

LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL DESARROLLO DE PROCESOS GENERALES ASOCIADOS AL PENSAMIENTO VARIACIONAL Y LOS SISTEMAS ALGEBRAICOS¹

The solution of problems in the development
of general processes associated with
variational thinking and algebraic systems

Iván Sánchez², Jaider Figueroa³

-
- 1 Producto derivado del trabajo final de Maestría en Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Caldas.
 - 2 I.D. Sánchez estudiante de Maestría en Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Caldas, Manizales (Colombia); email: ivansanchez14@gmail.com.
 - 3 J.A. Figueroa docencia en el Departamento de Matemáticas, de la Universidad Nacional de Colombia y Universidad de Caldas, Manizales (Colombia); email: jafigueroaf@unal.edu.co.

Resumen

En este trabajo se propone contribuir al fortalecimiento de procesos generales del pensamiento matemático como el razonamiento, la comunicación de ideas y la modelación, los cuales están asociados al pensamiento variacional, a través de la solución de problemas y el uso de distintas formas de representación. Para esto se realiza una investigación de tipo cualitativo-descriptivo, la cual busca analizar y describir los avances o dificultades de los estudiantes en lo relacionado con el fortalecimiento de los procesos generales mencionados. La metodología para llevar a cabo este proyecto se basa en el desarrollo de actividades de aprendizaje basadas en problemas que son llevadas al aula de clase, las cuales consisten en talleres que se desarrollan en tres momentos: actividades de familiarización, actividades de entrenamiento y actividades de culminación, según la propuesta sugerida por Ausubel de aprendizaje significativo [1]. Entre los resultados que se obtuvieron se destaca el fortalecimiento de habilidades en la comunicación, el razonamiento y la modelación de situaciones problema, pues se observó que los estudiantes reconocieron y aplicaron distintos tipos de representación semiótica en la solución de los problemas de variación planteados.

Palabras clave

Comunicación de ideas, generalización, modelación, pensamiento variacional, razonamiento, situación problema.

Abstract

In this paper it is proposed to contribute to the strengthening of general processes of mathematical thinking such as reasoning, idea communication and modeling, which are associated with variational thinking, through the solution of problems and the use of different forms of representation. For this, a research of qualitative-descriptive type is carried out, which seeks to analyze and describe the advances or difficulties of the students in relation to the strengthening of the general processes mentioned. The methodology to carry out this project is based on the development of learning activities based on problems that are taken to the classroom, which consist of workshops that are developed in three moments: familiarization activities, training activities and activities culmination according to the proposal suggested by Ausubel of significant learning [1]. Among the results obtained were the strengthening of skills in communication, reasoning and modeling of problem situations, as it was observed that the students recognized and applied different types of semiotic representation in the solution of the problems of variation proposed.

Keywords

Communication of ideas, generalization, modeling, variable thinking, reasoning, problem situation.

I. INTRODUCCIÓN

Gracias al pensamiento, el ser humano comprende el mundo, orienta su vida y fundamenta sus decisiones y esto lo hace enfrentándose a una pequeña porción del universo en la cual lucha por sobrevivir, tratando de entenderlo de una manera coherente. Para esta tarea, el mejor instrumento es la razón apoyada en la lógica y en las habilidades de pensamiento que se desarrollan en cada una de las etapas de la vida, lo cual conlleva a que los seres humanos debamos enfrentar múltiples situaciones que nos permiten relacionarnos con el medio y los seres que nos rodean.

Para esto, la educación nos brinda múltiples posibilidades, entre ellas, la de formarnos como individuos competentes y capaces de responder a las necesidades de la sociedad actual.

Hoy en día, la educación debe responder a los desafíos tecnológicos y científicos que la sociedad plantea, y para esto en especial la educación matemática cumple un papel predominante [2].

A los docentes, cuya función es orientar metodológicamente los procesos y construir en conjunto con los estudiantes el aprendizaje, nos corresponde, tal como lo expresa el decreto 1278 de 2002 en su artículo 4: “el diagnóstico, la planificación, la ejecución y la evaluación de los mismos procesos y sus resultados, y de otras actividades educativas”. Pero en esta función docente tenemos una doble responsabilidad que consiste, por un lado, en alcanzar y sobrepasar las exigencias de calidad que se enfocan generalmente en los dos principales actores del proceso (docentes y estudiantes), y por el otro, proporcionar estrategias didácticas que promuevan la motivación en los estudiantes para la orientación de temáticas propias de las ciencias exactas que como vemos en nuestra cotidianidad, generan cierto grado de desinterés para la mayoría de alumnos.

En este sentido se propone la solución de problemas en el desarrollo de procesos generales asociados al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos, con la intención de contribuir al fortalecimiento de procesos generales como el razonamiento, la comunicación de ideas y la modelación, a partir de un análisis y descripción de los avances o dificultades de los estudiantes en lo relacionado con dichos procesos generales ligados al pensamiento variacional. Esto se enmarca en las directrices nacionales del Ministerio de Educación, según los lineamientos curriculares de matemáticas, los estándares básicos de competencia y, por último, los derechos básicos de aprendizaje [3].

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

A. Preliminares

Los lineamientos curriculares en matemáticas proponen desarrollar en los estudiantes los cinco tipos de pensamiento matemático: numérico, variacional, geométrico, métrico y aleatorio; y en este sentido, el presente trabajo aporta a la construcción de un aprendizaje significativo pues busca desarrollar el pensamiento variacional y analítico a partir del uso de diversos sistemas de representación y lograr que el estudiante realice generalizaciones usando el enfoque problémico [3].

La investigación que se presenta en este proyecto es importante, además porque:

- Permite buscar estrategias para desarrollar el pensamiento variacional en estudiantes de grado octavo de la educación básica.
- Busca que el estudiante sea matemáticamente competente lo cual estimula el pensamiento lógico y el razonamiento.
- Desarrolla la capacidad de resolver problemas en un contexto matemático a partir de distintas generalizaciones.
- Logra que, en la educación matemática en el nivel básico, los estudiantes no solo adquieran conocimientos, sino que afiancen competencias de interpretar, representar, formular, ejecutar y argumentar sus conocimientos matemáticos en el contexto tanto escolar como cotidiano.
- Desarrolla en forma específica el pensamiento variacional partiendo de diversas actividades para la identificación de un patrón, formulación de conjeturas y generalización.

El pensamiento variacional y el enfoque problémico que son la base del presente trabajo, son sustentados por el MEN [3] en sus lineamientos curriculares pues se propone que: “El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica”.

Los lineamientos y estándares curriculares propuestos por el MEN buscan dar orientaciones a la comunidad educativa para construir propuestas académicas con las estructuras básicas de los saberes de la matemática (como lo propone el MEN en los derechos básicos de aprendizaje), y se complementan con los lineamientos de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) en cuanto a las pruebas PISA, las cuales buscan ofrecer información abundante y detallada que permite a los países adoptar decisiones y políticas

públicas para mejorar los niveles educativos de las instituciones. Este trabajo busca seguir las tendencias actuales en educación y aprovechar la calidad y riqueza de los datos obtenidos y de los procesos globales que se enfocan en mejorar las políticas educativas [4] [5].

B. Indagación Bibliográfica

A continuación, se especifican diversos aportes, definidos como teorías científicas que enriquecen el sentido conceptual y procedimental del presente proyecto investigativo, se hace énfasis en diversas teorías del aprendizaje que dan muestra de los múltiples elementos que se deben aplicar en el contexto para hacer más enriquecedora cada una de las prácticas pedagógicas.

Inicialmente se parte de la teoría del aprendizaje significativo para la cual son numerosos los cambios positivos que ha generado el vertiginoso progreso del ser humano, debido al enriquecimiento conceptual y práctico que ha adquirido para afrontar y perfeccionar las dinámicas de la vida en busca de la transformación de la realidad, por lo cual ha sido creciente su deseo por conocer que elementos son claves al momento de hablar del aprendizaje pues es gracias a su adquisición, investigación y práctica que se busca evolucionar en los distintos aspectos en que se desenvuelve.

Durante mucho tiempo se consideró que el aprendizaje era sinónimo de cambio de conducta, porque dominó una perspectiva conductista de la labor educativa; sin embargo, se puede afirmar con certeza que el aprendizaje humano va más allá de un simple cambio de conducta, conduce a un cambio en el significado de la experiencia [6].

Por tanto, la perspectiva que se tiene de la adquisición del saber se ha transfigurado de acuerdo con los mismos cambios sociales que ha experimentado la sociedad, en la medida en que ya no solo se relaciona la adquisición del saber con el aprender a adaptarse al entorno y llevar a cabo mecanismos para subsistir, sino que se promueven procesos mentales que permiten a la persona encontrar las habilidades que puede desarrollar en su formación integral.

Ausubel [6] expresa que el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, debe entenderse por "estructura cognitiva", al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización.

En efecto, el aprendizaje significativo en el contexto matemático y específicamente en el pensamiento variacional se debe manejar de una forma complementaria, donde no se dejen a un lado los conceptos previos que pueden enriquecer el proceso, así como la comprensión del nuevo aprendizaje y la correspondencia de sistemas de representación como gráficas, símbolos, datos algebraicos, representaciones geométricas, fórmulas y tablas en el análisis de variaciones, lo que fomenta la construcción de aprendizajes perdurables.

Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que “las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición [1].

Por otro lado, este proyecto tiene en cuenta el enfoque problémico, en el cual es importante resaltar que el ser humano en su cotidianidad se encuentra expuesto a situaciones problema que traen consigo diversas variables y factores que repercuten de forma significativa en su entorno inmediato. Por lo tanto, el ser humano demanda la aplicación de habilidades para saber cómo afrontar dichas situaciones; es ahí donde entra en juego la perspectiva contextual de la educación y el rol de docente para guiar al alumno a saber afrontar determinadas situaciones problema en un contexto matemático o cotidiano.

Frente a lo anterior, cabe citar el valioso aporte de Paulo Freire [7], quien da una perspectiva de cómo debe ser el pensamiento del educador para el desarrollo de dicha teoría: “Enseño porque busco, porque indagué, porque indago y me indago. Investigo para comprobar, comprobando intervengo, interviniendo educo y me educo. Investigo para conocer lo que aún no conozco y comunicar o anunciar la novedad”.

En el caso específico de las matemáticas, en el manejo de conceptos del pensamiento variacional es indispensable conocer las demandas de la sociedad, en la medida en que se deben generar procesos reflexivos en los que se estimule el proceso de enseñanza y aprendizaje con base en situaciones problema que partan de situaciones existentes y permitan un detallado análisis de variaciones y representaciones. Esto desarrolla la lógica, el razonamiento y una versatilidad conceptual que le ayuda al estudiante en su formación personal y desempeño en la sociedad:

La metodología del aprendizaje basado en problemas concibe al estudiante como un sujeto activo, por lo que debe realizar una actividad para poder apropiarse del conocimiento, y con ello desarrollar su intelecto. Es importante precisar que el estudiante, junto con el conocimiento, hace que la enseñanza problémica permita asimilar métodos y procedimientos, acercándolos al desarrollo de la lógica de la actitud científica y a la formación en la investigación [8].

El presente trabajo también se basa en la teoría de la cognición situada, que parte de una fuerte crítica a la manera cómo la institución escolar intenta promover el aprendizaje. En particular, cuestiona la forma en que se enseñan aprendizajes declarativos abstractos y descontextualizados, conocimientos inertes, poco útiles y escasamente motivantes, de relevancia social limitada. De esta manera, la teoría de la cognición situada parte de la trascendencia que representa el contexto en el que se desenvuelve y las características situacionales, lo cual es clave en el área de matemáticas y en el desarrollo de los diversos pensamientos como el variacional. Es necesario partir de elementos gráficos y datos en situaciones problémicas con un propósito claro en un contexto práctico, lo cual promueve que los aprendizajes sean perdurables y se comprenda su utilidad al relacionarlos con el contexto [9].

Se tiene en cuenta también la teoría de representaciones semióticas, de Duval, la cual toma en cuenta las representaciones semióticas que desempeñan un papel preponderante en el aprendizaje de las matemáticas, en el sentido en que convergen y son determinantes en la estructuración de las representaciones mentales del sujeto, dándose un proceso de traducción de la información, en el cual se utilizan múltiples recursos simbólicos y representativos para plasmar diferentes elementos claves en el análisis de las variables [9].

Es pertinente mencionar tres actividades claves en el desarrollo cognitivo que incentiva las representaciones y registros mentales que se tiene de determinados elementos conceptuales.

La primera es la formación de una representación en un registro dado; la segunda es el tratamiento de una representación, que es la transformación interna de la representación dentro del mismo registro donde esta ha sido formada; y la conversión de una representación, que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial [9].

Lo anterior quiere decir que estas representaciones permiten construir un sistema en el cual se tiene la capacidad -por ejemplo- de tener diversas formas de graficar determinado valor o procedimiento de manera que se enriquece el conocimiento sin dejar a un lado el registro inicial que se tiene, con un constante proceso de aprendizaje en donde entran en juego múltiples variables de traducción y conservación de los contenidos.

C. Metodología

Se trata de una investigación de tipo cualitativo-descriptivo, que busca analizar los avances y/o dificultades de los estudiantes de grado octavo de la institución educativa Colombia del municipio de Villamaría (Caldas), en los procesos asociados al pensamiento variacional aprovechando el uso de diferentes sistemas de representación (presentes en este trabajo), para con ello fortalecer el desarrollo de competencias matemáticas, específicamente los siguientes procesos de pensamiento que son contemplados en los lineamientos curriculares de matemáticas del MEN:

Razonamiento. Se busca analizar si el estudiante:

- Da cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a las soluciones
- Justifica las estrategias y los procedimientos utilizados poniendo a prueba sus capacidades cognitivas y sus potencialidades.
- Formula hipótesis, hace conjeturas, predicciones o usa relaciones para explicar los procesos
- Encuentra patrones y los expresa matemáticamente

Comunicación. Se busca analizar si el estudiante:

- Expresa ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas.
- Comprende, interpreta y evalúa ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual.
- Construye e interpreta varias representaciones de ideas y de relaciones.
- Hace observaciones y conjeturas, formula preguntas, y reúne y evalúa información.
- Produce y presenta argumentos persuasivos y convincentes.

Modelación. Se busca analizar si el estudiante:

- Esquematiza.
- Formula y visualiza un problema en diferentes formas.

- Descubre relaciones.
- Descubre regularidades.

Esta metodología se basa en el desarrollo de actividades de aprendizaje basadas en problemas que son llevadas al aula de clase. Las actividades de aprendizaje se llevarán a cabo siguiendo la propuesta sugerida por Ausubel de aprendizaje significativo, la cual se desarrolla en tres momentos:

1. Actividades de Familiarización. Son actividades que permiten un acercamiento, familiarización o exploración del estudiante al uso de Geogebra y también a la solución de problemas en nuestro caso en los contextos de variación; es decir, se busca indagar los procesos y las estrategias de solución que usan los estudiantes al enfrentarse a situaciones problema.

2. Actividades de entrenamiento. Son actividades que se basan en un proceso de construcción colectiva de conocimiento en las cuales se resuelven situaciones problema entre docentes y estudiantes. El objetivo de estas actividades es buscar que los estudiantes fortalezcan sus habilidades y competencias matemáticas en el abordaje y solución de situaciones de variación.

3. Actividades de culminación. En esta etapa, los estudiantes se enfrentan a situaciones problema que deben resolver ellos mismos, teniendo en cuenta que deben ser partícipes tanto del problema como de la solución; además, considerando que el grado de complejidad es un poco mayor que en las actividades anteriores, el estudiante debe ejercer mayor autonomía en el abordaje y la solución del problema planteado.

III RESULTADOS

En este trabajo, la producción escrita de los estudiantes fue de vital importancia como principal fuente de información; no obstante, la información también surgió de la interacción entre los estudiantes y el docente, la interacción entre estudiantes o la observación directa.

Se realizaron actividades de aprendizaje basadas en problemas, divididas en 3 etapas. La primera, corresponde a la experiencia en la familiarización con el uso de Geogebra y con el abordaje de situaciones problema. Para este taller se trató de buscar que el estudiante se familiarizara con el programa Geogebra y de paso afianzara conceptos de geometría, como el punto, la recta, el segmento de recta,

construcción de figuras planas y con ellos pudiera llegar a generalizaciones como la de los puntos notables del triángulo por los cuales pasa siempre la recta de Euler (Figura 1).

Los estudiantes lograron con esta actividad, ayudados con el protocolo de construcción, descubrir algunas generalidades en cuanto a los puntos y rectas notables de un triángulo. Entre ellas se puede destacar que descubrieron que la relación entre las distancias del ortocentro al baricentro corresponde al doble de la distancia del baricentro al circuncentro. Posteriormente hicieron la comprobación de esa conjetura utilizando varios tipos de triángulos (Figura 2).

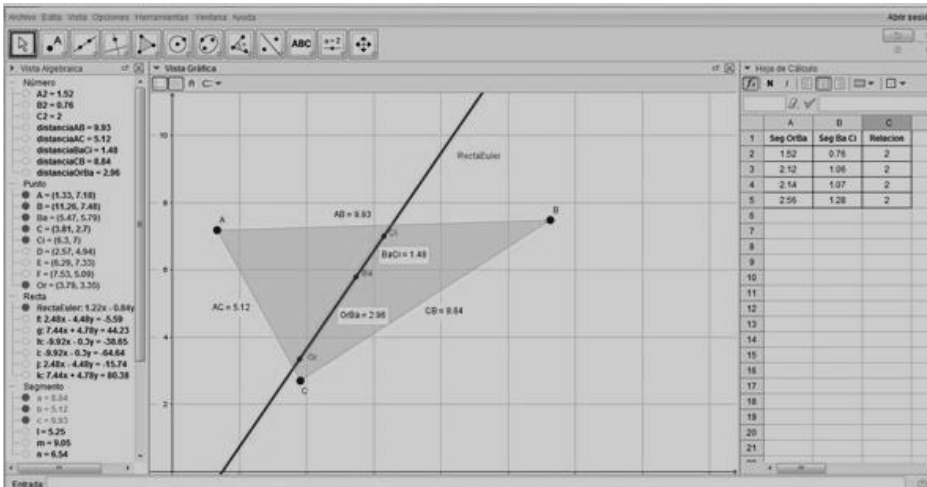


Figura 1. Recta de Euler construida por los estudiantes en Geogebra

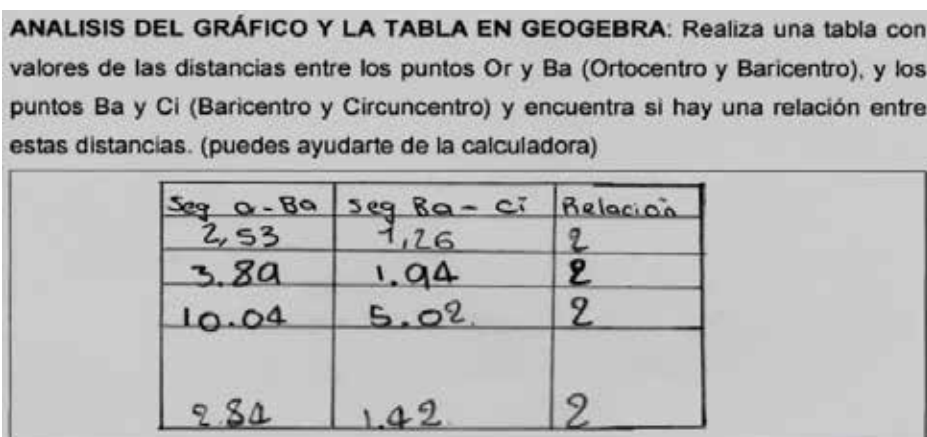


Figura 2. Tabla de proporción de segmentos en la recta de Euler

Con los estudiantes de grado octavo que intervinieron en el proyecto, se intentó que llegaran a encontrar una conjetura o conclusión general con respecto a los puntos notables en cualquier triángulo no equilátero y acerca de las distancias entre esos puntos. En cuanto a los triángulos equiláteros, ellos lograron comprender que los puntos notables (ortocentro, baricentro y circuncentro) coinciden en un mismo punto, pero se notaron dificultades para relacionar este hecho con la construcción de la recta de Euler pues ninguno menciona que no es posible construir ninguna recta con un solo punto (Figura 3).

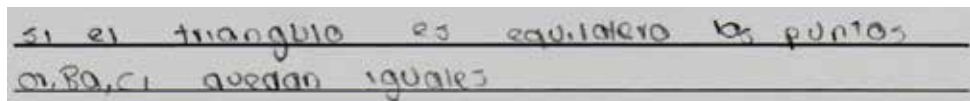


Figura 3. Respuesta dada a una pregunta del taller de familiarización

En el análisis de los talleres correspondientes a las otras dos etapas, que son las actividades de entrenamiento y culminación, se tuvieron en cuenta tres procesos generales del pensamiento matemático, que son: el razonamiento, la comunicación de ideas y la modelación, los cuales son fundamentales para el desarrollo de competencias, en este caso, relacionadas al ámbito variacional y los sistemas algebraicos.

Las actividades de entrenamiento fueron un proceso de construcción colectiva de conocimiento entre el docente y los estudiantes, con el fin de resolver las situaciones-problema propuestas, las cuales consistieron en construir a partir de unas preguntas orientadoras y un protocolo de construcción, los números poligonales (triangulares y cuadrados).

Por su parte, las actividades de culminación buscaron que los estudiantes se enfrentaran a situaciones-problema y tuvieran la autonomía de tratar de resolverlas sin mayor acompañamiento del docente. Estas actividades consistieron en construir dos tipos de fractales, conocidos como el copo de nieve y el fractal árbol pitagórico, a través de un proceso iterativo.

A continuación, se describen y analizan los resultados obtenidos en las actividades de entrenamiento y culminación en relación con los procesos generales de pensamiento (razonamiento, comunicación y modelación).

A. Actividades de entrenamiento

1. Razonamiento: los estudiantes representaron las secuencias de puntos para construir números triangulares y cuadrados (Figura 4), y encontraron patrones para continuar llenando los datos de la tabla por deducción (sin dibujar más triángulos) (Figura 5).

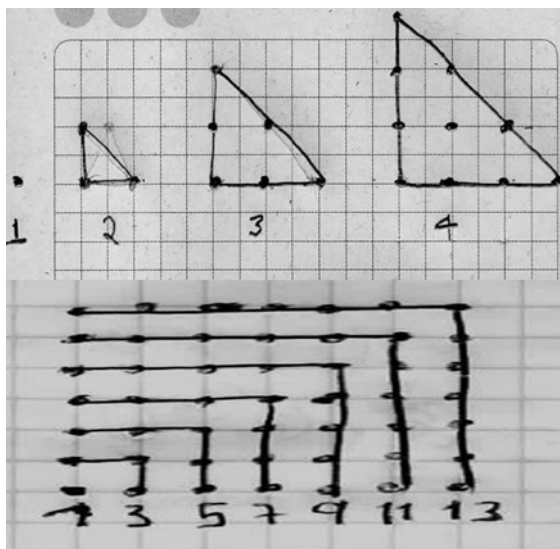


Figura 4. Esquematización de números triangulares y cuadrados a base de puntos en el cuaderno

# de la figura	# puntos en triángulo exterior	# de puntos en "x"	# de puntos en "y"	# de puntos totales
1	0	1	1	1
2	3	2 2	2 2	3
3	6	3	3	6
5	9	4	4	10
6	12	5	5	
7	15	6	6	
8	18	7	7	

Figura 5. Tabla de identificación de patrones numéricos

Se puede observar en Figura 5 que los estudiantes completaron la tabla hasta el paso 5, contando los triángulos de puntos hechos en Geogebra; pero a partir del paso 5 encontraron regularidades para los puntos externos de cada triángulo (puesto que se evidencia que son los múltiplos de 3).

2. Comunicación de ideas: el estudiante interpreta adecuadamente la información pues ubica los puntos correctamente cuando se le pide que use el programa Geogebra para formar los números triangulares y los números cuadrados con uno y dos pasos más que en la construcción con lápiz y papel (Figura 6).

En las primeras preguntas de la actividad de aprendizaje buscaba que el estudiante se empezara a familiarizar con los números poligonales (triangulares y cuadrados) y empezara a buscar alguna relación entre el número de puntos y la secuencia de cada figura.

3. Modelación: los estudiantes encuentran algunos patrones, pero no logran establecer una conjetura o conclusión general que permita hallar la cantidad total de puntos que conforman un número triangular o un número cuadrado. No obstante, en esta fase el estudiante esquematiza acertadamente lo que se le pide y de paso descubre una secuencia de números impares en la formación de los números cuadrados, adicionando puntos “en escuadra” a partir de un punto inicial.

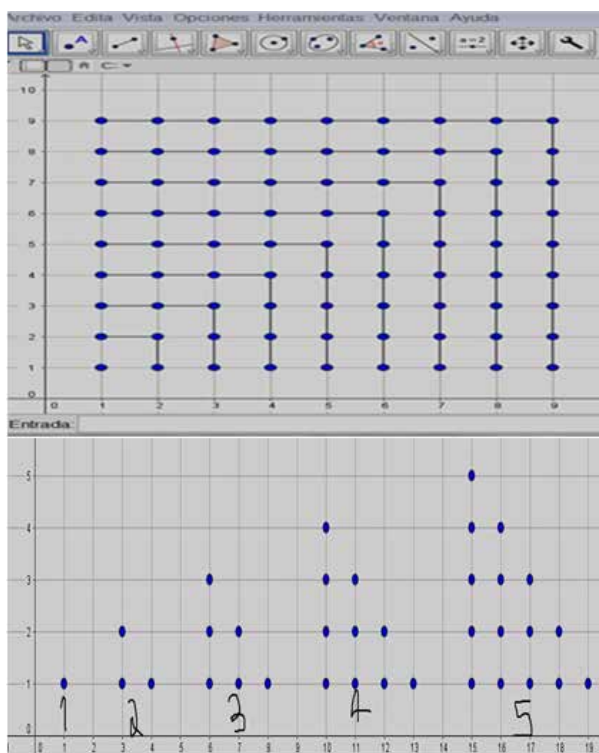


Figura 6. Construcción de números cuadrados y triangulares usando Geogebra

En la siguiente respuesta a una pregunta del primer taller de entrenamiento se observa que el estudiante adquirió la habilidad de descubrir algunas relaciones y regularidades presentes en las agrupaciones de puntos que conforman los números triangulares y cuadrados, las cuales son la base para entender cómo se comportan las sucesiones de los demás números poligonales (Figura 7).

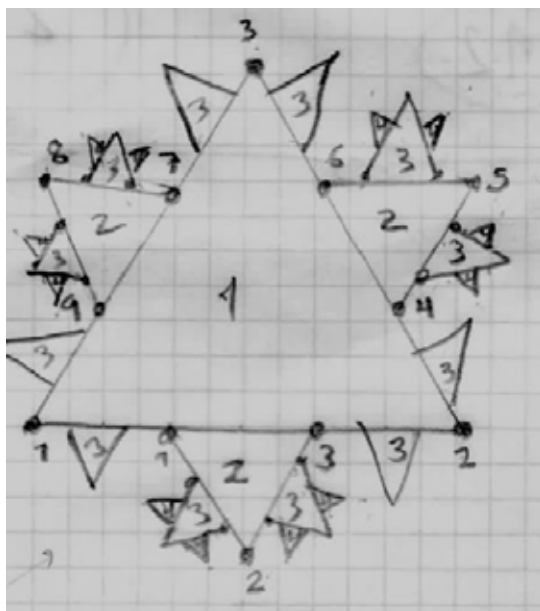


Figura 7. Generalización taller sobre números triangulares y cuadrados

Podemos ver que los estudiantes lograron expresar en forma verbal, numérica, escrita y gráfica los patrones que expresan la variación entre las figuras, alcanzando así diferentes formas de representación semiótica. No obstante, en la parte algebraica solo avanzaron hasta identificar los valores posicionales de la “X” y la “Y”, los cuales indicaban la variación o cantidad de puntos en el respectivo eje del plano cartesiano y al final en la conclusión emplearon los símbolos n_1 , n_2 , n_3, \dots, n , para referirse a cada término que compone la sucesión y llegaron a comprender que se puede expresar cada término como una suma (serie) de números desde n hasta 1 (para el caso de los números triangulares). Para el caso de los números cuadrados encontraron que es necesario multiplicar $n \cdot n$, pero solo lo expresaron numéricamente.

B. Actividades de culminación

1. Razonamiento: los estudiantes logran justificar sus estrategias en cuanto buscan la manera de comprender y abordar el problema planteado. Esto se

puede notar en cuanto la formación de los fractales copo de nieve y árbol pitagórico (que inicialmente crearon con lápiz y papel), para luego utilizar el programa Geogebra con colores diferentes para cada triángulo que conforma el fractal (Figuras 8 y 9).

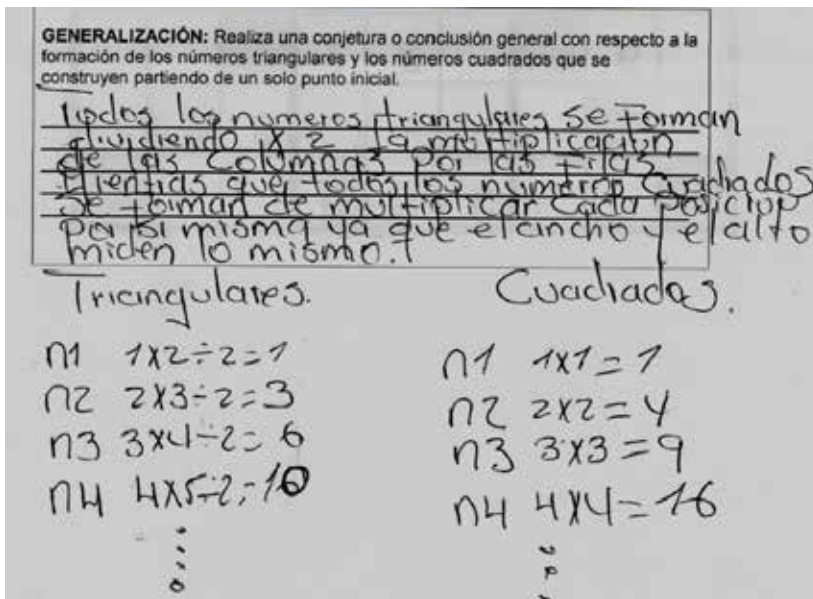


Figura 8. Fractal copo de nieve realizado en una hoja de cuaderno

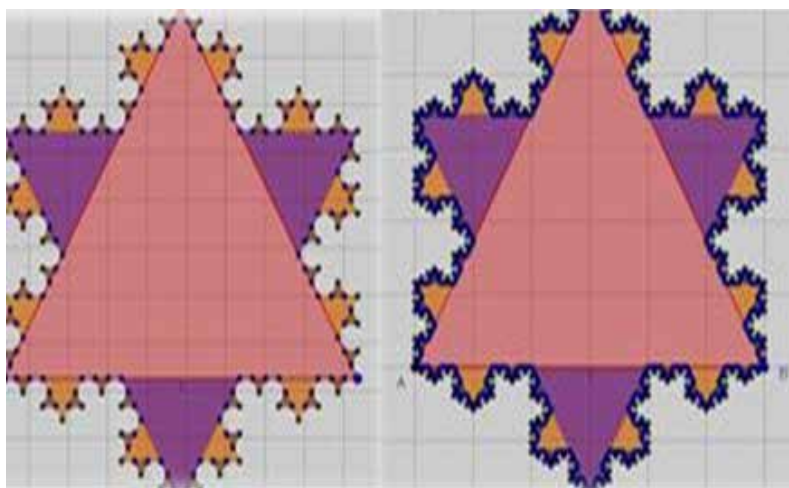


Figura 9. Iteraciones construidas en Geogebra por los estudiantes

Lo anterior muestra cómo la idea de un estudiante de trabajar cada paso (iteración) con un color diferente dio resultados positivos, pues no dejaron segmentos sin llenar y también les facilitó para contar el número de puntos y de triángulos adicionados en cada paso.

2. Comunicación de ideas: se observa en estos talleres de culminación a los estudiantes con mejor disposición e iniciativa para abordar las situaciones problema, expresan sus ideas en forma oral y escrita con mayor facilidad y logran argumentar como se forman las secuencias de los fractales (Figura 10).

FRACAL COPO DE NIEVE

Paso n	# de Puntos	# de triángulos	# puntos totales	# triángulos totales
0	3	1	3	1
1	9	3	12	4
2	36	12	48	16
3	144	48	192	64
4	576	192	768	256
5	2304	768	3048	1024
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Figura 10. Tabla de regularidades en fractal copo de nieve

La regla de formación que hallaron los estudiantes fue que para cada paso en cualquier parte de la tabla se debe multiplicar por 4 el paso anterior. Esto se explica puesto que, al colocar en cualquier lado del triángulo en el segmento de la mitad, otro triángulo equilátero, la nueva figura pasa de contener 3 segmentos de igual medida a 4 segmentos iguales.

3. Modelación: los estudiantes se enfrentaron a situaciones problema y las abordaron desde diferentes representaciones (gráfica, tabular, algebraica), lo cual les permitió visualizar algunas regularidades y reconocer los aspectos que cambian y los que permanecen constantes ya que estos son fundamentales para el desarrollo del pensamiento variacional (Figura 11) y (Figura 12).

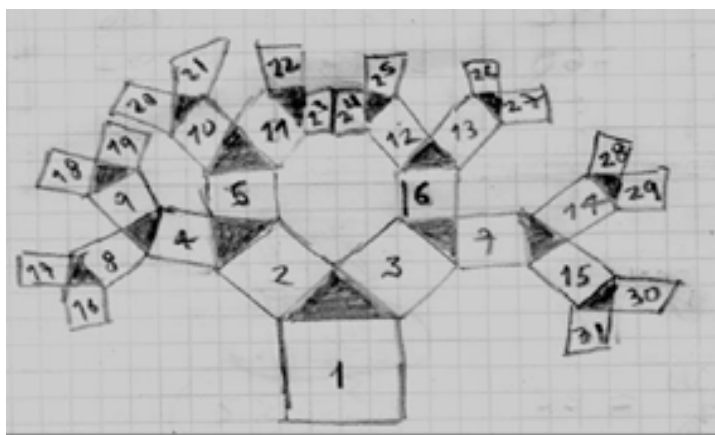


Figura 11. Representación del árbol pitagórico con lápiz y papel

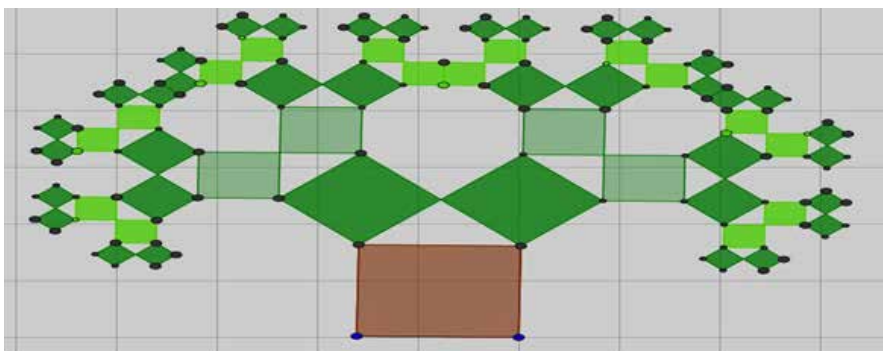


Figura 12. Fractal árbol pitagórico en Geogebra

En la siguiente tabla se observa cómo lograron encontrar un patrón de formación de los cuadrados que se adicionan en cada paso pues mediante una descomposición de cada número en sus factores primos, se dieron cuenta que el exponente corresponde con el número del paso (iteración); por lo cual, para cada paso, el número de cuadrados a adicionar es 2^n . No ocurrió lo mismo con la secuencia de los cuadrados totales de la figura una vez se van adicionando pasos. Los estudiantes solo cuentan hasta el paso 4 (dejando el espacio para el paso 5 vacío) pues hasta allí hicieron la construcción en Geogebra. En la Figura 13 se observa que los estudiantes asumieron que al igual que en el fractal copo de nieve; se podía empezar a construir la tabla desde el paso cero (0). No obstante, al mirar la tabla nos damos cuenta que, para los cuadrados totales, las iteraciones comienzan desde el paso 1 siguiendo un patrón de formación $(2^n - 1)$

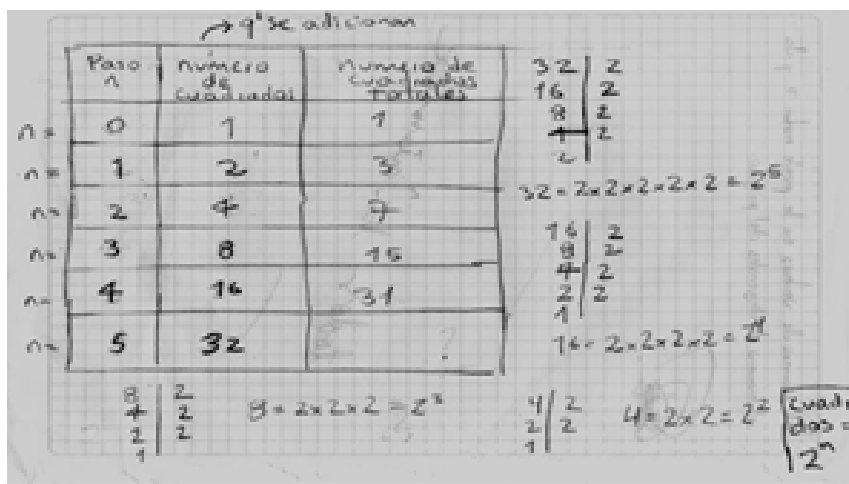


Figura 13. Tabla de regularidades en cuadrados. Árbol Pitagórico

IV. CONCLUSIONES

- Se observaron avances en los estudiantes en cuanto fortalecimiento de habilidades en la comunicación, el razonamiento y la modelación de situaciones problema, pues se observó que a medida que se desarrollaron las actividades de aprendizaje, los estudiantes reconocieron y aplicaron los distintos tipos de representación geométrica, numérica o algebraica en la solución de los problemas planteados. Para esto, las actividades de aprendizaje desarrolladas con los estudiantes, basadas en el enfoque problémico, resultaron ser beneficiosas debido a que los estudiantes ven el problema a resolver como un reto y tecnología como Geogebra, además de la experiencia e interacción con los compañeros y el docente, ayudan a fortalecer dichos procesos en los contextos de variación.
- El pensamiento variacional es fundamental para el desarrollo de otras habilidades de pensamiento matemático; por esto, busca generalizaciones por medio de patrones dentro de contextos prácticos o teóricos es importante para fortalecer en los alumnos dichas habilidades y aplicarlas en la solución de problemas.
- Los estudiantes de grado octavo estuvieron más motivados en los últimos talleres o actividades de aprendizaje debido que tenían mayor apropiación al uso de la tecnología y ya estaban más familiarizados y entrenados.

- Se evidenciaron falencias en aspectos conceptuales relacionados con geometría y álgebra, lo cual no permite que se esperen buenos resultados en el proceso académico ni en pruebas externas.
- Debido a que las actividades de aprendizaje tuvieron un creciente incremento de la complejidad y a su vez un decreciente acompañamiento del docente (de manera intencionada), se encontró que en muchas ocasiones los estudiantes limitan sus capacidades cognitivas, interpretativas y comunicativas debido a la esperanza que tienen de que sea el docente que solucione el problema. Si bien es cierto que el acompañamiento debe ser permanente, es importante buscar que el estudiante alcance cierto grado de autonomía intelectual.
- En las actividades de aprendizaje en grupo o colaborativo se pudo evidenciar que los alumnos tienen dificultad para pasar de un lenguaje numérico, verbal, escrito o gráfico al lenguaje algebraico donde se utilicen símbolos que representan relaciones entre cantidades. No obstante, se evidencian avances en cuanto a la generalización de patrones numéricos, geométricos, etc.
- Los estudiantes de la institución educativa Colombia (por ser una institución educativa de carácter rural) tienen bajo desempeño en el dominio de las herramientas informáticas pues se les dificultan las tareas básicas para su grado de escolaridad. Sin embargo, muestran un marcado interés por el aprendizaje cuando es mediado por las tecnologías.
- La motivación y el empoderamiento que se les otorga a los estudiantes cuando se les permite realizar trabajos con tecnologías no convencionales para ellos y a través de buena planeación de las metodologías didácticas para el aprendizaje, presentan un resultado notorio en su desempeño.
- Se observaron avances a medida que se desarrollaron los talleres en cuanto a la forma como los estudiantes reconocen y aplican los diferentes tipos de representaciones geométricas o numéricas.
- El trabajar con un enfoque problémico resultó adecuado porque los estudiantes ven el problema como un reto a resolver y se apoyan de la experimentación y la observación para tratar de llegar a una solución.

- Los estudiantes lograron sacar conclusiones y llegar a algunas generalidades, ayudados por medio de información tabular, grafica, escrita y en la interacción con el docente y sus compañeros.
- El trabajo colaborativo o en grupo ayudó a que todos los estudiantes pudieran conocer los aportes de sus compañeros y aunque individualmente cada uno manejaba mejor una forma de representación que las otras, al final compartían las diferentes soluciones lo cual enriquece el proceso de aprendizaje.
- Fue importante ver que los estudiantes se apropiaron del “arrastré guiado” como una estrategia para sacar provecho a todas las ventajas que ofrece un software de geometría dinámica, puesto que hace de la matemática una ciencia más “manipulativa”
- Aunque el nivel de competencia en la parte geométrica y algebraica es bajo, los estudiantes lograron avanzar a niveles de generalización tal que evidencian buena capacidad para reconocer conceptos como la variación y el cambio, lo cual es fundamental para su proceso de aprendizaje en matemáticas.
- El software Geogebra despertó un gran interés en los estudiantes, no solo por el uso infrecuente de la tecnología sino también porque les facilitaba el manejo e interpretación de la información; además, las construcciones en Geogebra comparadas con los diseños con lápiz y papel permitieron ver que el estudiante no tiene un desprecio “natural” por las matemáticas, sino más bien por la forma como se enseñan.

V. REFERENCIAS

- [1] Ausubel, D. P., Novak, J. D. y Hanesian, H., Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo (2ª ed.). (M. Sandoval P., Trad.) México D.F., México: Editorial Trillas, 1983[En línea]. Disponible en: http://www.arnaldomartinez.net/docencia_universitaria/ausubel02.pdf
- [2] Vasco, C. E., “El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En Ministerio de Educación Nacional”, en 2003 Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas, pp. 61-70 [En línea]. Disponible en: <https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-89944.html>

- [3] Ministerio de Educación Nacional, Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional, 1998 [En línea] Disponible en: <https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-339975.html>
- [4] OCDE, Pisa 2006. Marco de la Evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. (B. García, trad.). Madrid, España: Santillana Educación S. L., 2006 [En línea] Disponible en: <http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf>
- [5] OCDE, Informe Pisa 2006. Competencias científicas para el mundo del mañana. (M. Benito, M. Jiménez, C. Jiménez-Landi, V. Kennedy y T. Trillo, trads.). Madrid, España: Santillana Educación S. L., 2008 [En línea] Disponible en: http://www.madrid.org/cs/Satellite?blobcol=urldata&blobheader=application%2Fpdf&blobheadername1=Content-Disposition&blobheadervalue1=filename%3DPISA2006_RESULTADOS_INTERNACIONAL.pdf&blobkey=id&blobtable=MungoBlobs&blobwhere=1220389323885&ssbinary=true
- [6] Delgado, P., Teoría del aprendizaje significativo de David Ausbel, en 1996 II Encuentro de Físicos en la Región Inka UNSAAC. Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco. Cuzco, Perú, [En línea] Disponible en: <http://www.monografias.com/trabajos6/apsi/apsi.shtml>
- [7] Freire, P., Pedagogía de la autonomía: saberes necesarios para la práctica educativa (11ª ed.). Madrid, España: Siglo XXI, 2006.
- [8] Rodríguez, Y., “La práctica pedagógica desde un enfoque problemático. Una propuesta para la formación de maestros,” Entre Comillas, (13), pp.81-85, 2010 [En línea]. Disponible en: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3366046>
- [9] Duval, R., Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia: Programa Editorial, 2015.



Iván Sánchez, nació en Manizales (Caldas), en 1983. Es profesional en Ingeniería, estudiante de maestría en didáctica de las matemáticas de la Universidad de Caldas. Se ha desempeñado como docente de matemáticas en instituciones educativas del sector rural en básica secundaria y media.

Actualmente adscrito a la secretaria de educación departamental de Caldas, se desempeña como docente de matemáticas en la institución educativa Colombia del municipio de Villamaria

(Caldas). Interesado en la investigación en Educación Matemática en lo relacionado con el desarrollo de pensamiento matemático y la resolución de problemas.



Jaider Figueroa, Magíster en Matemática Aplicada en la Universidad Nacional de Colombia -Manizales. Se ha desempeñado como docente de matemáticas y directivo docente en instituciones educativas de básica secundaria y media (2002-2015), catedrático de la Universidad de Sucre (2004-2015) y de la Universidad de Caldas. Actualmente, docente de planta de la Universidad Nacional de Colombia – sede Manizales, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística. Actualmente dedicado a la investigación en Modelamiento Matemático y Educación Matemática en las líneas pensamiento matemático y resolución de problemas, y construcción de ambientes de aprendizaje con tecnologías.