Modelación en Álgebra Lineal[1]

Modeling in Linear Algebra

1 Producto derivado del proyecto de investigación "Caracterización de las estrategias de trabajo independiente en los procesos de formación por competencias articulados al desarrollo de los microcurrículos de las asignaturas de los cursos básicos que ofrece la Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas". Presentado por el Grupo de Investigación Da Vinci, dela Institución Universitaria ITM.

P. F. Ardila docencia en la Facultad de Ciencias Exactas, dela Institución Universitaria ITM., Medellín (Colombia); email: pabloardila@itm.edu.co
F. J Córdoba docencia en la Facultad de Ciencias Exactas, de la Institución Universitaria ITM., Medellín (Colombia); email: franciscocordoba@itm.edu.co
E. Castrillón docencia en la Facultad de Ingenierías de la Institución Universitaria ITM., Medellín (Colombia); email: elkincastrillon@itm.edu.co

Resumen

El álgebra lineal, es vista como un área destinada a brindar recursos para resolver sistemas de ecuaciones, de esta manera, muchos la descuidamos y pasamos por alto la infinidad de aplicaciones y áreas en las cuales se usa. Estos medios de trabajo, se han incorporado de forma muy sutil en muchas ciencias. Pretendemos mostrar de forma clara algunas de ellas, tales conceptos, como los mínimos cuadrados, usados para determinar la ecuación de una recta para una conjunto de puntos, el cual fue empleado para hallar la órbita de planetas y asteroides, las transformaciones lineales, de las que se desprenden conceptos geométricos, como rotaciones y traslaciones. Valores y vectores propios, que permiten caracterizar matrices, y posibilitan el trabajo con imágenes, simplificando la cantidad de información necesaria para trasmitir y decodificar mensajes. De igual forma los determinantes permiten verificar en ecuaciones diferenciales si un conjunto es linealmente independiente o linealmente dependiente. Y las matrices que son objetos matemáticos, pero que también permiten guardar información de conjuntos matemáticos.

Palabras clave

ÁLgebra, Aplicaciones, Trasformaciones, Valores Propios, Matrices, Determinantes.

Abstract

Linear Algebra is seen as an area aimed to offer resources to solve systems of equations, and we neglect and overlook the infinity of applications and areas in which it could be used. These possibilities of work have been joined in a very subtle form in many sciences. We try to demonstrate clearly some of them, such concepts, as square minimums, used to determine the equation of a straight line for one point set, which was used to find the orbit of planets and asteroids, the linear transformations, which derive in geometric concepts, such as rotations and adjournments. Values and own vectors, which allow to characterize counterfoils, and make the work with images possible, simplifying the quantity of necessary information for sending and decoding messages. All the same, the determinants allow to check in differential equations, if a set is linearly independent or linearly dependent. And the counterfoils that are mathematical objects, but that also allow to save information of mathematical sets.

Key words

Algebra, Applications, Transformations, Own Values, Counterfoils, Determinants.

I. INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal es un conjunto de métodos orientados, en última instancia, a resolver sistemas de ecuaciones, su historia se remonta desde los Chinos, para quienes el planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones hacía parte de su vida diaria y que a través de juegos, fueron desarrollando tal habilidad y destreza, la cual rápidamente fue sintetizada en algoritmos que pretendían hacer más eficientes las soluciones halladas.

Fue sólo en la edad media cuando en occidente, con la axiomatización Y formalización de muchos conceptos matemáticos, se redescubrieron y perfeccionaron dichos descubrimientos. Se introdujo el concepto de matriz, a partir del cual se generó una red de procesos interrelacionados, que permiten hoy en día, contar con una inmensa cantidad de estrategias para resolver problemas.

Las ciencias exactas han dado con claridad la justificación de por qué el álgebra lineal soporta gran cantidad de descubrimientos y es para el ingeniero su gran ayuda y eslabón principal, basta con nombrar su aporte en astronomía, física, telecomunicaciones, mecánica y en fin, casi cualquier rama de las ciencias.

Queremos mostrar cómo se modelan situaciones concretas empleando las herramientas del algebra lineal. Es claro, que los programas computacionales juegan un papel crucial a la hora de tener precisión y eficacia en los resultados obtenidos.

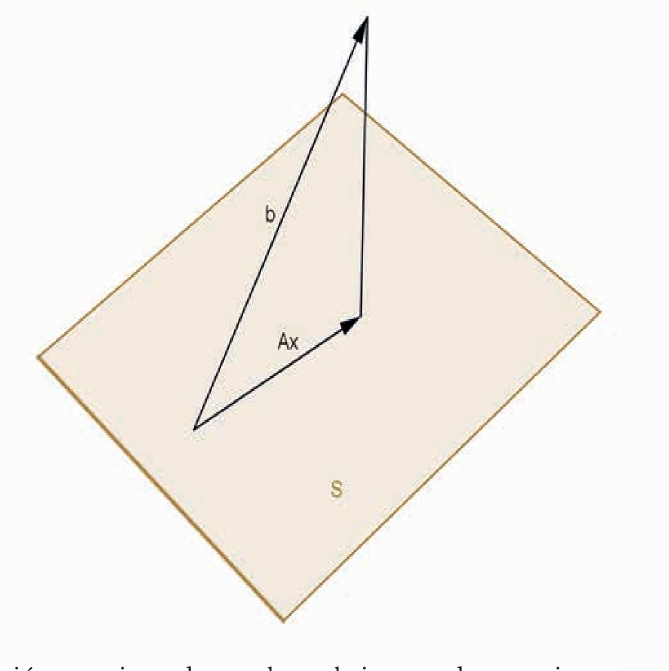
Este trabajo pretende ser un aporte para estudiantes, docentes e investigadores que deben direccionar sus cursos y motivar al trabajo mancomunado, la interdisciplinariedad y la generación de nuevas estrategias de trabajo, así mismo, permitir que muchos se acerquen y valoren el aporte logrado a partir del uso del álgebra lineal.

II. MÍNIMOS CUADRADOS

A. Definición

Su origen está en la solución de sistemas inconsistentes de ecuaciones, para los cuales hay mayor cantidad de ecuaciones que incógnitas. Lo que pretendemos hallar, es un vector que minimice, para el cual A es una matriz de cualquier tamaño, es decir , un vector de . Tomemos el espacio generado por las columnas de A, el cual llamaremos espacio columna de A. Además podremos suponer que el vector no es del subespacio columna de. Lo que finalmente hallaremos es un vector que este lo más cerca de . Para mayor información ver [1], [2] y [4].

Fig. 1. Mínimos cuadrados



Finalmente, la solución proviene de resolver el sistema de ecuaciones

$$A^T A x = A^T b \tag{1}$$

Que se conoce como ecuaciones normales.

B. Ejemplo

Halle la regresión cuadrática de mínimos cuadrados para el conjunto de valores dados en la Tabla 1.

Tabla 1.

Valores para modelación vía mínimos cuadrados	
X	y
-3	2
-1	1
2	0
3	-2
4	3

Como debemos hallar la regresión cuadrática, esta debe cumplir la ecuación

$y = a_1 + a_2x + a_3x^2$

Luego de reemplazar cada punto en la ecuación se obtiene

$$2 = a_1 + a_2(-3) + (-3) = a_1 - 3a_2 + 9a_3$$
$$1 = a_1 - a_2 + a_3$$
$$0 = a_1 + 2a_2 + 4a_3$$
$$-2 = a_1 + 3a_2 + 9a_3$$
$$3 = a_1 + 4a_2 + 16a_3$$

Lo anterior es equivalente a tener la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \text{ y el vector } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Así,

$$A^TA = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 39 \\ 5 & 39 & 71 \\ 39 & 71 & 435 \end{bmatrix} \text{ y } A^Tb = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 49 \end{bmatrix}$$

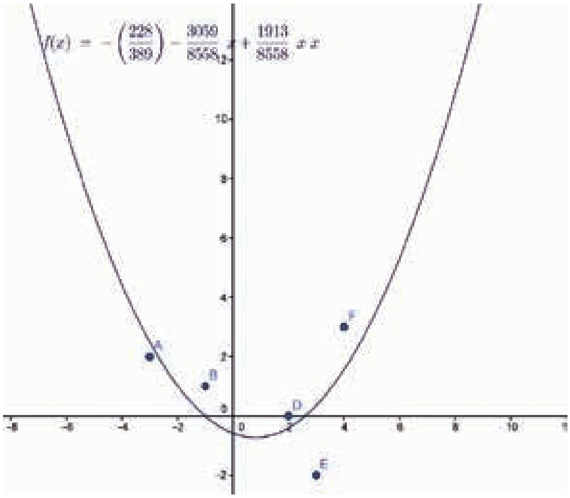
De donde llegamos finalmente a

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 39 \\ 5 & 39 & 71 \\ 39 & 71 & 435 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 49 \end{bmatrix}$$

Por lo cual $a_1 = -\left(\frac{228}{389}\right)$, $a_2 = -\left(\frac{3059}{8558}\right)$ $a_3 = -\left(\frac{1913}{8558}\right)$.

En la Fig. 2. se observa la curva obtenida.

Fig. 2. Curva de interpolación obtenida con Geogebra.



III TRANSFORMACIONES LINEALES

A. Definición

Dados dos espacios vectoriales U, V, una transformación lineal es una aplicación

$$T\colon U \to V \qquad (2)$$

Para la cual se cumple:

1. $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$,
2. $T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1)$

Note que la mayoría de funciones conocidas en el cálculo no satisfacen estas condiciones, como es el caso de $T(x) = x^2$, puesto que

$$T(x + y) = (x + y)^2 \neq x^2 + y^2 = T(x) + T(y)$$

No se tiene la primera condición y esto implica que no es lineal. En [1] se ven más ejemplos.

B. Ejemplo

Una función que satisface con las condiciones anteriores es la derivada, veamos esto.

Sea

$T(x) = \frac{dy}{dx}(f(x)).$

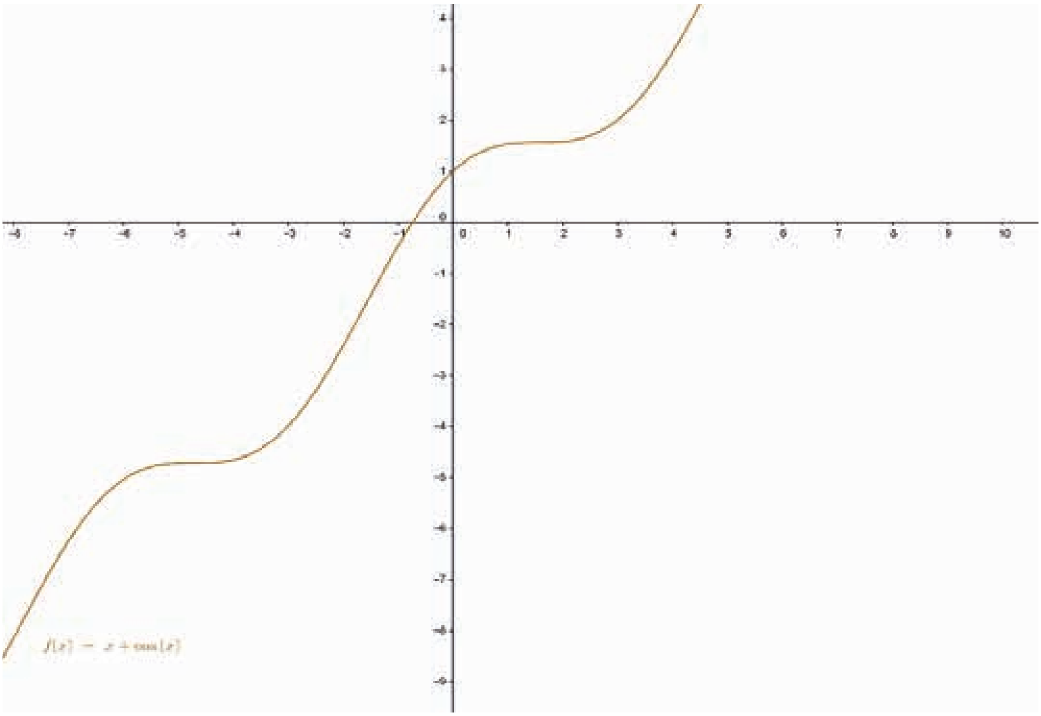
En efecto,

1. $T(x+y) = \frac{dy}{dx}\big(f(x)+g(x)\big) =$
$$\frac{dy}{dx}f(x) + \frac{dy}{dx}g(x) = T(x) + T(y)$$
2. $T(\alpha x) = \frac{dy}{dx}\big(\alpha \mathrm{f(x)}\big) = \alpha \frac{dy}{dx}\big(f(x)\big) = \alpha \mathrm{T(x)}$

Por tanto, la operación derivación es lineal.

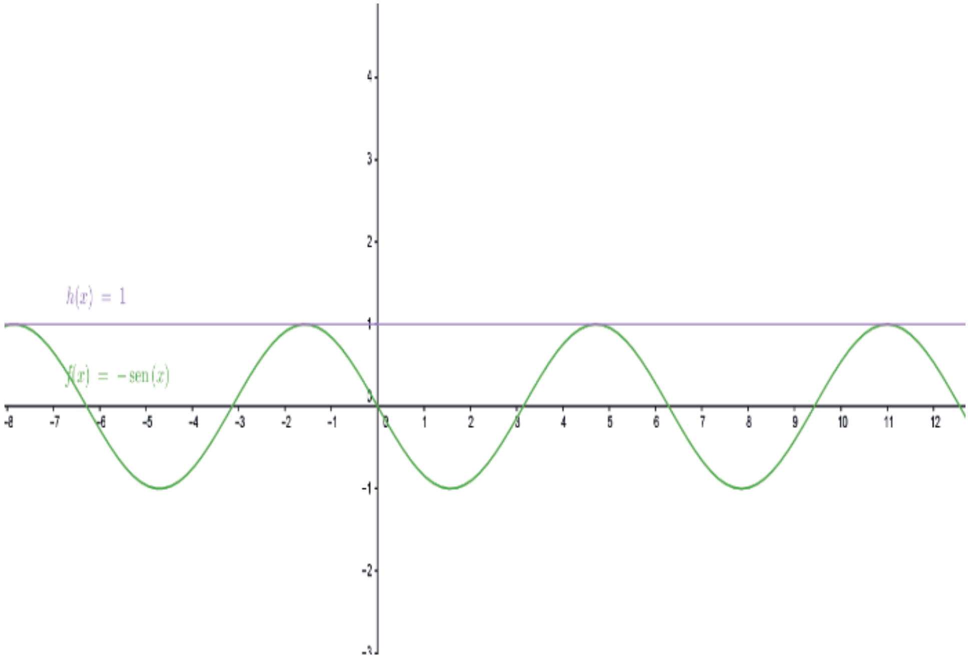
Consideremos la gráfica la función $y = x + \cos(x)$

Fig.3. Curva y=x+cos(x)



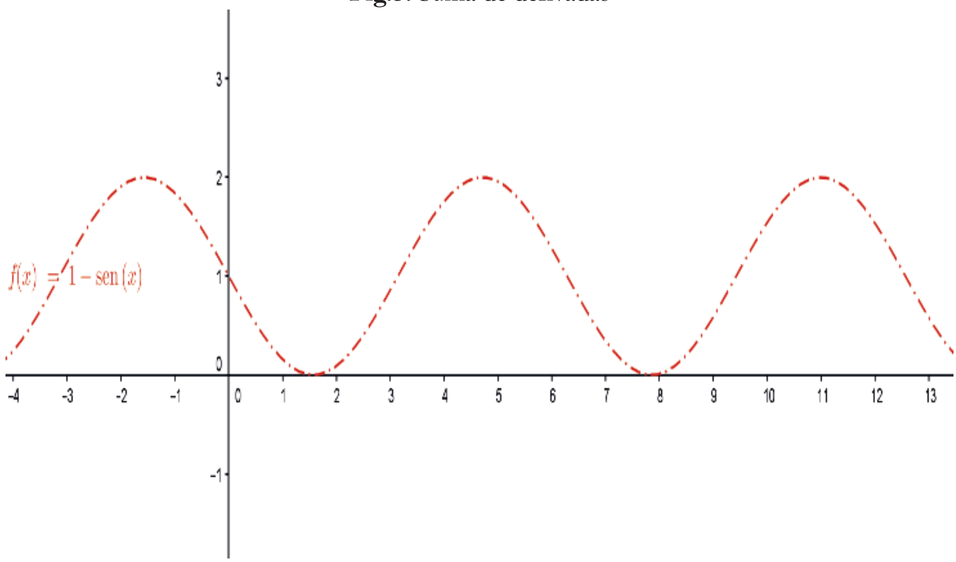
A continuación sus derivadas.

Fig.4. Derivadas



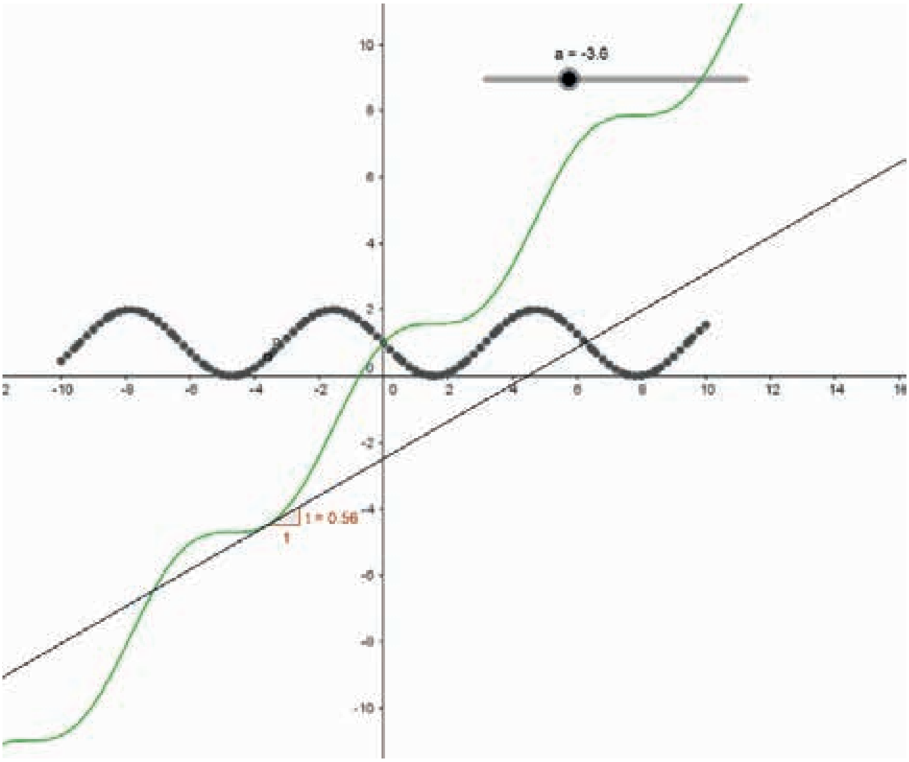
Y luego, la gráfica de la suma de las dos funciones

Fig.5. Suma de derivadas



Por último con Geogebra se gráfica todo el proceso

Fig.6. Proceso completo en Geogebra



IV. FORMAS CUADRÁTICAS

A. Definición

Una forma cuadrática en dos variables es una expresión

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \qquad (3)$$

Que corresponde a una cónica, punto o recta, esta definición se puede retomar en [1], [3] y [6].

B. Ejemplo

Determine a que tipo de cónica corresponde la ecuación

$4x^2 + 10xy + 4y^2 = 9$

El lado derecho lo podemos escribir como

$[x \quad y]\begin{bmatrix}4 & 5\\5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 9$.

Sea $A = \begin{bmatrix}4 & 5\\5 & 4\end{bmatrix}$, esta matriz diagonaliza ortogonalmente(es simétrica), sus valores propios son $\omega_1 = 9, \omega_2 = -1$ y sus correspondientes vectores propios $v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$, los vectores propios unitarios son $w_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt[2]{2}}\\\frac{1}{\sqrt[2]{2}}\end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt[2]{2}}\\\frac{1}{\sqrt[2]{2}}\end{bmatrix}$ y así, una matriz Q que diagonaliza ortogonalmente a A es

$Q = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt[2]{2}} & -\frac{1}{\sqrt[2]{2}}\\\frac{1}{\sqrt[2]{2}} & \frac{1}{\sqrt[2]{2}}\end{bmatrix}$,

luego, $Q^T AQ = \begin{bmatrix}9 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = D$

Finalmente,

$[x' \quad y']\begin{bmatrix}9 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix} = 9(x')^2 - (y')^2 = 9,$

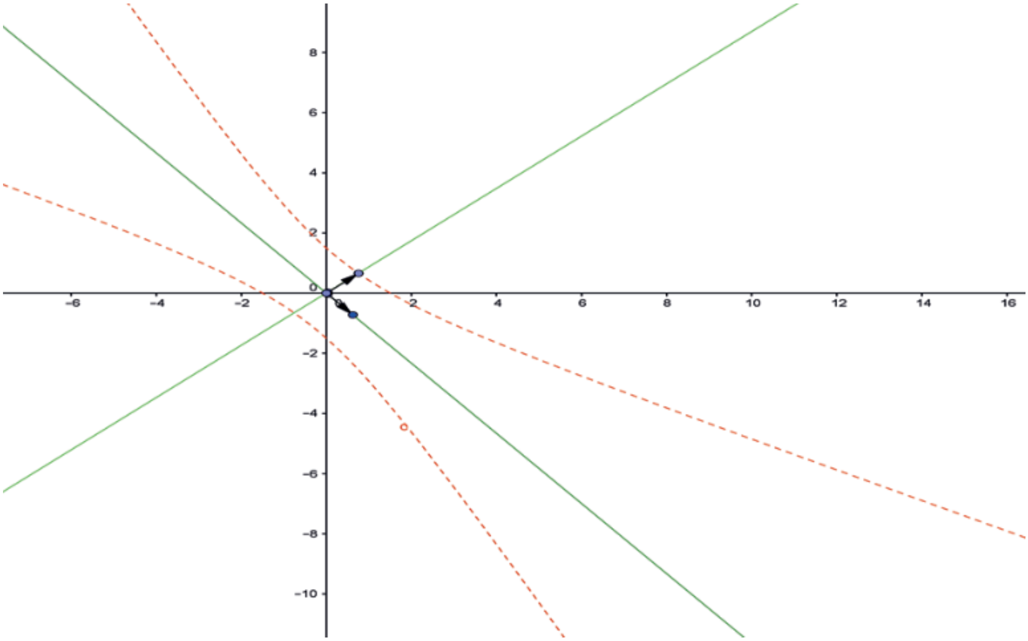
al dividir entre 9 se llega a

$(x')^2 - \frac{(y')^2}{9} = 1.$

Esto corresponde a una hipérbola, rotada, que tiene como vectores origen del sistema coordenado a

$x' = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt[2]{2}}\\\frac{1}{\sqrt[2]{2}}\end{bmatrix}$ y $y' = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt[2]{2}}\\\frac{1}{\sqrt[2]{2}}\end{bmatrix}$

Fig. 7. Hipérbola rotada



Consultar [1] para generalizaciones y un trabajo más a fondo.

V. MATRICES DE ROTACIÓN

A. Definición

Una matriz de rotación desde el origen a través de un ángulo es una transformación lineal con matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{4}$$

En el caso de en [1] y [2] se encuentran ejemplos completos aplicados a la robótica.

B. Ejemplo

Consideremos el pentágono dado en la ilustración. Se muestra el efecto de hacerlo rotar.

Fig. 8. Pentágono el cual se hará rotar con respecto al origen usando matrices de rotación.

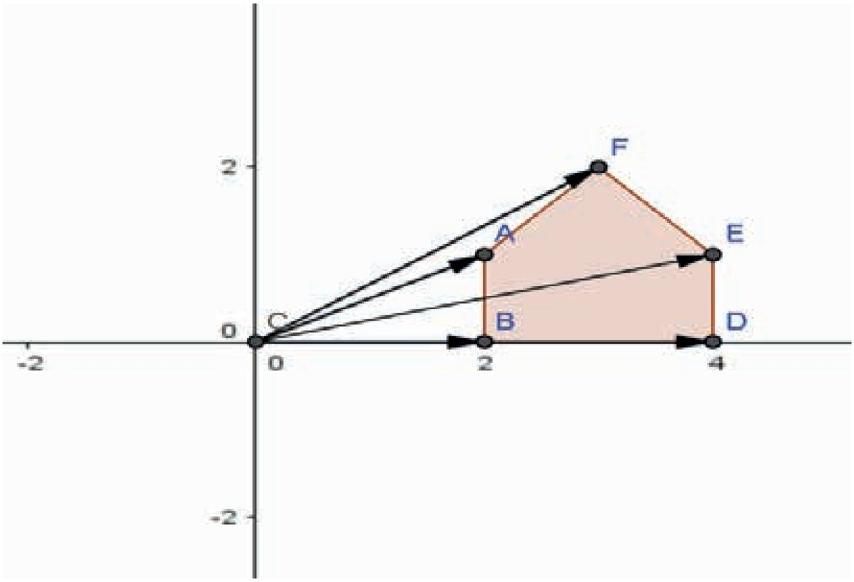


Fig. 9. Rotación alrededor del origen

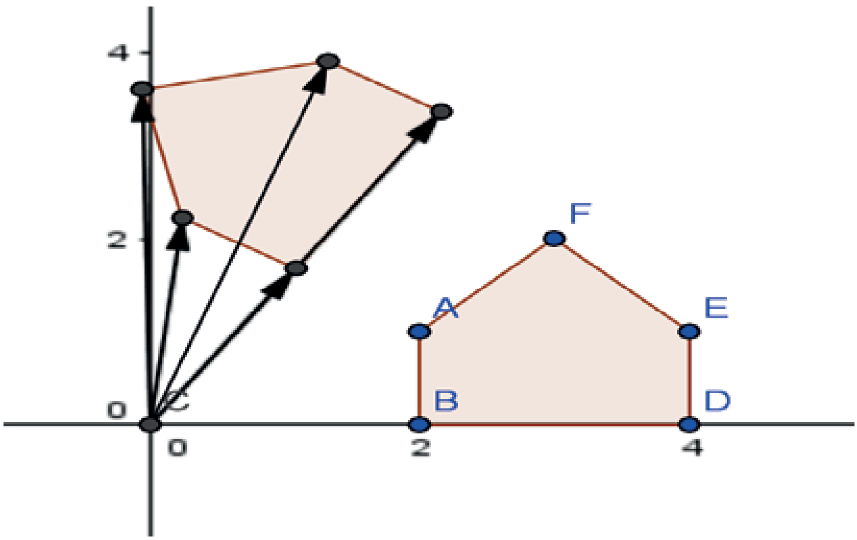
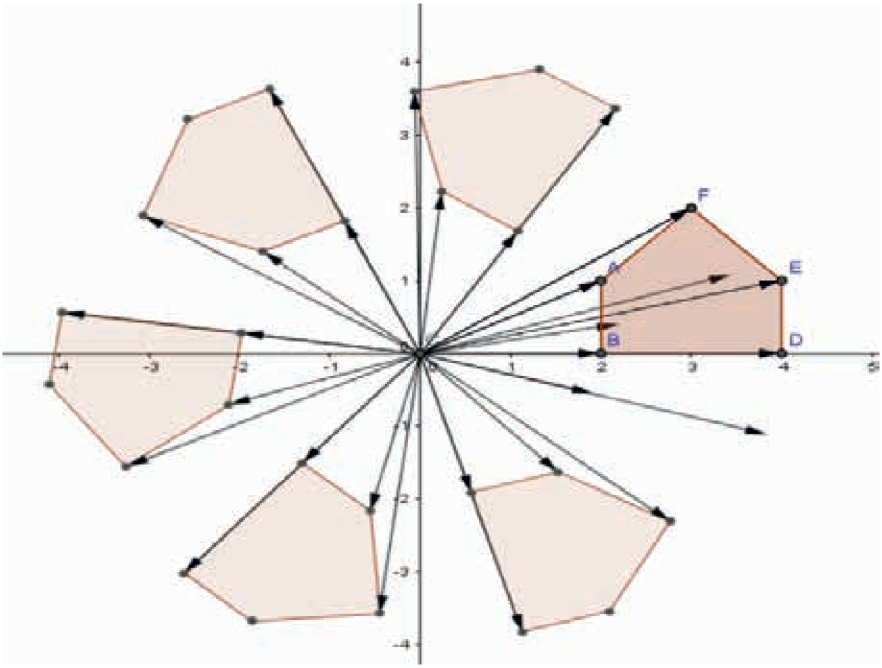


Fig. 10. Varias rotaciones del pentágono



REFERENCIAS

[1] P. David, *Álgebra Lineal Una Ijntroducción moderna*. México. Segunda Edición. Cengage Learning, 2007

[2] R. Larson, *Fundamentos de Álgebra Lineal*. México. Sexta Edición. Cengage ;Learning, 2010

[3] Florey, F. (1979). *Fundamento de Algebra Lineal*. Mexico: Prentice Hall

[4] Grossman, S. (2000). *Algebra Lineal*. México: McGraw Hill

[5] Howard, A. (2002). *Introducción al algebra lineal*. México: Limusa

[6] Kolman, B. (2004). *Algebra Lineal*. Mexico: Prentice Hall.

Pablo Ardila nacido en Santa Rosa de Osos. Graduado en matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín. Con una maestría en Matemáticas de dicha universidad obtenida en el año 2008. Trabaja en el área de álgebra en particular en teoría de nudos.

Ha sido docente investigador en la UPB, docente ocasional de la Universidad Nacional Colombia, tallerista de la Universidad de Antioquia, actualmente coordina un semillero de investigación, es miembro del Grupo Da Vinci, trabaja en ITM, de la Ciudad de Medellín como docente auxiliar. Este año publicó un Módulo de Geometría Vectorial. Trabaja en la modelación y relación de la música y matemáticas, así mismo en la teoría de nudos y la didáctica de las ciencias exactas para estudiantes universitarios.

El profesor Ardila ha sido ganador el año pasado de la distinción como mejor docente de la Facultad de ciencias exactas del ITM y la distinción Andrés Bello en las pruebas ICFES.

Francisco Córdoba nacido en Medellín graduado en Minas y metalurgia de la Universidad Nacional de Colombia, posee una maestría en educación, es candidato a doctor en educación, es el director del Geogebra para Colombia. Trabaja en la parte de educación y nuevas tecnologías.

Su labor docente comenzó en la Universidad Nacional de Colombia, luego en la Escuela de Ingeniería. En la actualidad en docente asociado de ITM, en Medellín, miembro del grupo de investigación Gnomon. . Este año publicó un Módulo de Geometría Vectorial. Trabaja en la parte de asesoramiento en didáctica, modelación y TIC.

El docente Cordoba es miembro de grupo Gnomon, asesora a varios facultades en didactica, ha sido creador del maestria en educación de ITM.

Elkin Castrillón nacido en Medellín profesional en ingeniería, con maestria en control. Es uno de los principales impulsores del programa Geogebra en Colombia. Tiene muchos aportes a la didactica con el uso de programas aducativos.

Ha sido docente del Poitecnico Jaime Isaza Cadavid, trabaja actualmente, en el ITM como docente asistente, es representante de los docente ante el consejo de la Facultad de Ingenierías.

El profesor Castrillón, ha sido ganador el año pasado de la distinción como mejor docente de la Facultad de ingenierías del ITM. Su rama de trabajo es la docencia asistida con mediadores virtuales.