Conceptos formales del cálculo vistos por medio de programas especializados[1]

Formal concepts of calculus seen through specialized programs

1 Producto derivado del proyecto de investigación "Caracterización de las estrategias de trabajo independiente en los procesos de formación por competencias articulados al desarrollo de los microcurrículos de las asignaturas de los cursos básicos que ofrece la Facultad de Ciencias Exactas y Aplicadas". Presentado por el Grupo de Investigación Da Vinci, de la Institución Universitaria ITM.

P. F. Ardila docencia en la Facultad de Ciencias Exactas, de la Institución Universitaria ITM., Medellín (Colombia); email: pabloardila@itm.edu.co
F. J. Cordoba docencia en la Facultad de Ciencias Exactas, de la Institución Universitaria ITM., Medellín (Colombia); email: franciscocordoba@itm.edu.co
P. Márquez. Estudiante de la Facultad de Ciencias económicas de la Institución Universitaria ITM., Medellín (Colombia); email: paulinamarquez220517@correo.itm.edu.co

Resumen

En sus orígenes, el cálculo era una ciencia encargada de resolver problemas y dio solución a necesidades muy concretas. Posterior a esto se formalizaron estos conceptos y el análisis matemático permitió tener unas reglas claras y precisas que justifican la existencia de cada uno de los temas básicos del cálculo. Sin lugar a duda, algunos de sus conceptos son mecánicamente aplicados por nuestros estudiantes, son reglas que dan una manera más de operar, es muy poco el conocimiento de la sustentación formal de cada concepto. Gracias a programas de libre uso como geogebra, graph, y muchos más es posible mostrar conceptos como límites que hacen uso de la definición épsilon-delta, continuidad, derivada, integral de Riemann. Pretendemos mostrar y animar algunos de los conceptos más fundamentales del cálculo y que esto sea una nueva manera de presentarlos, creemos que el cálculo debe avanzar y las herramientas informáticas, ayudadas de las Tic, permitan al docente generar su propio conocimiento. El verdadero salto y revolución debe plantearse en el aula de clase y las ayudas brindadas por la tecnología deben hacer posible el mejor entendimiento del cálculo.

Palabras clave

Cálculo, Análisis, Integral, Derivada, Geogebra, Didáctica.

Abstract

in its origins calculus was a science used to solve problems, and gave solution to very concrete needs. Later, this these concepts were formalized and the mathematical analysis allowed to have a few clear and precise rules that justify the existence of each one of the basic topics of the calculus. Nowadays, some of these concepts are mechanically applied by our students, are rules that give a way of operating, it is very reduced the knowledge about the formal sustentation for every concept. Thanks to programs of free use as geogebra, graph, and others, it is possible to show concepts, as limits, that use the definition épsilon-delta, continuity, derivative, integral of Riemann. We try to show and encourage some of the most fundamental concepts of calculus and this should be a new way of presenting them, we think that calculation must advance and the IT tools as well as the ICT, allow to the teacher to generate his own knowledge. The real jump and revolution must be generated in the classroom, and the help obtained through technology, must make it easier a better comprehension of calculus.

Key words

Calculus, Analysis, Integral, Derivative, Geogebra, Didactics.

I. INTRODUCCIÓN

El cálculo, pensado como herramienta de trabajo, ayuda a presentar y formalizar conceptos que han perdurado por muchos años. Pretendemos a través del uso de herramientas computacionales, ilustrar los conceptos más usuales del cálculo, ya que estos generan en el estudiante temores y no son claramente aplicados por ellos, cuando integran los conceptos teóricos con la práctica.

El concepto de límite es el primero que ilustramos con algunos ejemplos prácticos, a partir del cual elaboramos la definición de continuidad y luego pasamos a un eje crucial que es la derivada. Finalmente, la integral que es el proceso contrario a derivar.

En los cursos básicos de ingeniería esta manera de trabajar permite mejorar las destrezas y fortalece futuros desarrollos conceptuales.

El uso de ayudas computacionales permite reorientar el contenido y así, le brinda al estudiante y al docente la posibilidad de explorar conceptos formales con ayuda de estos mediadores. La gran mayoría de conceptos del análisis real pueden ser abordados gracias a las ayudas brindadas por estas herramientas. El programa Geogebra brinda la versatilidad de operar y explorar muchos conceptos que anteriormente eran solo teóricos y aparecían en los libros de texto como teoría, acompañados de algún ejemplo poco claro.

II. LÍMITES

A. Definición de límite

Una función f(x) se dice que tiene límite L en c, si f(x) se acerca tanto como queramos a L, cuando x está cerca de c. En otras palabras si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tales que $|x-c| < \delta$ implica que $|f(x) - L| < \epsilon$. Esta definición es del matemático Luis Cauchy. Ver [2], [3], [9] y [10].

B. Ejemplo

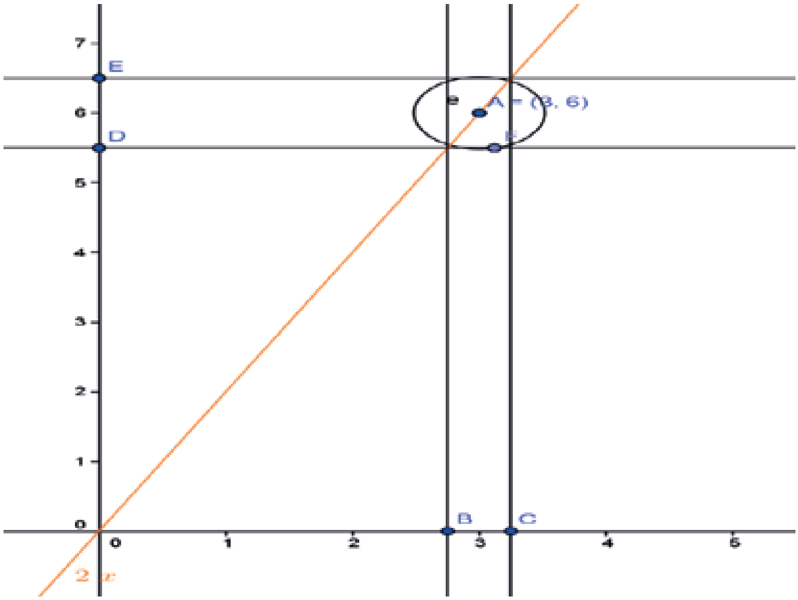
Tomemos la función $f(x) = y = 2x$

Y mostremos que el límite de f(x) es 6 cuando x está cerca de c=3.
Por tanto $|2x-6| < \epsilon$, es equivalente a $2|x-3| < \epsilon$, es como llegamos a $|x-3| < \frac{\epsilon}{2}$, tomemos a $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

De esto podemos afirmar $\lim_{x \to 3} 2x = 6$, lo cual es equivalente a $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta(\epsilon) > 0$ tales que $|x - 3| < \frac{\epsilon}{2}$ implica que $|2x - 6| < \epsilon$.

Si por ejemplo tomamos a $\epsilon = 0.5$, los intervalos serán $(3 - 0.25, 3 + 0.25) = (2.75\,, 3.25)$ y $(6 - 0.5\,,\ 6 + 0.5) = (5.5\,,\ 6.5)$. El la Fig. 1. se observa una interpretación de lo dicho anteriormente.

Fig. 1. Aproximación al concepto de límite



III. DERIVADA

A. Definición de derivada

Para una función f(x) en un intervalo I, la derivada existe si el siguiente límite existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

B. Ejemplo

Halle la derivada de $y = sen(x)$

$$f`(x) = \lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)+sen(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\cos(\mathrm{h})+sen(h)\cos(x)-sen(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\cos(h)-sen(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)\cos(x)}{h}$$
$$= \mathrm{sen(x)}\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}$$
$$= sen(x)(0)+\cos(x)\,(1)$$
$$= \cos(x)$$

Por tanto la derivada del seno es coseno. Lo cual se aprecia en la Fig. 2.

Fig. 2. Con el uso de geogebra se ve que la derivada de seno es coseno.

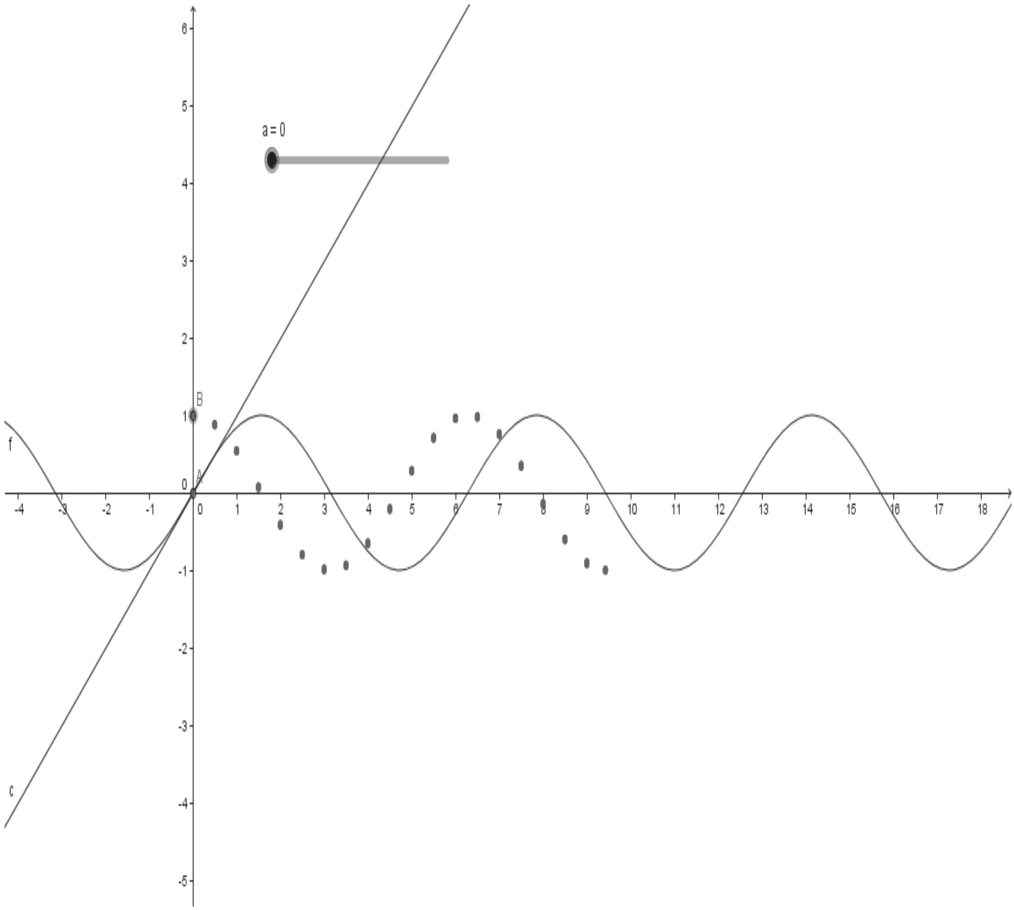
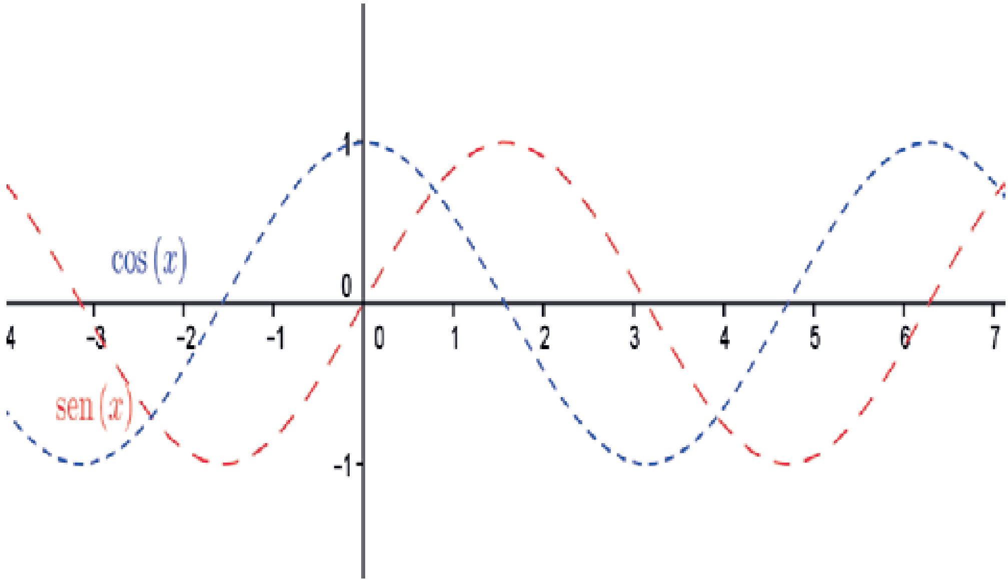


Fig. 3. Funciones seno y coseno.



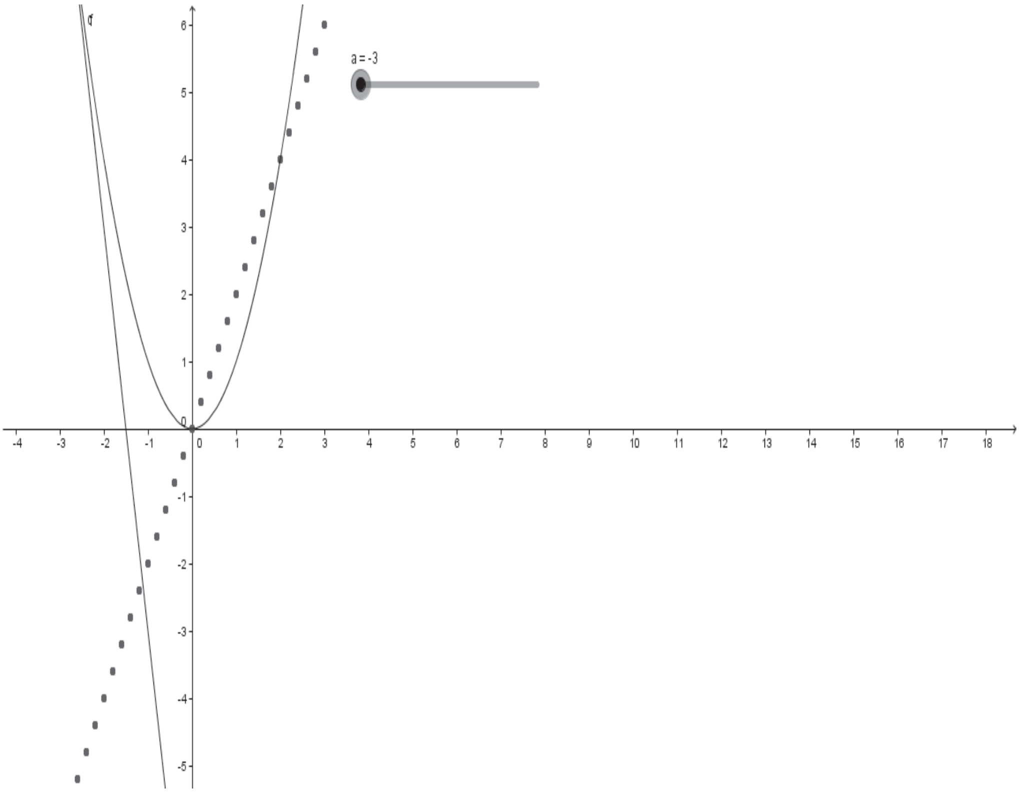
C. Reglas de derivación

Tabla 1. Reglas de derivación

Función	Derivada
$y = k$	0
$y = x^n$	nx^{n-1}
$y = sen(x)$	$\cos(x)$
$y = \cos(x)$	$-sen(x)$
$y = \tan(x)$	$sec^2(x)$
$y = e^x$	e^x
$y = \ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$y = Kf(x)$	$kf'(x)$
$y = f(x)g(x)$	$f(x)g`(x) + g(x)f'(x)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{g(x)f'(x) - f(x)g`(x)}{[g(x)]^2}$

Si desea ver la justificación de estas reglas y sus aplicaciones remitirse a [7], [8], [9] y [10].

Fig. 4. Una parábola y su derivada



En la anterior figura observamos la relación que existe entre una función cuadrática y su derivada que es lineal.

IV. CONTINUIDAD

A. Definición de continuidad

Sea f(x) una función real, diremos que es continua en un intervalo $I = [a, b]$, si intuitivamente, se puede graficar empezando en a y terminando en b, sin levantar el lápiz.

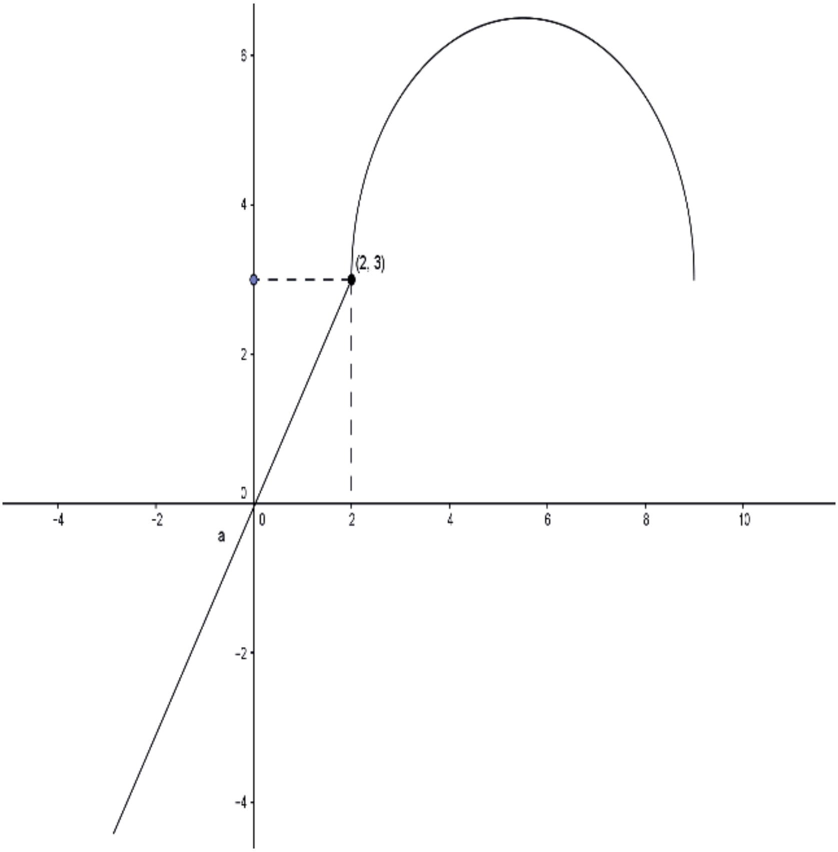
Matemáticamente, la continuidad en un punto $x = c$ se define:

1. $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$
2. $f(c)$ existe
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Por tanto, es continua en el intervalo si lo es en cada punto.

B. Ejemplos

Fig. 5. Función continua en x=2.



Para la función de la Fig. 5. Se tiene

i. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 = \lim_{x\to 2^-} f(x)$
ii. $f(2) = 3$
iii. $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$

Lo cual implica que la función es continua en $x = 2$ por aplicación de la definición.

Las funciones mostradas en las figuras siguientes son discontinuas.

Fig. 5. Discontinuidad de salto

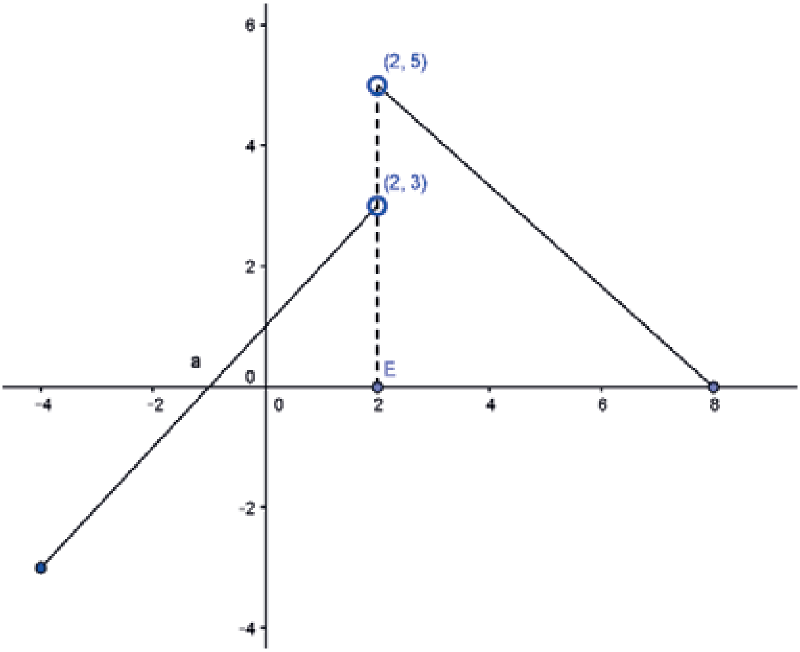


Fig. 6. Función discontinua en un punto

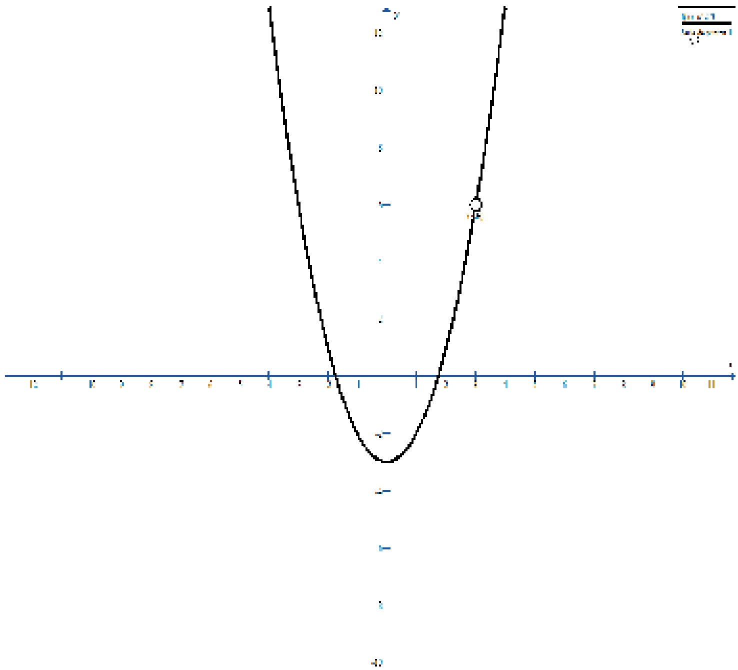
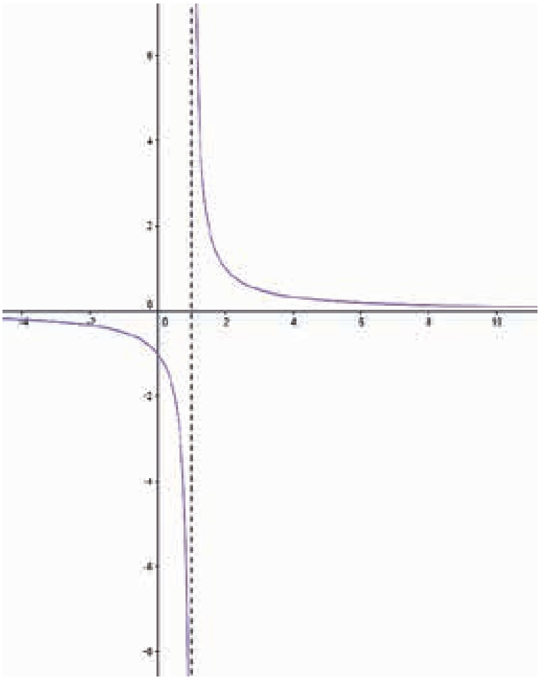


Fig. 7. Función con una asíntota vertical, discontinuidad infinita.



Queda como ejercicio determinar cuál o cuáles condiciones fallan en cada una de las gráficas anteriores.

V. INTEGRALES

A. Definición de integral

Una función f(x) se dice Integrable en un intervalo $I = [a, b]$ si el límite siguiente existe: (Ver [1], [3], [5] y [6])

$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

En tal caso se define la integral definida como

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

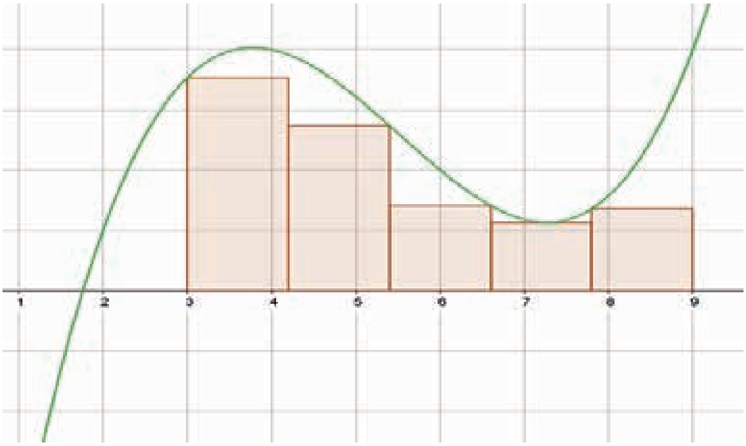
Donde Δ es una partición de I y c_i es un punto cualquiera del intervalo.

Para una elaboración diferente ver [2], [4], [5], [6] y [11].

B. Ejemplo

Veamos la interpretación de la anterior definición (Fig. 8.), en la cual se han tomado 5 intervalos. Debe notarse que si se desea aproximar el área bajo la curva, la presentada acá es poco significativa, puesto que queda un espacio muy grande entre los rectángulos y la curva.

Fig. 8. Interpretación del concepto de integral con 5 rectángulos



En la Fig. 9. y 10. se ven otras aproximaciones.

Fig. 9. Aproximación con 10 rectángulos

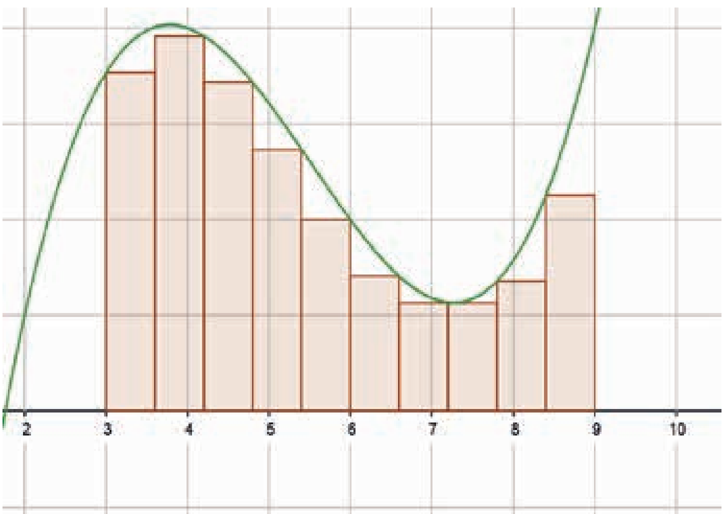


Fig. 10. Aproximación con 30 rectángulos.

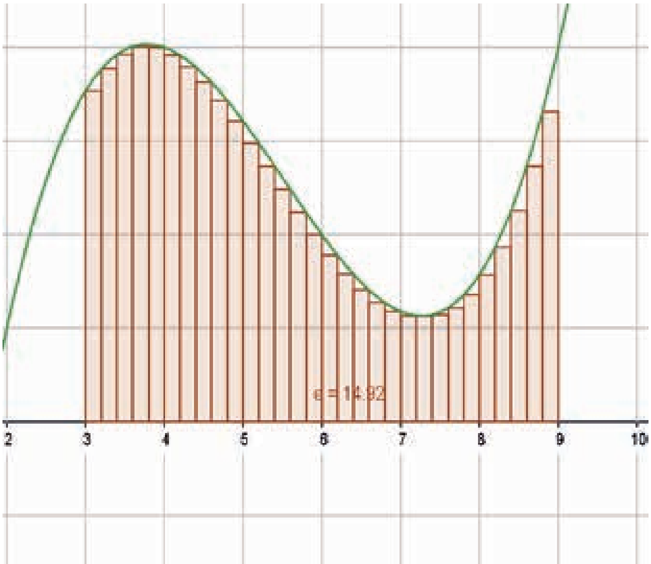


Fig. 11. Empleo de rectángulos por fuera.

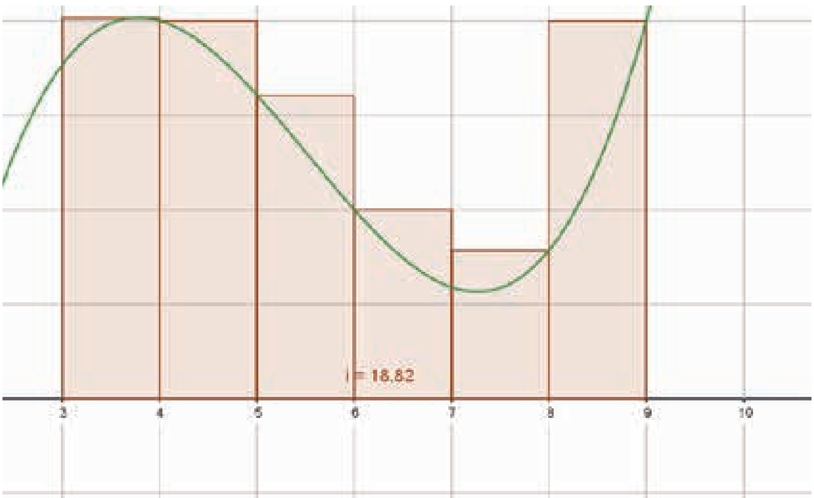
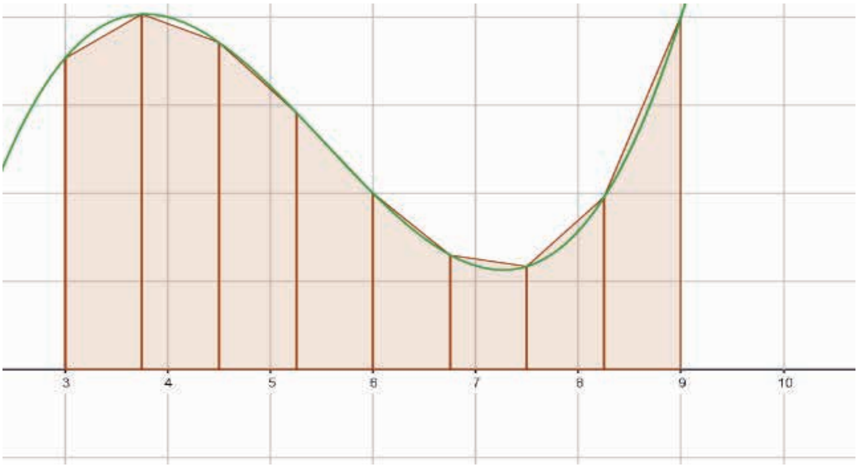


Fig. 12. Uso de trapecios.



En el limite la suma de todos estos rectángulos converge a la integral definida de en el intervalor , lo cual es precisamente la integral, que para esta función por ser positiva corresponde a su área.

Alternativamente, puede también hallarse la integral usando rectángulos externos o cambiándolos por trapecios, esto se observa en las figuras 11 y 12, presentadas a continuación.

REFERENCIAS

[1] E. Clarke, *Circuit Analysis of AC Power Systems*, vol. I. New York: Wiley, 1950, p. 81.

[2] PURCELL, Edwin J. y DALE, Varberg. *Cálculo diferencial e integral.* Novena edición. México: Pearson: Prentice Hall Hispanoaméricana, 2007.

[3] LEITHOLD, Louis. *El Cálculo con geometría analítica.* 7ª edición. México: Oxford University, 2003.

[4] STEWART, James. *Cálculo diferencial e integral.* Segunda edición. Bogotá: Thompson editores, 2007.

[5] DOWLING, Edward T., *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales.* Primera edición. Bogotá: Mc. Graw Hill, 1992.

[6] HOFFMAN, Laurence D. y BRADLEY, Gerard L. *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales.* Primera edición. Bogotá: Mc. Graw Hill, 1992.

[7] STEIN, Sherman K. y BARCELLOS, Anthony. *Cálculo y geometría analítica.* Quinta edición. Bogotá: Mc. Graw Hill, 1994.

[8] STEWART, James. *Cálculo: Conceptos y contextos.* Tercera edición. Bogotá: Thompson editores, 1999.

[9] SWOKOWSKI, Earl W. *Cálculo con geometría analítica*. 2da edición. México: Grupo editorial Iberoamérica, 1979.

[10] WARNER Stefan, CASTENOBLE Steven R. *Cálculo Aplicado.* 2da edición. México: Thomsom Learning, 2002.

[11] ZILL G., Dennis. *Cálculo con geometría analítica.* México: Grupo editorial Iberoamérica, 1987.

Pablo Ardila nacido en Santa Rosa de Osos. Graduado en matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín. Con una maestría en Matemáticas de dicha universidad obtenida en el año 2008. Trabaja en el área de álgebra en particular en teoría de nudos.

Ha sido docente investigador en la UPB, docente ocasional de la Universidad Nacional Colombia, tallerista de la Universidad de Antioquia, actualmente coordina un semillero de investigación, es miembro del Grupo Da Vinci, trabaja en ITM, de la Ciudad de Medellín como docente auxiliar. Este año publicó un Módulo de Geometría Vectorial. Trabaja en la modelación y relación de la música y matemáticas, así mismo en la teoría de nudos y la didáctica de las ciencias exactas para estudiantes universitarios.

El profesor Ardila ha sido ganador el año pasado de la distinción como mejor docente de la Facultad de ciencias exactas del ITM y la distinción Andrés Bello en las pruebas ICFES

Francisco Cordoba nacido en Medellín graduado en Minas y metalurgia de la Universidad Nacional de Colombia, posee una maestría en educación, es candidato a doctor en educación, es el director del Geogebra para Colombia. Trabaja en la parte de educación y nuevas tecnologías.

Su labor docente comenzó en la Universidad Nacional de Colombia, luego en la escuela de ingeniería. En la actualidad en docente asociado de ITM, en Medellín, miembro del grupo de investigación Gnomon. . Este año publicó un Módulo de Geometría Vectorial. Trabaja en la parte de asesoramiento en didáctica, modelación y Tic.

El docente Cordoba es miembro de grupo Gnomon, asesora a varios facultades en didactica, ha sido creador del maestria en educación de ITM.

Paulina Márquez nacida en Medellín estudiante de pregrado en el ITM, del programa de costos y presupuestos. Se interesa por las matemáticas y la parte didáctica.

Es líder del semillero de profundización del Grupo de investigación Da Vinci.