PO22. RELACIÓN AFÍN ENTRE EL ÁLGEBRA Y LA GEOMETRÍA.

Pablo Felipe Ardila Rojo
Matemático de la Universidad Nacional sede Medellín
Magister en Ciencias matemáticas de la Universidad Nacional Sede Medellín
Docente Auxiliar del ITM. Miembro del grupo Da Vinci
pabloardila@itm.edu.co
pablofelipea@yahoo.com

RESUMEN: Una de las dificultades en la enseñanza de las matemáticas a nivel superior, es el poco manejo por parte del los estudiantes de conceptos que requieren abstracción, tales como: grupos, campos, anillos, etc. Esto debido a que en el proceso natural de aprendizaje dichas estructuras no son tenidas en cuenta y la educación tradicional hace más énfasis en la memorización y en la operatividad, sin prestar mucha atención a los procesos de razonamiento y deducción, esto sólo mecaniza, descuidando el verdadero fin de las matemáticas. Las repercusiones de tales vacíos se tendrán no solamente en las personas que desean seguir estudios en la línea de ingeniería, sino, que en la vida cotidiana afectan procesos que conllevan el manejo de simetrías, generalizaciones, y de forma más general la abstracción de conceptos.
Se pretende mostrar y construir de una forma didáctica empleando, figuras geométricas (triángulos, cuadrados, pentágonos, etc.), el camino más natural para formalizar los siguientes conceptos: simetrías, rotaciones, imágenes especulares, figuras geométricas, semejanza de triángulos, grupos, grupos simétrico, grupo de permutaciones.
La idea principal de este trabajo es presentar una nueva manera de enseñar conceptos matemáticos, usando los ya conocidos, que gracias a la geometría, puedan ser operados de forma natural.

Descriptores. Álgebra abstracta, geometría, teoría de grupos, simetrías, grupo simétrico, permutaciones.

INTRODUCCIÓN

Desde sus orígenes la matemática siempre ha tratado de responder a las inquietudes y necesidades naturales del ser humano, por ejemplo, el saber quién tiene más dinero, cuánta ganancia me deja el vender este artículo a un determinado precio sabiendo a como lo compre, o el determinar que terreno puede albergar más ganado, así mismo, se pretendió clasificar la naturaleza en razón a sus formas, tamaños, dimensiones, atributos todos ellos externos, en la solución a estos problemas tenemos los orígenes de la aritmética y la geometría. El álgebra surge un poco después pretendiendo simplificar y generalizar la aritmética, para innumerables aplicaciones que requerían un grado más complejo de abstracción y en la cual los símbolos reemplazan a los números.

HISTORIA

La palabra «álgebra» deriva del tratado escrito por el matemático persa Muhammad ibn Musa al-jwarizmi, titulado *Al-Kitab* **al-Jabr** *wa-l-Muqabala* (en árabe كتاب الجبر والمقابلة) (que significa "Compendio de cálculo por el método de completado y balanceado"), el cual proporcionaba operaciones simbólicas para la solución sistemática de ecuaciones lineales y cuadráticas. Etimológicamente, la palabra «álgebra» (también nombrado por los árabes *Amucabala*) جبر (yebr) (*al-dejaber*), proviene por lo tanto del árabe y significa "reducción", operación de cirugía por la cual se reducen los huesos luxados o fraccionados (*algebrista* era el médico reparador de huesos).

Como se dijo al principio el Álgebra abstracta, cual surge como una herramienta para estudiar y clasificar estructuras matemáticas que hoy son conocidas con los nombres de: grupos, anillos, campos, etc. A partir del siglo XIX, muchas estructuras matemáticas se formalizan, motivados por una necesidad de rigurosidad y exactitud. Un resultado muy importante es que estructuras tan diferentes podían ser relacionadas, por medio de un mismo concepto, tal es el caso de los números racionales y los números enteros, que pertenecen a la categoría de los grupos ABELIANOS. Se le dio el nombre de álgebra abstracta para diferenciarlo del álgebra elemental, la que trata de las reglas relacionadas ala manipulación de fórmulas y expresiones algebraicas que involucran a los números realas y complejos.

De más antigüedad que el álgebra, la geometría, tiene sus orígenes anquilosados a cada cultura y sin lugar a dudas podemos afirmar que es tan antigua como la humanidad, así es como hace más de 5000 años en el antiguo Egipto era empleada para medir predios y en la construcción de monumentos tales como pirámides y templos, gran parte de los cuales se conservan hoy como testigos de una civilización, que brillo con luz propia. Etimológicamente, provienen de los vocablos griegos, *geo* que significa tierra y *metrón* el cual significa medida, por tanto es la ciencia que se encarga de la medida de la tierra. El matemático Thales de Mileto, hace 8 siglos, comienza a usar el método demostrativo, pero es en los trabajos de Euclides, donde se ve axiomatiza y sistematiza, Euclides reúne todo lo hecho en su época y lo transfiere en forma de un tratado que llama Elementos de Geometría, el cual hoy en día con algunas modificaciones es usado como texto en casi todos los centros de formación a nivel medio y universitario. El método de Euclides es tomar conceptos no demostrados, que llamará axiomas, relacionarlos con conceptos, de punto, plano, recta, espacio, y usando algunos postulados, comenzar a probar teoremas, de los cuales se desprenden los corolarios y lemas.

Lo paradójico, es que hoy en día debido a la falta de preparación o la excesiva rigurosidad de algunos docentes, se ha transformado la enseñanza de estos conceptos en un camino tortuoso, fuera de todo contexto, por otro lado, no podemos caer en la tentación, de presentar una matemática acomodada a la mediocridad del receptor o el emisor, es el punto de equilibrio el que permite una comunicación asertiva y efectiva, formando en los estudiantes una mentalidad reflexiva, que les permita aportar desde su perspectiva a la solución de problemas en su campo de acción.

RAMAS DEL ÁLGEBRA ABSTRACTA

El siguiente cuadro presenta algunas de las estructuras algebraicas más conocidas acompañadas de las características más importantes y un ejemplo ilustrativo.

Nombre	**Características**	**Ejemplo**
Semigrupo	Clausurativo, asociativo.	(N, +)
Monoides	Clausurativo, neutro, asociativo.	(N,*)
Grupo	Clausurativo, asociativo, neutro, inverso.	(Z,+)
Anillo	Grupo conmutativo respecto a la suma, asociativo respecto a la multiplicación, distributivo.	(Z,+,*)
Espacios Vectoriales	Grupo conmutativo respecto a la suma. Con relación al producto por escalar, es clausurativo, asociativo, distribuye respecto a la suma en el espacio, el producto distribuye en relación ala suma de escalares, existe neutro respecto al producto.	(R , +, **.**)
Campos	Grupo conmutativo respecto a la suma, y grupo conmutativo respecto a la multiplicación para todos los elementos diferentes de cero.	(R,+,*)
Módulos	Un grupo abeliano sobre un anillo. Clausurativo, distributivo con relación a los elementos del anillo, asociativo.	Un grupo abeliano es un módulo sobre los enteros.
Álgebras	Un espacio vectorial sobre un campo. Distributivo, asociativo respecto a los elementos del espacio vectorial.	Los complejos sobre los reales.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA.

En este aparte presentaremos algunos conceptos de carácter técnico que están involucrados en el desarrollo del álgebra.

Grupo: Un grupo $\langle G,*\rangle$ es un conjunto G, dotado de una operación binaria * en **G**, tal que los siguientes condiciones se satisfacen

- La operación binaria es asociativa.
- Existe un elemento **e** en **G** tal que **e*****x**=**x*****e**=**x** para todo **x** en **G**. El elemento **e** es llamado elemento identidad.
- Para cada **x** en **G**, existe un elemento **x'** en G con la propiedad que **x' *x**=**x*x'**=**e´,** el elemento **x'** es llamado el inverso de **x.**

Un claro ejemplo de esta estructura es el conjunto de los números enteros con la suma, en efecto, si x, y, z representan dos números enteros, entonces

i) (x+y)+z=x+(y+z)

ii) x+0=0+x=x

iii) x+(-x)=0

Además, se tiene que es conmutativo, por que, x+y=y+x. Un grupo, que además sea conmutativo es denominado, grupo abeliano, este nombre en honor al matemático Abel.

Cada grupo finito, posee una tabla en la cual se representan todas las operaciones internas, así por ejemplo, el grupo Z_4 posee la siguiente tabla de sumar

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	2
3	3	0	1	2

Tabla 1. Tabla del grupo Z_4

Pero qué significa Z_4 para nuestros estudiantes? La respuesta está en los residuos obtenidos al dividir cualquier número por 4, tomemos 24, 25, 26 y 27, cuyos residuos respetivos, son 0, 1, 2 y 3, por tanto el número 24 está en la clase del 0, el 25 en la clase del 1, el 26 en la clase del 2 y el 27 en la clase del 3. Todo esto lo podemos resumir en la siguiente tabla.

Representante	**Elementos de la clase**
0	4, 8, 12, 16, 20, 24,…
1	5, 9, 13, 17, 21, 25,…
2	6, 10, 14, 18, 22, 26,…
3	7, 11, 15, 19, 23, 27,…

Tabla 2. Clases en Z_4

Notemos que dichas tablas pueden ser elaboradas por nuestros estudiantes, inclusive desde la primaria, generando a su vez el ambiente para la presentación de nuevos conceptos, y así facilitar los procesos de abstracción. Una actividad complementaria es la realización de tablas de grupos como Z_5, Z_6, Z_7, Z_8, Z_9 y luego preguntarle a los estudiantes, qué pasa con Z_5, Z_7, será que hay relación con que el número de elementos sea un número primo?

De la tabla para Z_4, también podemos una tabla más pequeña formada por 0 y 2

+	0	2
0	0	2
2	2	0

Tabla 3. Subgrupo de Z_4

Esta tabla corresponde a lo que matemáticamente se denomina un subgrupo, que coloquialmente hablando es un grupo dentro de otro grupo. Téngase presente que el cero está y que el inverso de 2 es el mismo 2.

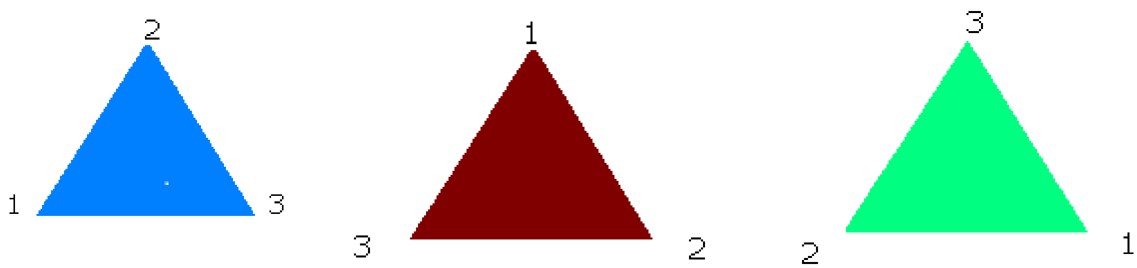
Otro concepto útil en este contexto, y que se sigue a partir de la definición de grupo, es el grupo simétrico, que se obtiene a partir de todas las posibles permutaciones para un grupo de n elementos. Consideremos, el conjunto $B = [1,2,3]$, establezcamos las posibles permutaciones en B. Para ello se tienen

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \delta_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \delta_3 = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \delta_4 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}, \delta_5 = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \delta_6 = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$$

Se sigue de lo anterior, que δ_1, corresponde a dejar todos los valores del conjunto A quietos. Mientras que δ_3 me dice que el número 1 se va en el número 3, el número 2 se va en el 1 y el número 3 se envía en el 2.

Aplicaciones a la geometría.

El problema anterior nos permite ahora dar una relación entre la geometría y el álgebra, para ello tomemos un triángulo equilátero, con vértices 1, 2 y 3, luego apliquemos rotaciones de 120° en el sentido horario, dichas rotaciones aparecen en la primera fila de la figura y coinciden con δ_1, δ_2 y δ_3.

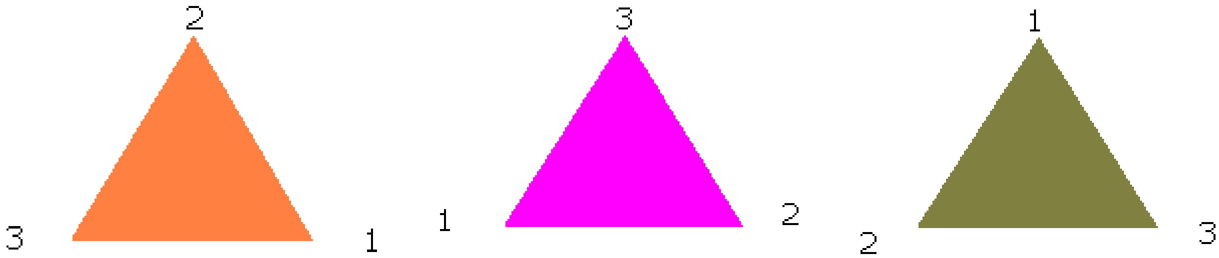


$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} \qquad \delta_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} \qquad \delta_3 = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}$$

Figura 1

Si tomamos un vértice como punto fijo, podemos rotar 180° alrededor de el, esto nos da un nuevo conjunto de de funciones las que llamaremos δ_4, δ_5 y δ_6, mostradas en la Figura 2.

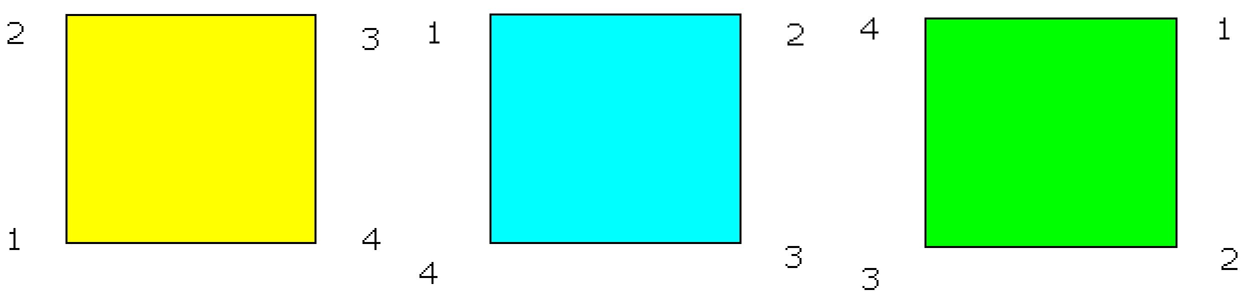
Las Figuras 1 y 2 corresponden al grupo conocido como S_3. Un ejemplo un poco más complicado se obtiene tomando un cuadrado con lados 1, 2, 3 y 4, denotaremos por ρ_0, ρ_1, ρ_2 y ρ_3, las



$$\delta_4 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} \qquad \delta_5 = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} \qquad \delta_6 = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$$

Figura 2

rotaciones del cuadrado de 90°, μ_1 y μ_2 simbolizarán imágenes espejo usando mediatrices y δ_1, δ_2 corresponden a reflexiones tomando los vértices.



ρ_0 ρ_1 ρ_2

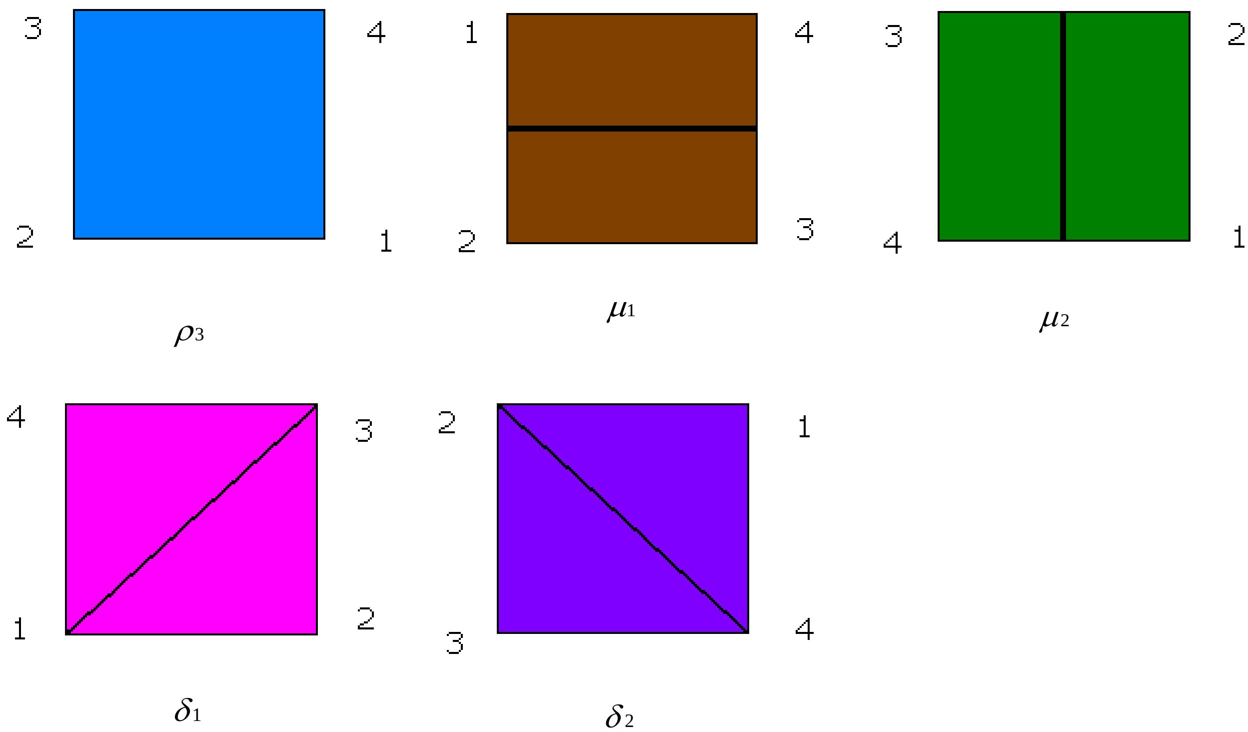


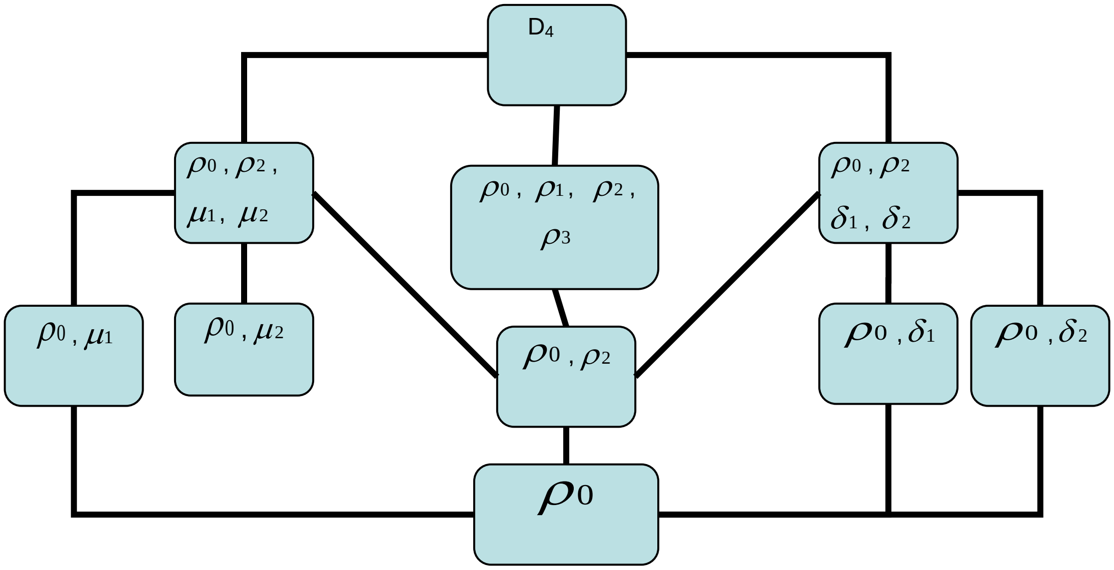
Figura 3

El grupo dado en al tabla anterior es conocido como D_4, es uno de los primeros grupos no abelianos, es decir no conmutativos, ya que por ejemplo $\rho_1+\mu_1=\delta_2$, y $\mu_1+\rho_1=\delta_1$. Esta información nos permite obtener otra tabla, en la cual se resumen las propiedades del grupo asociado a los movimientos rígidos del cuadrad, que se ven en la tabla 4.

+	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
μ_1	μ_1	δ_1	μ_2	δ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1	ρ_3
μ_2	μ_2	δ_2	μ_1	δ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_3	ρ_1
δ_1	δ_1	μ_2	δ_2	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_1	δ_1	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_2	ρ_0

Tabla 4

El siguiente diagrama es un latice con todos los subrupos de D_4



Se sugiere como actividades posibles para los estudiantes, tratar de hacer lo mismo con pentágonos, hexágonos, para generalizar y mejorar la capacidad de abstracción, también construir las figuras y hacer la respectiva tabla a partir de los movimientos rígidos en el espacio.

CONCLUSIONES

- Tanto la geometría como el álgebra están ligadas al desarrollo intelectual de la humanidad.
- Los movimientos rígidos de triángulos, rectángulos en el plano, generan estructuras matemáticas conocidas como grupos.
- La capacidad de razonamiento espacial puede ser potenciada manipulando figuras geométricas y prediciendo la distribución de sus lados al hacer una determinada acción en el espacio o varias consecutivas.
- A mayor número de lados que posea una figura geométrica más subgrupos y por ende un latice más complejo.

Referencias

1. Contreras, Mauricio. *Las matemáticas de ESO y el bachillerato a través de los juegos*. http://www.mauriciocontreras.es/JUEGOS4.pdf. Consultada 30/08/2010.
2. Fraleight, John (1974). *A First Course in Abstract Algebra*. Amsterdam: Addison Wesley.
3. Hemmerling, Edwin. *Geometría Elemental*. México: Editorial Limusa.
4. Galvis, Jorge E. *Didáctica para la enseñanza de la aritmética y el álgebra*. http://www.ucpr.edu.co/encuentrosdcb/historial/SegundoSimposio/PONENCIAS%20SEGUNDO

%20SIMPOSIO/Did%C3%A1ctica_para_la_ense%C3%B1anza_de_la_aritm%C3%A9tica_Y_El_%20Algebra_Jorge_Enrique_Galvis_I.pdf. Consultado 29/08/2010

5. Herstein, I. *Álgebra Abstracta*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1988 - 248 páginas
6. Poole, David (2007). *Álgebra Lineal*. Trent University. Australia: Thompson.
7. Rabino, Adriana, et al. *Aprehender álgebra utilizando contextos significativos*. www.soarem.org.ar/Documentos/22%20Rabino.pdf. Consultada 30/08/2010
8. http://docentes.uacj.mx/gtapia/Moderna/Contenido/Unidad%20IV/permutaciones.htm. Consultada 25/08/2010
9. http://es.wikipedia.org/wiki/Permutaci%C3%B3n_y_grupo_sim%C3%A9trico. Consultada 25/08/2010
10. http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_abstracta. Consultada 26/08/2010
11. http://www.jfinternational.com/mf/geometria.html. Consultada 25/08/2010