a elaborar una definición del concepto de función, solo 4 de los 29 estudiantes lo hizo de manera aceptable; 5 estudiantes presentan confusión entre el concepto y la comprobación gráfica del mismo (posiblemente generada por las actividades anteriores), lo que se evidencia en los textos que escribieron, como los siguientes: *“Es una función la gráfica la cual solo se toca en un punto si se pusiese una recta perpendicular a X”*; *“Una función se da cuando hay una recta perpendicular que corta en un solo punto”*. Dentro de las definiciones que dieron los estudiantes se resaltan las más completas: *“Cuando un número del eje X tiene un solo representante en el eje Y”*; *“Es aquello donde X tiene una sola imagen, pero se repite todas las veces que quiera”*.

IV. CONCLUSIONES

El uso de GeoGebra facilitó la implementación del criterio de la recta vertical para identificar cuándo una relación es funcional o no, pero también generó confusión con respecto al concepto de función, ya que al solicitar a los estudiantes dar su definición, se apoyaron en dicho criterio para hacerlo.

El apoyo de GeoGebra en el proceso de conversión de registros de representación semiótica del concepto de función fue positivo para la identificación de las funciones de variable real y sus partes.

La coordinación de los diferentes registros del concepto de función se llevó a cabo con mayor facilidad con la implementación de recursos tecnológicos, y una prueba de esto es que el 76% de estudiantes fue capaz de realizar gráficas de situaciones reales sin el uso de GeoGebra, restringiendo su dominio de acuerdo con el caso, e incluso en aquellas donde se involucraban funciones a trozos.

Se presentó durante toda la estrategia una dificultad marcada en la mayoría de los estudiantes a la hora de justificar por escrito los procedimientos o respuestas dadas en las diferentes actividades.

A pesar de que se evidenció la superación de las dificultades identificadas en el test inicial en la mayoría de los estudiantes, algunas persisten, incluso después de haber terminado la implementación de la estrategia.

La identificación del dominio de las funciones de las diferentes situaciones funcionales presentadas en el test de salida no fue óptima, particularmente en aquellas donde no había representaciones gráficas, dado que este registro es al que más acuden los estudiantes. Se requiere seguir trabajando en este elemento de concepto.

El registro al que en mayor proporción acudieron los estudiantes en las diferentes actividades fue el gráfico, el cual, en casi todos los

casos, se usó como puente para transitar hacia los demás registros.

La implementación de recursos tecnológicos

dentro del aula de clases impacta de forma positiva en el interés de los estudiantes, lo que facilita el proceso de enseñanza, en este caso, el del concepto de función.

REFERENCIAS

Ballés., “Geogebra y los sistemas de representación semióticos”, en *Uso de los recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas*, 2014, p. 2200.

Autor 1: Sergio Mauricio Quintero Dussan.

Licenciado en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana, estudiante de Ingeniería Industrial, de la Universidad Corhuila, y de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales. Docente de básica y media académica de matemáticas. Es actualmente docente de secundaria.

Áreas de investigación: Educación.

Autor 2: Francy Nelly Jiménez García

Ingeniera Química, Magíster en Ciencias Física; Doctora en Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, y Especialista en Computación para la Docencia de la Universidad Antonio Nariño. Es actualmente coordinadora del Departamento de Física y Matemáticas y líder del



Grupo de Investigación en Física y Matemática con énfasis en la formación de ingenieros de la Universidad Autónoma de Manizales.

Áreas de investigación: Didáctica de la física y la matemática, crecimiento y caracterización de materiales de ingeniería, energía solar.