PO-35 MODELO PARA EL CONTROL ÓPTIMO DE LA ADICCIÓN A LA COCAÍNA

Vicky Rocío Bonilla Vente
Estudiante Licenciatura en matemáticas, Universidad del Quindío
vior5@hotmail.com

Aníbal Muñoz Loaiza
Doctor en ciencias matemáticas
Docente de planta Licenciatura en Matemáticas Universidad del Quindío,
anibalml@hotmail.com

Gustavo Villalobos Nieto
ingeniero catastral y geodesta
docente de topografía
vilgustavo@gmail.com

RESUMEN

Se presenta un avance sobre la formulación y análisis de un problema de control óptimo determinista para la dinámica de la adicción a la cocaína con población variable, planteando un funcional objetivo de costos cuadrático ligado a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que interpretan dicho proceso. Dicho problema se analiza aplicando el principio del máximo de Pontryaguin y el problema de contorno se resuelve utilizando el MATLAB con datos hipotéticos y de literatura para los parámetros.

Palabras claves: Control óptimo, Máximo Pontryagin, Cocaína

ABSTRACT

There is formulated and analyzes a problem of ideal deterministic control for the dynamics of the addiction to the cocaine by variable population, raising a functional quadratic aim of costs tied to a system of differential ordinary not linear equations that interpret the above mentioned process. The above mentioned problem is analyzed applying the beginning of Pontryaguin's maximum and the contour problem is solved using the MATLAB with hypothetical information and of literature for the parameters.
Key words: Optimal Control, **Pontryaguin's maximum, cocaine**

Introducción

El consumo de psicoactivos constituye un problema social muy discutido y documentado, que según los últimos estudios nacionales disponibles se ha incrementado, en especial en población joven; entre los grupos de mayor interés se encuentran los estudiantes de educación superior. Basta la presencia de una droga y de un sujeto para que se desencadene la adicción; por lo tanto, la sustancia y el consumidor representan un peligro para el orden social. La sustancia por ser el veneno; el individuo porque después de ser prevenido por todos los medios, de víctima potencial se transforma en sospechoso portador del mal.
Algunos estudios realizados en torno a las drogas adictivas son:

Almedera C. y otros (2004) presentaron un modelo considerando explícitamente la distribución de edad de los usuarios. Sobre la base de la OFA se presentaron 2-grupos de modelos en el que la población se divide en un usuario y un grupo de no consumidores; Everingham Sohler M. y otros (1995-2006) realizaron un modelo basado en los flujos de población dentro y fuera del consumo de cocaína. El modelo cuantifica como la epidemia de consumo en el pasado da una luz para el uso intensivo de la droga a futuro; Kaya C. (2004) llevo a cabo un modelo de control de la epidemia de cocaína donde los controles toman efecto a partir del año 1967 y 1990 respectivamente. La mejor estrategia surge de esta manera primero prevención, luego tratamiento; Mulone a G. y Straughan b B. (2009), en una nota sobre las epidemias de heroína proponen que el tratamiento de consumidores de heroína o consumidores de otras drogas como el crack y la cocaína es un procedimiento costoso y es una carga importante para la salud y el sistema de cualquier país. Además se agrego que los modelos matemáticos son un medio para proporcionar una herramienta de predicción de como las clases de consumidores de drogas se comportan, y como tal, esperamos que podría convertirse en un instrumento útil para ayudar a especialistas y equipos en la elaboración de estrategias de tratamiento.
Romualdi P. y otros (2007) realizaron un estudio sobre las disminuciones en N / Niveles de péptido que produce la cocaína. Además agregaron que la Cocaína interactúa con el neurotransmisor y con múltiples sistemas en el cerebro. Aunque la cocaína directamente influye en la neurotransmisión serotoninérgica y dopaminérgica a través de la inhibición de la absorción de transmisor, también tiene efectos indirectos sobre los sistemas de péptidos opioides.

En relación al control óptimo y aplicación del principio del máximo de Pontryaguin, se encuentran aplicaciones deterministas en Cáncer, VIH-SIDA, Tuberculosis, Cólera, Dengue,
Malaria, Influenza y dinámicas en ecología de poblaciones.

Métodos

Se propone un problema de control óptimo por prevención de la adicción, mediante un funcional objetivo de tipo cuadrático ligado a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que interpretan dicha dinámica. Dicho problema se analiza aplicando el
principio máximo de Pontryaguin.

Formulación del problema de control óptimo

Los supuestos del modelo son: población constante, grupo de riesgo de personas al consumo de cocaína desde la edad promedio de 12 años, incidencia estándar, pérdida de recuperación a la adicción. Las variables y parámetros del proceso de adicción son:
x: número promedio de personas mayores de 12 años susceptibles al consumo de cocaína, y: numero promedio de personas mayores de 12 años adictas al consumo de cocaína, z:número promedio de personas mayores de 12 años recuperadas como consumidoras de cocaína, N: Población total, μN: flujo de personas a la población susceptible del grupo de riesgo de los consumidores de cocaína, μ: tasa de mortalidad natural, β: probabilidad de adicción al consumo de cocaína, α: tasa de recuperados que recaen a consumidores de cocaína, : tasa de consumidores de cocaína que se recuperan por tratamiento, u1: control preventivo a la adicción dependiente del tiempo, τ : tiempo fijo, η_i, i=1,2: pesos de los costos directos e indirectos.
Se plantea el funcional objetivo:

—

Ligado al sistema dinámico de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales:

con condiciones iníciales, y la región de sentido sociológico donde tienen sentido las trayectorias solución del sistema (1) a (3) es:

El flujograma de la dinámica es,

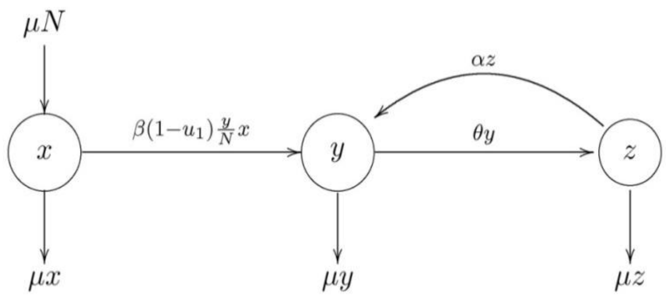

Figura 1: Dinámica con control de adicción a la cocaína.

Se trata de hallar un control óptimo tal que , en donde,

.

Resultados

La función Hamiltoniana o (función de Pontryaguin) es de la forma , donde donde es el vector de variables de estado el vector de controles, el vector de variables adjuntas o conjugadas y L es el Lagrangiano integrando del funcional. Es decir,

donde son multiplicadores de penalización tales que:

Aplicando la condición de primer orden – en particular — se obtiene:

de donde

Caso 1:

Si entonces por 3.1 y = 0 Sustituyendo en (3.2) se tiene que:

– De forma análoga,

Caso 2:

Si entonces por (3.1) y y sustituyendo en (3.2) se tiene,

– Luego despejando obtenemos:

Caso 3:

Y si entonces por (3.1) y , y sustituyendo (3.2) entonces,

– Despejando obtenemos: –

De lo anterior se deduce que,

$$\bar{u}_1(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad \left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\eta_2}\right)\beta\frac{y}{N}x \leq 0 \\ \left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\eta_2}\right)\beta\frac{y}{N}x & ; \quad 0 < \left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\eta_2}\right)\beta\frac{y}{N}x < 1 \\ 1 & ; \quad \left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\eta_2}\right)\beta\frac{y}{N}x \geq 1 \end{cases}$$

De este modo una forma de caracterizar el control es la siguiente,

El sistema conjugado (o sistema adjunto) tiene la forma:

, , ,

Es decir,

Problema de contorno

Está formado por el sistema de variables de estado de la dinámica de la cocaína con sus respectivas condiciones iníciales, el sistema conjugado y las condiciones terminales y el control:

3.2. Resultados numéricos

El análisis del problema de contorno:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = F(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \lambda) \\ \frac{d\lambda}{dt} = G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, \lambda) \\ x(0) = x_0 \\ \lambda_i(\tau) = 0, i = 1, 2, 3. \\ \bar{u}_1(t) = \text{mín}\left(\text{máx}\left(0, \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\eta_2}\beta \frac{y}{N} x\right), 1\right) \end{cases}$$

Se realizó utilizando el programa MATLAB 13 con las condiciones iníciales, condiciones terminales y valores hipotéticos de los parámetros que se muestran en el cuadro 1.

En la figura 1 se observa que la población susceptible con control permanece casi estable mientras que sin control ésta decrece lentamente. Por otro lado la población adicta sin control crece y con control tiende a estabilizarse muy lentamente, lo cual no es beneficioso ya que se esta aplicando un control máximo. Finalmente la población de recuperados por tratamiento crece cuando no hay control pues depende directamente de la población adicta; cuando hay control dicha población también crece pero es un crecimiento suave.

En el caso de la figura 3.2 se ve que la población susceptible sin control empieza a decrecer en un tiempo aproximadamente de 15 años y con control se mantiene estable. En cuanto a la población adicta se observa que sin control empieza a crecer en un tiempo aproximadamente de 15 años mientras que con un control máximo permanece estable a un nivel.

Cuadro 1: Variables y parámetros

parámetros	Escena 1	Escena 2
	100000	100000
	5	5
	0	0

	0,09	0,3
	0,000037	0,000037
	0,01	0,01
	0,02	0,02
	5,49	15,9

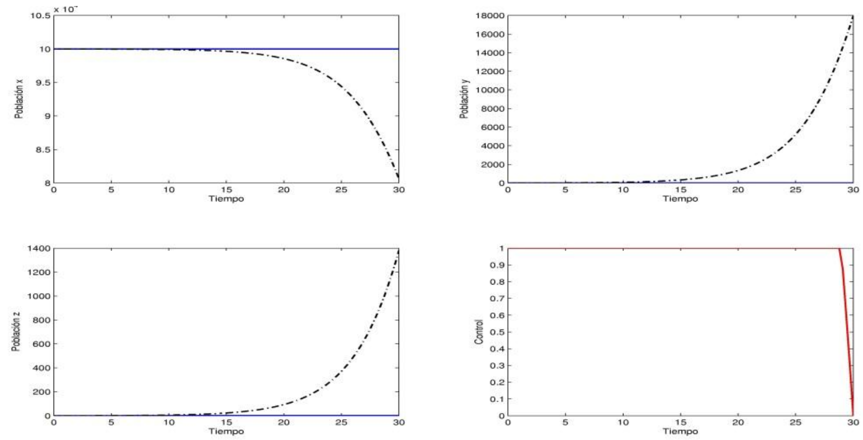

Figura 1: comportamiento en el tiempo de las personas susceptibles , personas adictas y personas recuperadas , sin control (−) y con control (- -) con R0 = 5,49.

En esta figura se observa que la población susceptible con control permanece casi estable mientras que sin control ´esta decrece lentamente. Por otro lado la población adicta sin control crece y con control tiende a estabilizarse muy lentamente, lo cual no es beneficioso ya que se esta aplicando un control máximo. Finalmente la población de recuperados por tratamiento crece cuando no hay control pues depende directamente de la población adicta; cuando hay control dicha población también crece pero es un crecimiento suave.

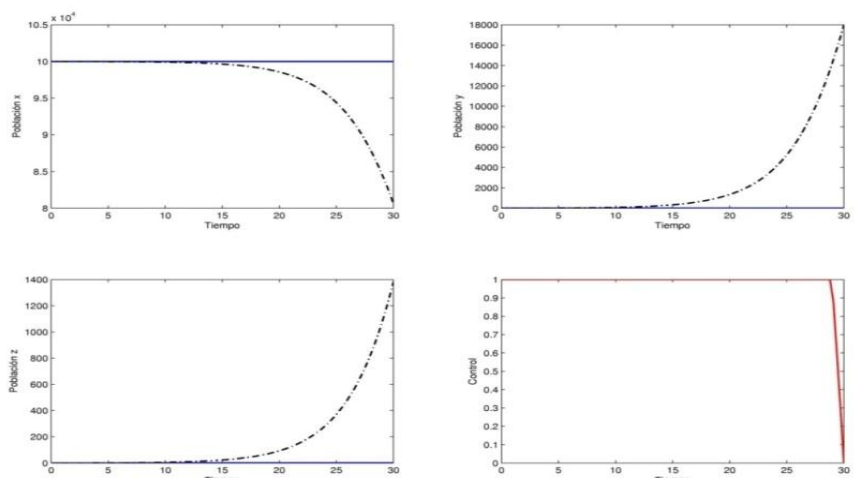

Figura 2: Comportamiento en el tiempo de las personas susceptibles , personas adictas y personas recuperadas , sin control (−) y con control (−) con R0 = 15,9.
En este caso se ve que la población susceptible sin control empieza a decrecer en un tiempo aproximadamente de 15 años y con control se mantiene estable. En cuanto a la población adicta se observa que sin control empieza a crecer en un tiempo aproximadamente de 15 años mientras que con un control máximo permanece estable a un nivel bajo, es decir que no es ventajoso. Por último la población de recuperados por tratamiento empieza a crecer en un tiempo aproximadamente de 15 años cuando no hay control, cuando hay control está estable a un nivel bajo.

Referencias

Alexandrov V. V., Slochevski S. I., Lemak S. S., Parushnikov N. A., Reyes S.R., Salazar I. H., Romero M. I. (1998), *Introducción a la modelación matemática de sistemas controlables*, Tomo I y II, Universidad Estatal de Moscú: M. V. Lomonosov, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.

Almedera C., Caulkinss P. J., Feichtingera G., Traglera G. (2004), *An age-structured single-state drug initiation model-cycles of drug epidemics and optimal prevention programs*, Socio-Economic Planning Sciences 91-1095.

Bowong S, 21 March 2010, *Optimal control of the transmission dynamics of tuberculosis,* Nonlinear Dyn.

Caetano M.A., Yoneyama T. 2001, *Optimal and sub-optimal control in Dengue epidemics, Optim.* Control Appl. Meth.pp. 63-73

Everingham Sohler M. S., Rydell P. C. and Caulkins P. J. (1995-2006), *Cocaine Consumption in the United States: Estimating Past Trends and Future Scenarios,* Socio-Econ. Plann.Sci. Vol. 29, No.4 pp. 305-314.

Gumel A.B., Sharomi O. (2008), *A mathematical modeling ap-proach,* Applied Mathematics and Computation, pp.475-499.

G.P.Samanta. *Dynamic behaviour for a nonautonomous heroin epidemic model withtime delay,* J. Appl. Math. Comput.

Hattaf K., Rachik M., Saadi S., Yousfi N. (2009), *Optimal Control of Treatment in a Basic Virus Infection Model,* Applied Mathematical Sciences, Vol. 3, pp.949-958.

Joshi H.R. 2002, *ptimal control of an HIV immunology model,* Optim. Control Appl.Meth 199-213.

Jung E., Iwami S., Takeuchi Y., Chang Jo T. (2009), *optimal control strategy for prevention of avian influenza pandemic,* Journal of theoretical Biology pp. 220-229.

Kbenesh W., Gumel A., Lenhart S., Clayton T. (2009), *Backward Bifurcation and Optimal control in Transmission dynamics of West nile Virus,* Bulletin of mathematical Biology