La lógica proposicional y su aplicación en contexto[1]

Propositional logic and its application in context

1 Producto derivado del proyecto de investigación "Estrategia de innovación para mejorar el aprendizaje del Cálculo Diferencial apoyada en videos educativos y OVA. Experiencia interinstitucional". Presentado por el Grupo de Investigación Grupo de Innovación en Matemáticas y Nuevas Tecnologías para la Educación - GNOMON -, del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín.

S.A. Alarcón docencia en la Facultad de Artes y Humanidades, del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín, Medellín (Colombia); email: sergioalarcon@itm.edu.co
C.M. Restrepo docencia en la Facultad de Ingenierías, del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín, Medellín (Colombia); email: carlosrestrepo@itm.edu.co
H.J. Herrera docencia en la Facultad de Ingenierías, del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín, Medellín (Colombia); email: hectorherrera@itm.edu.co

Resumen

Los alumnos, cuando abordan en sus cursos de matemáticas el tema de la lógica proposicional, manifiestan un alto grado de desmotivación, debido a la manera como este se les presenta. Su enseñanza se centra en encontrar el valor de verdad de las proposiciones y demostrar sus propiedades mediante el uso de tablas de verdad, olvidando, en la mayoría de los casos, la importancia de aplicar dichos conceptos y propiedades a situaciones reales, lo que daría sentido a lo que aprenden, pues además de desarrollarles el pensamiento formal, les permitiría adquirir un aprendizaje significativo. De esta manera, lo que se pretende con este trabajo es presentar algunos ejemplos en contextos reales, donde se apliquen ciertos conceptos y propiedades de la lógica proposicional, que sirvan como motivación para el trabajo en el aula tanto para docentes como para estudiantes, como una manera de ayudar a estos últimos a desarrollar el pensamiento formal y a adquirir un aprendizaje significativo de esta área del saber. Se presentan los distintos conectivos lógicos (negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional), se muestran algunos referentes teóricos y se dan algunos ejemplos en contexto.

Palabras clave

Aprendizaje Significativo, Contextos Reales, Lógica Proposicional.

Abstract

Students, when address the subject of propositional logic in mathematics courses, show a high level of demotivation due to the way it is presented by several teachers. Their teaching focuses on finding the true/false value of propositions and demonstrate its properties by using those tables and forgetting, in most cases, the importance of applying these concepts and properties to real situations, which give meaning to what students learn, allowing them to acquire meaningful learning. The purpose of this paper is to apply the concepts and properties of propositional logic to real contexts, suggesting a way for students to acquire a meaningful learning of the subject. The different logical connectives are presented (negation, conjunction, disjunction, conditional and biconditional), some theoretical references are showed and some examples are given in context.

Key words

Meaningful Learning, Real Contexts, Propositional Logics.

I. INTRODUCCIÓN

EL pensamiento formal presenta tres características funcionales: El mundo de lo posible frente al mundo de lo real, el pensamiento hipotético deductivo, el uso de la combinatoria y el pensamiento proposicional . De esta manera, el pensamiento formal es una orientación generalizada para la resolución de problemas, ya que en él un individuo está en capacidad de organizar datos, de aislar y controlar variables, de hacer hipótesis y de justificar y hacer pruebas lógicas , . Esto último está relacionado con el manejo de operaciones lógicas contenidas en datos reales, donde se operan proposiciones que involucran las distintas formas de conectivos lógicos, característico del pensamiento proposicional.

Los conceptos y propiedades de la lógica, al igual que toda estructura matemática, se encuentran interrelacionados, siguen procedimientos claros, ordenados y precisos, y toman significado cuando son aplicados a distintos tipos de contexto. De ahí que el papel del docente sea ayudar a los estudiantes a comprender estas relaciones y a desarrollar habilidades propias del pensamiento formal, con las que puedan dar solución a situaciones de la vida real. De esta manera, se adquiriría un aprendizaje significativo de la lógica proposicional.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

II. LA LÓGICA PROPOSICIONAL EN SITUACIONES REALES

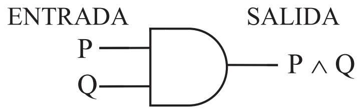
A continuación se presentan algunas situaciones de la vida real, donde son aplicados algunos conceptos y propiedades de la lógica proposicional. Estas situaciones son tomadas de los módulos 4 y 5, para un curso de Razonamiento lógico matemático, servicio académico de extensión del ITM

A. Análisis de circuitos

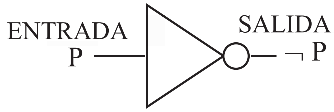
El objetivo es aplicar la lógica proposicional, sus operaciones y propiedades básicas en la modelación (representación, construcción) de circuitos de caja negra.

A continuación se presentan algunos circuitos de caja negra y su equivalente en proposiciones:

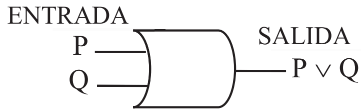
Fig. 1. Circuitos de caja negra



CIRCUITO AND



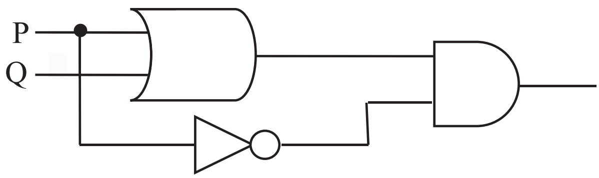
CIRCUITO NOT



CIRCUITO OR

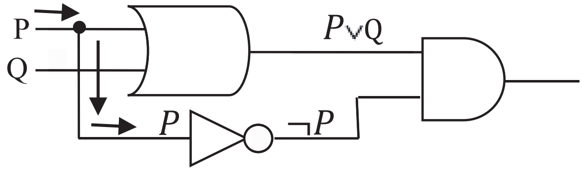
1) Para el circuito que se presenta a continuación, encontrar la proposición correspondiente:

Fig. 2. Circuito de caja negra integrado por circuitos OR, NOT y AND



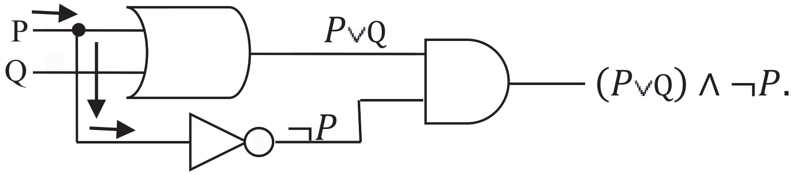
Obsérvese en el circuito que para el circuito OR entran las proposiciones P y Q, y sale, de acuerdo con la regla establecida, la proposición $P \vee Q$. Además para el circuito NOT entra P, y sale $\neg P$. El circuito puede verse, por lo tanto, de la siguiente manera:

Fig. 3. Análisis de los circuitos OR y NOT



Como se muestra en este último circuito, por el circuito AND entran las proposiciones $P \vee Q$ y $\neg P$. De acuerdo a la regla establecida para estos circuitos, debe salir la proposición $(P \vee Q) \wedge \neg P$. El circuito queda entonces como sigue:

Fig. 4. Análisis de la compuerta AND



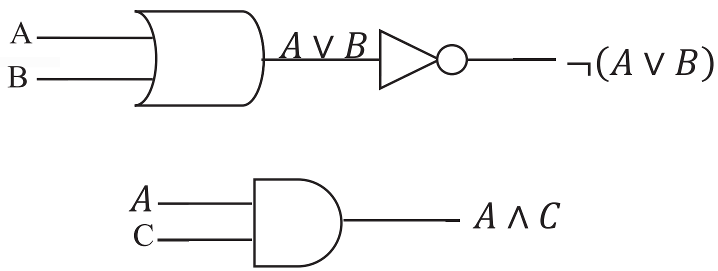
De esta manera, la proposición correspondiente al circuito dado es $(P \vee Q) \wedge \neg P$.

2) Para la proposición que se presenta a continuación, hallar el circuito correspondiente: $\neg(A \vee B) \vee (A \wedge C)$

Ahora se presenta el proceso reversible, es decir, se presenta la proposición y se pide hallar el circuito correspondiente a dicha proposición.

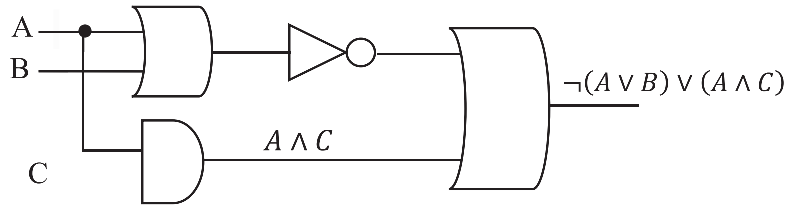
La proposición dada presenta tres proposiciones simples: *A*, *B* y C. Hay dos proposiciones compuestas $\neg(A \vee B)$ y $(A \wedge C)$ operadas bajo el conectivo $\vee$. Cada una de estas proposiciones compuestas tiene un circuito como se presenta a continuación:

Fig. 5. Circuitos para las proposiciones y respectivamente



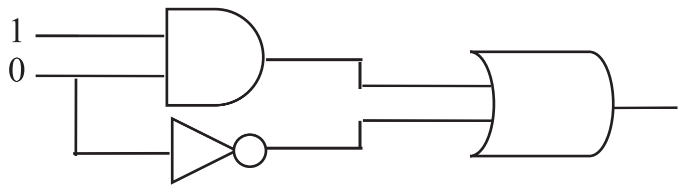
Los circuitos obtenidos para las proposiciones $\neg(A \vee B)$ y $(A \wedge C)$ se encuentran unidos por un circuito OR, de acuerdo con la proposición dada $\neg(A \vee B) \vee (A \wedge C)$, Este circuito puede verse a continuación:

Fig. 6. Circuito correspondiente a la proposición



3) Indicar si el circuito que se da está encendido o apagado, sabiendo que

Fig. 7. Análisis de encendido o apagado para un circuito de caja negra



Encendido = 1 Apagado = 0

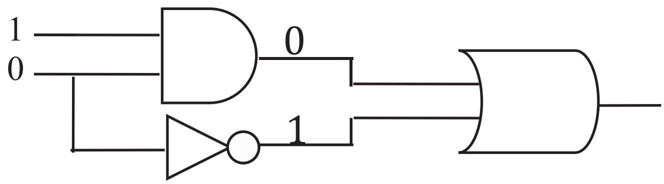
Para determinar si el circuito está encendido o apagado, se hace uso de las tablas de verdad para las proposiciones. Así, al hacer la relación con los valores de verdad de las proposiciones, se tiene que:

Encendido = 1 = V (Verdadero) Apagado = 0 = F (Falso)

La compuerta OR se trabaja con la tabla de verdad para disyunción, es decir, la disyunción entre dos proposiciones P y Q sólo es verdadera si al menos una de las dos proposiciones es verdadera. Esto significa, en el contexto de los circuitos de caja negra, que la compuerta OR está encendida si al menos una de las entradas es 1, de lo contrario la compuerta está apagada. El circuito AND funciona con la tabla de verdad para la conjunción, esto es, la conjunción entre dos proposiciones P y Q sólo es verdadera si ambas proposiciones son verdaderas. En el contexto de los circuitos significa que el circuito AND está encendida si ambas entradas son 1, en otro caso está apagada. Por su parte, el circuito NOT trabaja con la tabla de verdad para la negación. Así, si P es verdadera, entonces $\neg P$ es falsa; y si P es falsa, entonces $\neg P$es verdadera. De esta manera, la compuerta NOT está encendida si la entrada es 0, y está apagada si la entrada es 1. Con base en esto, puede procederse al análisis del circuito dado (Figura 7).

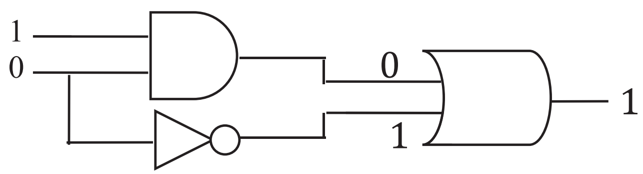
Con base en lo expuesto anteriormente, puede analizarse el circuito dado (Figura 7). Si se observa el circuito, puede notarse que en las entradas del circuito AND están ubicados 1 y 0, lo que significa que dicho circuito está apagado, ya que para estar encendida ambas entradas deben presentar un 1. Por su parte, en la entrada del circuito NOT está ubicado un 0 indicando, de acuerdo con lo expuesto, que el circuito se encuentra encendido. El circuito queda, entonces, de la siguiente manera:

Fig. 8. Análisis de encendido o apagado para los circuitos AND y NOT



Observando este último circuito (Figura 8), puede notarse que en las entradas del circuito OR se encuentra 1 y 0 lo que significa, de acuerdo a lo visto anteriormente, que el circuito se encuentra encendido, ya que al menos una de las entradas presenta un 1. El circuito queda de la siguiente manera:

Fig. 9. Análisis de encendido o apagado para el circuito OR



Por lo tanto, de acuerdo con el análisis que se acaba de hacer, puede decirse que el circuito dado (Figura 7) está encendido.

B. Análisis de tanques y compuertas

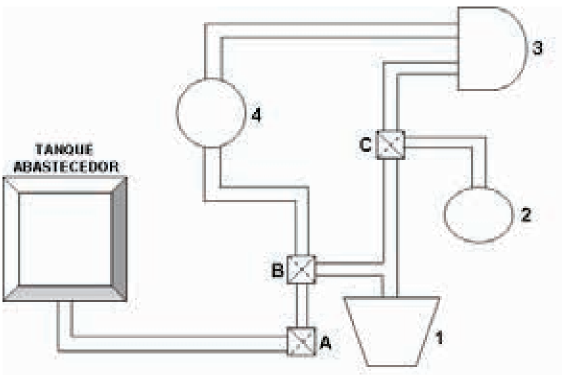
El objetivo es aplicar los conceptos de implicación y equivalencia a situaciones que involucran relaciones de causa y efecto.

Cuando un condicional $P \longrightarrow Q$ es verdadero, y a partir de la proposición puede deducirse lógicamente la proposición , el condicional es llamado implicación lógica o deducción**,** representado por el símbolo "$\Rightarrow$". De esta forma, $P \Rightarrow Q$ puede leerse como "P implica Q", o "P es condición suficiente para Q", o "basta con que se dé P para que ocurra Q" o "Q es condición necesaria para P".

Una proposición P es equivalente lógicamente a una proposición Q, denotada $P \Leftrightarrow Q$ si se verifican las implicaciones $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$, es decir, si existe una relación de causa y efecto de P con respecto a Q, y de Q con respecto a P. Puede leerse como: "P es equivalente Q", "P es condición suficiente y necesaria para Q". A continuación se presenta una situación, relacionada con un tanque de abastecimiento de gas, donde se presentan estos conceptos.

El esquema siguiente muestra un tanque de abastecimiento que vierte gas a través de una tubería y tres llaves A, B y C, a cuatro tanques, denotados por 1, 2, 3 y 4. La parte punteada muestra la posición en la cual queda cada una de las llaves al ser giradas. El tanque tiene un dispositivo que permite que cuando llegue gas al tanque 2 se abra automáticamente la llave B.

Fig. 10. Tanque de abastecimiento de gas



De acuerdo con lo anterior responder las siguientes preguntas, justificando cada una de las respuestas:

1) ¿Para que llegue gas al tanque 2 es suficiente (basta con que ella se dé) con girar la llave A?

Esta pregunta puede hacerse también de la siguiente manera:

¿Girar la llave A es condición suficiente para que llegue gas al tanque 2?

O también

¿Si se gira la llave A, entonces llega gas al tanque 2?

Obsérvese, analizando el tanque de abastecimiento de gas (Figura10), que no basta con girar la llave A para que llegue gas al tanque 2, se necesita abrir también la llave C. Es decir, para que llegue gas al tanque 2 es necesario abrir las llaves A y C. Así, abrir las llaves A y C es condición necesaria para que se llegue gas al tanque 2. Puede leerse también de la siguiente manera: Si llega gas al tanque 2, entonces se giraron las llaves A y C.

2) Supóngase que está abierta la llave A. De acuerdo con esto, podría decirse que ¿Si se abre la llave C, entonces llega gas al tanque 4?

Recuérdese la condición dada en la situación problema:" Cuando llegue gas al tanque 2, se abre automáticamente la llave B".

Si se abre la llave C, entonces llega gas al tanque 2 y, de acuerdo a la condición dada, si llega gas al tanque 2, se abre automáticamente la llave B. Al abrirse la llave B, llegaría también gas al tanque 4.

Por lo tanto, si se abre la llave C, entonces llega gas al tanque 4. Así, abrir la llave C es condición suficiente para que llegue gas al tanque 4, siempre que esté abierta la llave A.

Periodicals (Artículos de revista):

[1] A. Aguirre Baztán, "Psicología de la adolescencia". Barcelona: Boixareu Universitaria, 1994.

[2] J. Flavell, "La psicología evolutiva de Jean Piaget". México: Paidós, 1995

[3] L. Santaella-Braga, "La evolución de los tres tipos de argumento: Abducción, inducción y deducción". Analogía: Revista de Filosofía, investigación y difusión, pp. 9-20, 1998.

[4] S. A. Alarcón Vasco, Módulo 4: "Circuitos de caja negra. Curso de razonamiento lógico matemático". Medellín: ITM, 2013.

[5] S. A. Alarcón Vasco, Módulo 5: "Relaciones causa y efecto". Medellín: ITM, 2013.

Sergio Alberto Alarcón Vasco nació en Medellín, Colombia, el 6 de octubre de 1967. Se graduó como matemático en la Universidad de Antioquia, Colombia y en 2004 obtuvo título de magíster en Educación Matemática en la misma universidad.

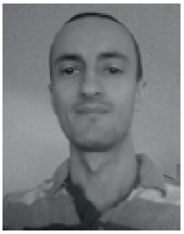
Ejerció profesionalmente en la Universidad de Antioquia como docente de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Actualmente se desempeña como profesor asociado del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín. Entre sus campos de interés están los obstáculos epistemológicos y la construcción de los conceptos matemáticos a partir de contextos reales.

El profesor Alarcón es coautor del libro Cálculo Diferencial: Límites y Derivadas, publicado en 2008 por el Fondo Editorial ITM. Es coautor de los artículos "El método de máximos y mínimos de Fermat" y "El método de Descartes para determinar la tangente a una curva", publicados Enseñanza Universitaria, revista de la Escuela Regional de Matemáticas.

Héctor Javier Herrera Mejía nació en Bogotá, Colombia, el 15 de diciembre de 1965. Se graduó como matemático en la Universidad de Antioquia, y en 2008 obtuvo título de Magister en matemáticas aplicadas en la universidad EAFIT.

Ejerció profesionalmente en la Universidad de Antioquia como docente de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Actualmente se desempeña como profesor asociado del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín. Entre sus campos de interés están la estadística y la producción de Objetos Interactivos de Aprendizaje.

El profesor Herrera es coautor del libro Geometría Interactiva, publicado en 2009 por el Fondo Editorial y del libro Modelo de Regresión Semiparamétrico Con Datos Censurados, publicado en 2013 por la Editorial Académica Española. Es coautor del artículo "Impacto del uso de objetos de aprendizaje en el desempeño en matemáticas de estudiantes de grado noveno", publicado en la Revista Virtual Universidad Católica del Norte.



Carlos Mario Restrepo Restrepo nació en Andes, Colombia, el 2 de diciembre de 1977. Se graduó como Ingeniero Industrial en la Universidad Nacional, y en 2006 obtuvo título de Magister en Ciencias - Física en la Universidad Nacional.

Actualmente se desempeña como profesor asociado del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín. Entre sus campos de interés están la estadística y la producción de Objetos Interactivos de Aprendizaje.

El profesor Restrepo es coautor del libro Geometría Interactiva, publicado en 2009 por el Fondo Editorial. Es coautor del artículo "Impacto del uso de objetos de aprendizaje en el desempeño en matemáticas de estudiantes de grado noveno", publicado en la Revista Virtual Universidad Católica del Norte.