CF 2. UN ESCENARIO DINÁMICO DE EXPLORACIÓN MATEMÁTICA

Liliana M. Saidón
Profesora e Ingeniera Especializada en Recursos Informáticos para la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas
Directora del Centro Babbage y del Instituto GeoGebra de Argentina
Centro de Investigación Babbage – IG Argentina (Instituto GeoGebra de Argentina)
Departamento de Ingeniería
Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM)
San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
lms@centrobabbage.com
centrobabbage@geogebra.at
centrobabbage@geogebra.at
www.geogebra.org

Julio C. Bertúa
Departamento de Ingeniería
Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM)
San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
jcbertua@unlam.edu.ar

RESUMEN: Integrar geometría, álgebra y análisis dinámicamente en actividades mediadas por un software libre como GeoGebra, involucra un reto disciplinar y didáctico para docentes y estudiantes y una recíproca alternativa exploratoria conceptual para la enseñanza y aprendizaje de matemática. Pone en juego, desde ciencias básicas, competencias metamatemáticas propias de abordajes técnicos y matemáticas de sus aplicaciones, «proyectuales» en sentido amplio.

1. INTRODUCCIÓN

Diseñamos situaciones didácticas de matemática dinámica empleando un programa libre en cuyo desarrollo participamos. GeoGebra da pie a un tratamiento algebraico, analítico y geométrico, dinámicamente integrado. Su proyecto promueve el diseño colaborativo, en ambientes *wiki* de aplicaciones organizadas. Admite un abordaje tanto experimental cuanto conceptual respaldando el planteo, modelización y resolución en procesos que serán también objeto de indagación. Consideramos que tal integración, en proyectos adecuados, pone en juego, competencias «metamatemáticas» de orden técnico y matemáticas de sus aplicaciones. Secuenciamos esta comunicación, desarrollando uno de los problemas, que dará contexto a un recorrido, desde el análisis a las conclusiones.

La función del caso-ejemplo

Consideraremos un ejemplo, articulando a través de interrogantes lo descriptivo a lo explicativo, en un encuadre característico de la ingeniería didáctica[1]: El caso de estudio operará como hilo conductor para:

- Partir de una propuesta -Sobre un triángulo- que permite…
  - propiciar cuestionamientos que metodologías cuyo alcance supera el contextual, deviniendo modelo de un tipo de problemas
  - plantear más de un problema, por variaciones sobre los del mismo tipo
  - adoptar distintas –e incluso inesperadas– perspectivas.
- Analizar la actividad emergente

Respecto de lo desencadenado, destacaremos que el docente, además de desenvolver una actividad frente a los alumnos, o con ellos, proyecta y comparte, un modelo de prácticas. Lo meta-comunica en el contexto del desarrollo del que es guía y responsable: enfrentar el planteo, discutir su interpretación, contrastar posibles representaciones que supeditan diversos grados de dificultad de resolución.

Organiza prácticas competentes a tareas, técnicas, tecnologías y teorías propias de lo «proyectual», en el sentido que al término le da ampliamente [Simon1973] al proponer dotar a la ingeniería de un sustrato distinto del de ciencias que, como la matemática, le sirven de base: incluir lo contingente. Plantear problemas y resoluciones que superen lo necesario, al formular modelos para estudiar, más que cómo son las cosas, cómo podrían ser. En resumen, que articulen diseño y proyecto. Iremos describiendo el tenor de las competencias situadas cuya emergencia se procura.

2. DESARROLLO

El planteo de un caso con inusitado tenor de consigna

El desafío puede presentarse en los siguientes términos: «¿Cómo dar con los triángulos de perímetro dado que tengan un área k veces la máxima?»

Frente a un planteo a sabiendas ambiguo, aparece una notoria ruptura de contrato pedagógico[2]. Se transgrede la cláusula global que fija toda consigna como acabadamente clara, accesible,

[1] Se sintetizan, en fichas de cátedra referidas, explicaciones sobre el marco teórico y la metodología de la ingeniera didáctica. Según [Artigue2005] "*Para realizar un proyecto determinado, la ingeniera se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico*.".

[2] Para ampliar consideraciones sobre el concepto de contrato didáctico, contrato pedagógico, costumbre y habitualidad en ámbitos institucionales, referimos a los autores correspondientes: [Brousseau1988]; y [Filloux1974]. Desde perspectivas más genéricas, es decir, no vinculadas a la especificidad de los saberes motivo de la interacción, se proponen conceptos como el de contrato pedagógico. Incluso más amplios, como la de costumbre y hasta el de campo configurado por el *habitus* [Bourdieu1972].

consabida y cerrada; contigua aplicación de lo enseñado/explicado para poner a prueba, sin perder tiempo, lo aprendido. Esta, por el contrario, desencadena una serie de consultas, incluso airadas.

Abre posibilidades de negociar significados[3]: exigen explicaciones alumnos que suelen obviarlas hasta cuando las ofrece el docente –al presentar un tema–. Como sus demandas no exponen a descalificación, por adjudicarse al tenor de la consigna, hacen oír sus voces[4]. El diálogo reemplaza al habitual silencio con que se aceptan indicaciones[5].

Sin Datos Numéricos rumbo a la Figura de Análisis

Este problema no presenta datos, al menos numéricos, y en lugar de «lo dado» aparece lo supuesto: asumir ***k*** sin precisar su valor y aceptar la responsabilidad de averiguar cuál es tal «área máxima» y en qué condiciones se registra.

La negociación dará razón de ser a un recurso «para» y/o «metamatemático» crucial: la dinámica *figura de análisis* cobra entidad como medio para ir interpretando un planteo, en tarea mancomunada y acaso debate supervisado por el docente[6].

El planteo se bosqueja y se va pasando del boceto dinámico al modelo, perfilado como tal en tanto acata la demanda, metamatemática, de resultar representativo con el mayor grado de generalidad posible[7].

Planteo dinámico de triángulo vía inecuaciones en acción geométrica

Con el utilitario, se traza un esbozo del planteo, específico y suficientemente general como para ampliar su alcance[8].

–trazamos frente a los alumnos, un segmento de longitud asimilable al perímetro –se le adjudica una longitud dinámica, concreta pero ajustable–

–el extremo izquierdo del segmento, será el vértice A del triángulo y, aparentemente, sólo resta establecer la posición de los otros dos.

---

[3] En sucesivos documento [Godino2004]., estudia conceptualmente esta cuestión,.

[4] El diseño de consignas propiciadoras de diálogo, se desarrolla en Fichas y notas de [Brousseau2004].

[5] [Young1993] describe críticamente fenómenos de comunicación en situaciones de enseñanza relacionados con roles distribuidos entre los actores, docente y alumnos, sus voces y silencios. [Chevallard1997] analiza sus tácitas atribuciones. Algunas se anotan en Fichas de referidas.

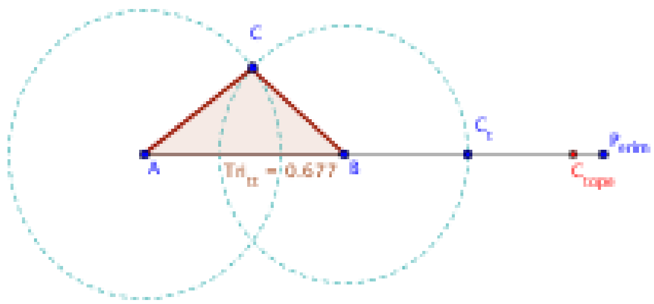
[6] [Legrand1993] analiza las condiciones para un genuino debate en clase y esta, así como otras situaciones de intercambio se resumen en las fichas de cátedra recomendadas [Saidon2001].

[7] Lo metamatemático circula en general de modo implícito. Puede involucrar métodos, estructuras, organización o principios.

[8] Sobre consideraciones sobre el modo de representar con GeoGebra, conviene consultar el manual recomendado [Saidon2001-2009].

Aparece una primera cuestión de debate matemático –irán apareciendo más sorpresas– que no se evidenciaba a nivel de la consigna: sin valores «dados», ¿cómo empezar el trazado?, ¿a qué medidas se recurre? Esta cuestión, que no siempre se explicita, exige remontar una acendrada costumbre escolar: los dibujos

Figura 1: Trazamos los triángulos posibles



representativos de figuras o construcciones descansan en el conocimiento de alguna medida concreta. Así, se relaciona, por un lado con lo sensible y por otro con lo aritmético –por no algebraico–.

En contraste, esta propuesta parte de lo algebraico. Porque exige modelización hasta para el planteo. Más aún, da lugar a condiciones que cumplen infinitos pero simultáneamente, no arbitrarios triángulos. Suelen ubicarse en cualquier posición el vértice B y luego, el C y se traza el triángulo resultante de la intersección de sendas circunferencias (Figura 1). Regularidades de comportamiento teóricamente conocidas, harán su aparición a lo largo de las prácticas de tanteo sobre la figura de ensayo. Irrupción sorpresiva pese a que propiedades matemáticas básicas dan cuenta de su inteligibilidad[9].

Tanteo Dinámico

El tanteo dinámico del boceto de ensayo tiene un propósito explícito: dar con el –o los– triángulos de mayor área. La exploración desencadena una experiencia reveladora: el triángulo ocasionalmente, deja de existir. Esto suele desatenderse y es obviado aún por estudiantes de sólida formación matemática. Acaso la denegación evita la inesperada perturbación a la prosecución tenaz de un logro –como el del área máxima–.

[9] [Doaudy1986] analiza la dialécticas herramienta objeto involucrada en esta cuestión. La inversa resignificación y actualización de un saber supuestamente dominando ya como objeto que, sin embargo, debe re-conocerse en este contexto, se estudia en el texto de [Piaget1989].

Tal falta de reacción –ante lo que debiera «saltar a la vista» según espontáneas expectativas empiristas–, deja al docente oscilando entre la prescindencia, el sondeo discreto y la procura de intervenciones adecuadas[10].

Inconmensurabilidad inicial de las teorías de apreciación

Verificamos en repetidas ocasiones que la desaparición del triángulo es obviada por los estudiantes, y aún nos desconcierta. Según registramos e inferimos: sólo al reiterarse y ganar cierta previsibilidad en acción, este fenómeno se integra consistentemente a la apreciación y, recién entonces, se asume plenamente este nuevo problema, como tal.

Procuramos sucesivas explicaciones sobre la omisión. Máxime cuando la expectativa –de optimismo didáctico–, hubiera podido ser que frente a lo observado, surgiera la espontánea elaboración de conjeturas explicativas. Por el contrario, lo que se verifica, es que el fenómeno siquiera resulta observable inicialmente y sólo se lo integra cuando ya no se lo puede evadir –acaso cuando es dable una pre-conjetura–. Convenimos en que, si bien las conjeturas pueden aparecer en diversas formas, no es habitual que surjan de la observación y no toda vinculación entre elementos resulta observable a priori.

Por evidente que aparezca a los ojos del docente, es poco probable que se elaboren conjeturas por registro visual. Es más factible que se despierten sospechas metódicas a partir de un patrón de resultados proveniente de acciones propositivas. Es decir, que pretenden alcanzar un objetivo, en desafíos que interpelan, por ejemplo: con este estilo: «¿cómo harías para…?». En este caso, registrar el rango de variaciones respecto del área máxima. Cabe cuestionar en qué condiciones, entonces, el registro en relación con el propósito, lleva a incluir como observable la desaparición del triángulo.

De la geometría sensible a los modelos algebraicos

No bastará, –para explicar la desaparición–, con «aplicar» las condiciones de existencia del triángulo que –estudiadas en el ámbito de la geometría sensible– no parecen re-conocerse en este contexto. Incluso cuando se distinguen; cruzarlas al marco algebraico como inecuaciones para fijar los límites de la posición de cada vértice, no es banal.

Se ha desencadenado otro conflicto contractual: una transgresión de la convencional estructura estanca de administración de «aplicaciones». Se extraña el prototipo que ofrece la materia pre-organizada, con conceptos, definiciones, deducciones y aplicaciones preconcebidas; la sucesión de problemas que ilustran respuestas delimitadas e inconexas. El clásico abordaje y tratamiento

[10] Las relaciones entres los resultados de la investigación en didáctica y el desempeño docente en clase, aparecen vívidamente en tales situaciones. Referimos a [Brousseau2002] al respecto.

estático de los objetos parece haber cedido su lugar al relacional, proyectado y transitado en el medio dinámico.

3. CRISIS Y SIMULACIÓN

Se hace palpable la crisis que, cuando se supera, deja como saldo la conquista de una competencia disciplinar y meta-cognitiva decisiva.

Crucial, porque forma parte del repertorio básico requerido a vierto nivel: la síntesis situada y oportuna de técnicas, tecnologías y/o teorías, como herramienta funcional.

Esto lleva a cuestionarse: «¿Cómo puede el resultado de estos ensayos dinámicos informarnos de relaciones que debiéramos haber previsto dado que corresponden a propiedades geométricas elementales?». La respuesta no es trivial y presenta cierto paralelismo con aportes de [Simon1973] respecto de la simulación. Así como "l*a simulación no es mejor que los supuestos que entraña*", un utilitario dinámico no puede hacer más que lo que la construcción planteada fija en cuanto a relaciones entre sus elementos. En otras palabras, la simulación puede decirnos lo que no sabemos o lo que no tuvimos en cuenta. Ya que puede resultar difícil descubrir lo que se desata.

Qué es lo que suponen y desencadenan las vinculaciones que fijamos en términos de renovadas relaciones entre elementos resultantes, al implementar la construcción. Una construcción dinámica constituye un sistema de relaciones entre elementos, pero no es sencillo hacer un empleo directo y anticipado de todas las derivaciones resultantes: debe recorrerse el sistema con un propósito, para distinguir consecuencias de las definiciones, propiedades y vinculaciones establecidas. La exploración, guiada por propósito/s específico/s, lleva a indagar en los mecanismos derivados de cada construcción dinámica y puede procurarnos medios de distinción y hasta de (re)descubrimiento.

Aún conociendo las relaciones establecidas, sólo al explorarlas notamos las implicaciones de las reacciones cruzadas derivadas de las condiciones iniciales fijadas. Esto no es sino una puesta en acción dinámica de lo que habitualmente ofrecen las manipulaciones en álgebra, que analizamos con los recursos del cálculo. La integración de marcos matemáticos en torno a un problema cuyo modelo se va definiendo en el devenir de la resolución, actualiza competencias que el docente proyecta en esta instancia formativa, que la situación propicia.

Problemas de Diseño / Diseño de Problemas

Es característico de diversos tipos de problemas que el sistema consista en elementos cuyas relaciones y pautas de actuación se conocen: la dificultad la entraña predecir cómo se comportará el conjunto dinámico y relacionado de sus componentes[11]. Sin agotar sus derivaciones, pasamos a estudiar el problema como ejemplo de un tipo de situación didáctica y organización disciplinar, de matemática «proyectual».

4. RASGOS DEL CASO: MATEMÁTICA PROYECTUAL

Un utilitario que habilita la modelización dinámica desde el planteo, la representación y el análisis, abre varias puertas simultáneamente. Tanto para la resolución cuanto para el diseño de problemas. Establece un replanteo disciplinar por el alcance de lo que nos podemos cuestionar, antes que por el modo de resolver lo planteado. En un recorrido habitual, los primeros planteos con tal herramienta, suelen dinamizar explicaciones para que los estudiantes las exploren, corroborando lo que se estudia.

Es representación usual que una capacitación procure un modo de enseñar, con nuevos medios, lo mismo.

Sin desmedro del valor involucrado, las tecnologías integradas a la práctica profesional, docente y disciplinar, las TICs en particular, pueden aspirar a ser más que un recurso didáctico privilegiado.

Al avanzar en producciones colaborativas, prospera el empleo del banco de pruebas conceptual dinámico.

Se perfilan problemas que, como el ilustrado en el caso desplegado, ponen en juego, desde ciencias básicas, competencias «metamatemáticas». Son propuestas que llevan, por ejemplo, a indagar cómo funciona una construcción. Pasando de:

1. **experiencias simples** para ver lo que sucede. «Mover y ver qué pasa» Se registra simultáneamente, comprensión de lo que habría que hacer e incomprensión de las relaciones que permitirían hacerlo.
2. **nivel de exploración intermedio**. En que están más claros los fines a alcanzar pero el empleo de los medios permanece vinculado a ensayos con logros parciales o fracasos no siempre comprendidos.

En este nivel, pueden contestarse algunas preguntas del orden del: ¿Cómo…? y empiezan a formularse otras: "Si lo desbaratara a propósito, ¿podría volver a conseguirlo?"; "¿Sólo de este modo?"; "¿Siempre así?"; "Puedo explicarle a un compañero cómo lograrlo sin operar el mouse directamente?" Interrogantes de este tipo pueden jalonarse en intervenciones docentes. Las del orden de "¿Cómo saber si se está cerca o no, de cada logro?", abren el siguiente nivel.

3. nivel de experimentación

-*instrumental*, en que aparecen anticipaciones y programas de acción.

[11] Los presupuestos de [García1996], complementan en debate a los de [Simon1973].

-*de modelización*, es preciso concebir y fijar indicadores para el control.

Los rasgos «proyectuales» se distinguen en este proceso que se recorre operando y analizando el resultado de cada intento. Inicialmente es frecuente el ensayo y error. Paulatinamente, se gana en responsabilidad sobre el resultado de cada intento, a medida que se distinguen relaciones causales entre lo que se hace y lo que sucede. En la actividad «proyectual» se integran también tareas y técnicas que permiten delimitar lo que no resulta y devienen observables las relaciones funcionales en juego.

Metodologías en el Recorrido

En cada uno de los momentos del recorrido, pueden distinguirse tareas que ponen en juego ciertas conjeturas –las preliminares pueden circular en acción–. Descartar una, habilita el surgimiento de otra, enriquecida por el rescate constructivo de lo que no resulta. Constructivo, sobre todo, cuando en lugar de obnubilar, el "fracaso" abre paso a una explicación, al menos tentativa, de las condiciones de alcance y límites de lo involucrado. Cuestionar, buscar indicios para elaborar una respuesta acorde y decidir en consecuencia, es una actividad que permite tanto poner en juego propiedades, condiciones y correlaciones presentes cuanto distinguir propiedades excluidas, requerimientos que no se cumplen, condiciones que no se verifican. Se institucionaliza el control y registro de lo que no corresponde o tiene relación con lo intentado, dando entidad a este modo de extender resoluciones, más allá de este contexto[12].

Tanto en tareas propias de este problema, como en las que, eventualmente, encontremos en otros contextos y/o resulten del mismo tipo.

Tal evaluación positiva, no ya del «error del que se aprende» sino de las tareas, técnicas y metodologías para delimitar alcances y descartar conjeturas, tiene poca tradición escolar pese a su implícito reconocimiento en prácticas académicas, profesionales y disciplinares.

Cambios en la índole de las tareas

Alcanzamos un nivel de avance sustancial en la representación del planteo. A expensas de la figura de análisis y tanteo, nos hemos deslizado a la resolución, sin saltos notorios entre una actividad y otra. Destaquemos el establecimiento de los extremos límites de la posición de cada vértice, por ejemplo.

Puede haber requerido manipulación algebraica para re-formular las conocidas condiciones de existencia del triángulo en términos de comparación con el perímetro –o, mejor, del semi-perímetro–. En esta instancia, la experimentación involucra el estudio de una obra u objeto matemático como tal.

[12] [Brousseau1994] define la «institucionalización» en el texto de referencia.

Las inecuaciones correspondientes instrumentaron la mejor preparación del banco de pruebas en que va deviniendo la construcción, al modelizar el planteo. Si no se conocían o recordaban las condiciones de existencia del triángulo, emergen re-significadas desde el contexto que las requirió como herramientas. Contexto que en el mismo movimiento, da razón de ser a su estudio como objeto. Esta tensión dialéctica propia de la dualidad herramienta-objeto[13], va a reiterarse al avanzar sobre el modelo, hacia la resolución.

Entre modelos y simulaciones

Para averiguar cómo *funciona* la construcción, se identifican indicadores diagnósticos. Precisos, de buen grado de generalidad, que lleven a establecer mejores procedimientos y guíen los ensayos. Como medir y controlar el área del triángulo construido, en un registro que mantendrá su índole causal, integrando otras representaciones. Cuando se evidencia que es preciso indagar los cambios –incrementos, decrementos, anulación, registro de valores máximos, etc.–, se asume otro tenor de tareas Evaluar el régimen de cambios de una medida, es el tipo de tarea por excelencia, del análisis.

Los estudiantes pueden encontrar sorpresiva esta demanda: el proceso hacia dar con el resultado del problema, no involucra un valor –correcto, preciso–, ni siquiera una operación algebraica, sino la indagación del modo en que se registran modificaciones. Es, inicialmente una tarea de índole cualitativa, comparada con las de otro tipo de problemas. Es más, en la medida en que estamos considerando cómo funciona el modelo producido, estamos recurriendo a una simulación «intramatemática».

La experiencia del lugar geométrico y su exploración

Con el utilitario, puede trazarse el lugar geométrico del vértice C de cada triángulo de igual base, al modificar la proporción entre los otros dos lados.

[13] [Douady 1986] desarrolla esta dialéctica relación herramienta-objeto además de establecer la potencialidad del interjuego de marcos diversos en matemática.

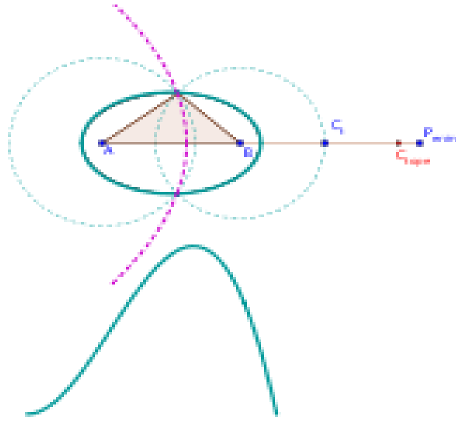


Figura 2: Esbozo del modelo

Este paso suele requerir una intervención docente, para explicar, además de la operatoria, sencilla, qué se entiende por lugar geométrico.

El trazo resultante parece familiar. Se ve como una elipse y es probable que lo sea. Incluso, los valores de altura y área, varían de un modo afín. Se juzga necesario corroborar lo aparente y con el utilitario, arriesgamos la primera comparación. Se contrastará el lugar geométrico con la cónica que atraviesa cinco de sus puntos.

El docente da explicaciones y la operatoria se salda con facilidad.

El alcance de la comparación no resulta inteligible para los alumnos. Máxime que el ajuste es preciso, sin diferencia entre trazos que coinciden y se superponen, Incluso se desencadena confusión cuando la comparación booleanas con el signo de interrogación, no puede llevarse adelante porque operaría sobre dos objetos de diferente orden. Es necesario estudiar ambos como objetos específicos: el lugar geométrico y la ecuación y representación de la cónica, para darle a cada uno, la entidad correspondiente. Las técnicas, así, aparecen explicadas tecnológicamente y estudiadas a nivel teórico.

Experimentando hacia la formulación

Para resolver el problema, es preciso relacionar las proporciones entre los lados y la consecución del área máxima.

Hay una, casi observable, para cada base. Pero es preciso encontrar qué ejemplar de la familia de bases-elipses nos ofrece la mayor de las mayores áreas. Entre lo que habilita el gráfico de estas correlaciones –que se aprecia en la Figura 2–, el registro de datos y el rescate de fórmulas –como la de Herón–, nos acercamos desde distintos frentes a cierta convicción, que se puede terminar de corroborar recurriendo al cálculo.

La variedad de ejemplares de distintas familias de triángulos que cumplen la consigna, pueden contemplarse aún sin contar con una formulación precisa. Esta respuesta abierta se dirige a nuevos interrogantes de orden cualitativa y matemáticamente más avanzados. Los dejamos a su cargo en la continuidad de colaboraciones que, confiamos, abra este intercambio.

5. CONCLUSIONES

Recapitulamos, lo que acorde con nuestra experiencia resulta singular:

- Esclarecer un planteo, simple en apariencia, requirió una tarea cooperativa
- Interpretarlo, intercambios de debate en clase, guiado por el docente
- Trazar un boceto representativo, llevó a explicitar relaciones
- Explorar el comportamiento de la construcción, abrió un registro inicial, causal
- Considerar dinámicamente la formulación algebraica y la representación gráfica, llevó a renovar las tareas del análisis matemático.
- Examinar el boceto como soporte de inferencias y ensayos, lo elevó a modelo en términos de simulación dinámica.
- Estudiar el modelo, llevó a cruzar aportes de diversos marcos matemáticos
- Reformular la generalidad del modelo, a validar sus limites y alcance
- Establecer sucesivas conjeturas, escalonó etapas de progresiva inteligibilidad
- Distinguir respuestas del conjunto de diversas pero no arbitrarias resoluciones posibles, dejó abierta la necesidad de recabarlas sistemáticamente.

En este recorrido, se actualizaron competencias situadas de aplicación matemática a un problema en que, a nivel estrictamente disciplinar:

- operamos con inecuaciones para establecer extremos correspondientes a las condiciones de existencia del triángulo
- reencontramos las cónicas en el camino de exploración geométrica
- las formulamos en la experimentación que corrobora ese «pálpito elíptico».
- al re-estudiar ecuaciones y gráficas, los modelos ganaron precisión y versatilidad.

La última etapa podría concebirse como un caso de control que lleve a la búsqueda del lugar geométrico de los puntos que verifican la condición k veces el área máxima.

Desde la perspectiva del diseño, consideramos central la organización disciplinar y didáctica de cuestiones a ser tratadas en banco de pruebas que el utilitario habilita para su estudio dinámico concreto y, de forma paradójica: conceptualmente matemático.

Conceptual en tanto lleva a relacionar y condicionar lo que se pretende hacer con lo que se logra.

En cuanto a la actividad desencadenada, distinguimos el modelo de prácticas que proyecta el docente frente a sus alumnos y la índole «proyectual» de la resolución, Al contrastar lo proyectado con los resultados obtenidos, se apela al utilitario para resolver problemas con una metodología que permite plantear la reflexión sobre lo que se está creando –en la interacción entre sujeto y objeto– y controlando simultáneamente.

El objeto se perfila, al establecerse como ente susceptible de exploración-control y al extenderse el campo de análisis, práctico antes que formal, se escala hacia conjeturas (causales) desde la acción resolutiva.

Nos encontramos simulando sobre el modelo y sobre el modelo de su comportamiento, desplegando, instrumental y conceptualmente, competencias propias de aplicaciones de alto nivel, ya desde ciencias básicas.

Referencias

1. Simon, Herbert (1973), “Ciencias de lo Artificial”, Barcelona: A.T.E.
2. Artigue, M. (1995), “Ingeniería didáctica en Educación Matemática”, Grupo Editorial Iberoamericano.
3. Brousseau, G. (1988). "Le contrat didactique: le milieu". RDM
4. Filloux, Janine (1974). «Du contrat pédagogique». Dunod. París.
5. Bourdieu, Pierre (1972), "Estructuras, habitus y prácticas", en Esquisse d 'une theorie de la practique, L. Droz- París.
6. Godino, J. (2004) “Implicaciones Metodológicas de un Enfoque. Semiotico-Antropológico para la Investigación” en “Didáctica de las Matemáticas” Granada
7. Brousseau, G. (2004) “Introducción al estudio de enseñanza del razonamiento y prueba: paradojas” en “Proof./Preuve Int. Newsletter”
8. Young, Robert (1993), “Teoría crítica de la educación”, Editorial Paidós
9. Chevallard, Y, Bosch, M. et Gascon, J. (1997): “Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje”. Barcelona: ICE/Horsori.
10. Legrand M. (1993).“Débat scientifique en cours ”, Repères IREM. Paris.
11. Saidon, L (2001) “Enseñanza con Utilitarios” – Ficha de Cátedra de Centro Babbage del curso Resolución de Problemas con Utilitarios.

12. Saidon. L. (2001-2009) “Manual Oficial del GeoGebra” – www.geogebra.org
13. Douady, R. (1986). “Jeux de cadres et dialectique outil-objet” RDM.. París
14. Piaget, J; García R. (1989), “Hacia una lógica de significaciones” Barcelona. Gedisa
15. Brousseau, G. (2002), “Cobayes et microbes”. Traducción tomada de textos de un Proyecto de Investigación (2003-2007) del Centro de Investigación Babbage.
16. García, Rolando (1996) “Sistemas Complejos” Editorial Gedisa.
17. Brousseau, G (1994) «Perspectives pour didactique des mathématiques. Vingt ans de Didactique des Mathématiques». Hommage a Brousseau et Vergnaud. Pensée Sauvage
18. Brousseau, G (1994) “Los diferentes roles del maestro” en Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones Paidós Buenos Aires.