

## PO-30 EXPERIENCIAS DE ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

**Hugo Fernando Pardo**

Matemático, Magister en Educación

Profesor Asistente Pontificia Universidad Javeriana Cali. Colombia.

[hfpardo@javerianacali.edu.co](mailto:hfpardo@javerianacali.edu.co)

**Jorge Hernando Figueroa**

Lic. Matemáticas, Magister en Educación

Profesor Asistente Pontificia Universidad Javeriana Cali. Colombia

[jfigueroa@javerianacali.edu.co](mailto:jfigueroa@javerianacali.edu.co)

### RESUMEN

En este documento se presenta una experiencia metodológica de enseñanza y aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden, implementado en un grupo de estudiantes de Ingeniería de la Universidad Javeriana Cali, en la cual se utilizó la coordinación de los registros de representación gráfico, numérico y algebraico en situaciones tradicionales de enseñanza, buscando una participación más activa de los estudiantes, así como una mayor comprensión de los temas tratados. Para tal efecto, se diseñaron guías de actividades de cada tema del curso, las cuales eran resueltas por los estudiantes fuera de clase. En las guías se introdujeron conceptos previos de Álgebra lineal, Cálculo diferencial e integral, necesarios para el tema respectivo, este curso maneja deducciones y pre-saberes que exigen del estudiante un nivel de pensamiento que quizás no ha alcanzado.

Palabras claves: Sistemas de representación, ecuaciones diferenciales ordinarias, guías.

### ABSTRACT

In this paper, is presented a methodological experience of teaching and learning of first-order differential equations, implemented in a group of engineering students from the Universidad Javeriana Cali, which the coordination of the records of graphical numeric and algebraic representation, was used in traditional teaching situations, looking for a more active participation of students, as well as a greater understanding of the topics covered. For this purpose, activities guides were designed for each topic of the course, which were solved by students outside of class. In the guides prior concepts were introduced to linear algebra, differential and integral calculus, necessary for the matter in question, this course manages deductions and pre-knowledge that requires the student a level of thinking that perhaps he has not reached

Key Words: Systems of representation, ordinary differential equations, guides.

### Introducción

La metodología utilizada cuando se imparte un curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en la mayoría de las universidades colombianas generalmente es de tipo "clase expositiva". De acuerdo con (Peltier, 1993), citado por (Moreno y Azcarate, 2003),

*"... este es un estilo denominado dogmático o magisterial, centrado en el contenido cuyo objetivo es dar y comunicar un saber a los estudiantes. En este modelo el profesor adquiere un papel muy activo y el estudiante es un receptor pasivo de unos conocimientos, presentados por el profesor, completamente acabados y contruidos."*

Con el fin de cambiar esta metodología expositiva, se implementó un curso piloto para el segundo semestre del 2010, en la Pontificia Universidad Javeriana Cali, para el cual se elaboraron guías de trabajo (ver anexo), cuyas preguntas incluían implícitamente las estrategias de solución para que los estudiantes construyeran los aspectos conceptuales de forma natural, buscando con ello que elevaran el nivel de razonamiento y no solo entendieran y manipularan el algoritmo de solución. Para documentar (analizar) los roles del profesor y los estudiantes, se filmaron las clases durante todo el semestre y al terminar el curso se aplicó una encuesta para indagar algunos aspectos acerca de la metodología implementada.

### **Guías de actividades**

Partiendo del hecho que la concepción dominante en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias es la algorítmica-algebraica, que trae como consecuencia inmediata para los estudiantes una visión sesgada y muy limitada sobre los diferentes acercamientos que existen para encontrar las soluciones, las cuales requieren en muchos casos acercamientos numéricos y geométricos así como la articulación entre ellos; el colectivo de profesores del área de matemáticas elaboro unas guías de actividades los temas del curso ; para tal efecto , a partir de una reflexión curricular sobre los contenidos y metodologías utilizadas, se distribuyó el trabajo en grupos, con el ánimo de diseñar situaciones que orientaran al alumno en el análisis y modelización de problemas interesantes relacionados con tales situaciones, estimulando con ello la búsqueda autónoma y el propio descubrimiento paulatino de conceptos matemáticos involucrados en tales situaciones.

Para el diseño de unidades o guías de enseñanza por parte de los profesores, se les pidió el favor de formular y/o proponer problemas de aplicación de las ecuaciones diferenciales y el análisis de las decisiones tomadas en la solución de dichos problemas ; con base en esto, los profesores diseñaron unidades didácticas centradas en los problemas propuestos, teniendo presente que encontrar la solución del problema no es la meta final de las matemáticas , " sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones, generalizaciones de ese problema, relaciones con otros problemas,...." (Schoenfeld, 1989).

Se presentaron muchas dificultades en la construcción de las guías, entre otros motivos por las concepciones de los profesores, el excesivo trabajo que demanda, y la falta de experiencia en el trabajo con guías en la universidad, y la falta de conocimiento acerca de cómo impulsar o dar indicaciones que faciliten el descubrir, hallar, inventar vías de solución a problemas, así como la identificación , en varias guías, de aquellos conocimientos de uso indispensable para alcanzar el éxito(pre-saberes).

Los contenidos del curso, se dividieron en tres capítulos: una introducción a las ecuaciones diferenciales de primer orden, sistemas de ecuaciones diferenciales y solución de ecuaciones diferenciales usando la transformada de Laplace.

## **Roles de los estudiantes y del profesor durante las clases**

La clase se dividió en tres momentos, en el primer momento, los estudiantes presentan sus avances y dificultades en el desarrollo de la guía, enseñando sus hipótesis y conjeturas acerca de la solución de las situaciones planteadas; en el segundo momento, se validan las hipótesis y conjeturas planteadas en el momento anterior, se llega a acuerdos, se discute por qué y para qué de la actividad, qué de ella le sirvió, que aprendió. En algunas ocasiones, se proponían algunos ejemplos y ejercicios que permitían afianzar los temas y conceptos abordados en la guía. En el tercer momento se hacía la institucionalización de los conceptos trabajados en la cual el profesor aclaraba la intención didáctica de la actividad, y daba una presentación o introducción a los temas a trabajar en la siguiente guía. El orden de los momentos varió en muchas clases, porque los estudiantes manifestaban no comprender los enunciados de la guía, no encontraba estrategias para resolverla o simplemente porque no les alcanzaba el tiempo para resolverla la guía en casa.

Como las clases fueron filmadas, el comportamiento de los estudiantes varió durante el transcurso del semestre, inicialmente eran muy tímidos, nerviosos y temerosos de cometer errores que les hiciera quedar en evidencia frente a sus compañeros, les disgustaba la presencia de la cámara y la participación en la clase era muy poca, pero con el transcurrir del tiempo la participación aumento y la presencia de la cámara dejo de ser disculpa para participar en la clase.

La guía que incluyo el primer registro numérico presento muchas dificultades para su solución y evidencio grandes falencias en los concepto de función, de razón de cambio y relación entre las variables implicadas, por el no uso de este tipo de registros en los cursos anteriores.

La participación de los estudiantes en las primeras cinco semanas del semestre fue muy reducida, siempre eran los mismos, pero al finalizar el curso las discusiones y la exposición de las hipótesis y conjeturas que se hacían en el primer momento de la clase permitieron que la totalidad de los estudiantes participaran activamente de la misma.

## **Opiniones de los estudiantes respecto a la metodología**

Al terminar el curso se aplicó una encuesta escrita al grupo de estudiantes, con el fin de indagar algunos aspectos de la metodología implementada en el curso de Ecuaciones Diferenciales. La encuesta tenía 4 preguntas:

1. ¿Qué aspectos destaca de la metodología implementada en el curso?
2. ¿Qué aspectos se deben mejorar?
3. Comparado con los cursos de matemáticas vistos, este le permitió hacer más matemáticas?.
4. ¿La metodología implicó cambios en su método de estudio?

A continuación se recogen algunas impresiones de los estudiantes respecto a las preguntas

¿Qué aspectos destaca de la metodología implementada en el curso?

*“El hecho de hacer talleres en la casa puede ayudar a que uno venga más preparado a la clase, pero considero que se debía explicar más en clase”*

*“Las clases magistrales fueron de excelente ayuda al aprendizaje obtenido”*

*“Hay temas que no se comprenden estudiándolos por nuestro lado, es muy bueno que el profe llegue a darnos un apoyo”*

De acuerdo con la opinión de los estudiantes, se puede señalar que añoran la clase de tipo magistral cuyo discurso es de carácter expositivo.

Para otros, la metodología implementada les permitió llegar a la clase con una idea del tema a tratar, con dudas y los motivó a consultar. En cierta medida los motivó a ser más responsables y autónomos:

*“Las actividades previas ayudan a llegar a la clase con una idea de lo que se va a ver e inquietudes”*

*“Nos induce a buscar por nuestra cuenta, sino lo hacemos, nos quedamos sin entender”*

*“Permite comprender los temas antes de clase”*

*“Libertad y autonomía porque depende de cada persona lo que desea aprender, pues cada uno es más responsable de buscar lo que se estudia”*

*“Nos permite desarrollar un poco más nuestras competencias y nos ayuda a investigar más”*

Los estudiantes también consideran que esta metodología favorece la evaluación del curso:

*“Hay un estudio constante de los temas y esto hace que estemos preparados para el parcial”*

*“Se levantaron las notas ya que no solo se tomó en cuenta la parte conceptual sino la aplicación, el trabajo y el esfuerzo”*

*“Los talleres y actividades dan más oportunidad para entender y evaluar los temas”*

*“Los proyectos me parecieron una buena forma para aplicar lo aprendido, además que sirven para ayudar en caso de necesitar nota”*

Respecto a la pregunta ¿Qué aspectos se deben mejorar?, los estudiantes manifestaron:

*“Más clases magistrales para resolver dudas”.*

*“Explicar antes de dejar una tarea”.*

*“Las actividades previas no se deberían calificar y más bien la tarea después de la explicación de la clase que ya se aclararon dudas”*

De nuevo, algunos estudiantes reclaman clases magistrales en la cual según (González ,2002), “el estudiante no ha realizado ningún esfuerzo previo para estudiar y comprender los contenidos en estudio y toma una actitud necesariamente receptiva y/o pasiva durante la clase”.

Otro aspecto que los estudiantes sugieren se debe mejorar, es el contenido de las guías, consideran que es demasiado, y además cuando consultan algunos temas, estos no los comprenden en su totalidad:

*“No dejar guías para cada clase, no entendemos una y ya tenemos a otra que tampoco”*

*“Hay temas que cuando se investiga en libros o en Internet no se entienden”*

Otros estudiantes consideran que la metodología se podría mejorar si,

*“La metodología se implementa desde los primeros semestres y no en 5 semestre”*

*“No todo se debe introducir con actividades, sería bueno una corta socialización del tema y después desarrollar las actividades”*

Con respecto a la pregunta, Comparado con los cursos de matemáticas vistos, este le permitió hacer más matemáticas?. Los estudiantes manifestaron:

*“Si porque aunque uno no sabía por donde arrancar, intentaba por lo que recordaba y buscaba una manera de hallar una respuesta”*

*“Se combina todo lo de lineal, diferencial, integral y multivariable”*

*“Las actividades dejadas eran necesarias para recodar todo lo visto en clases anteriores”*

*“Se recopilaron muchos temas vistos en los cálculos”*

Algunos estudiantes consideran que hicieron más matemáticas que en los otros cursos, por los proyectos que manejaron durante el curso y por las consultas que realizaron, en tanto que otros, consideran que no realizaron más matemáticas por que no comprendieron todos los contenidos, *“Los proyectos permitieron hacer énfasis en las matemáticas y el análisis”*

*“Nos tocó buscar por nuestros medios”*

*“No me quedó claro el 100 %”*

Respecto a la pregunta ¿La metodología implicó cambios en su método de estudio?, los estudiantes en su mayoría contestaron que sí. Los aspectos destacados, se relacionan con la preparación de las actividades, proyectos y las consultas que realizaron:

*“Si ya que tocaba hacer un estudio previo e investigación previa para realizar las actividades”*

*“Sacar más tiempo para las actividades y el proyecto”*

*“Si, consulté más a menudo al profesor”*

*“Si, ya que me tocaba leer el libro con más detenimiento, porque antes cogía el libro pero con conocimiento previo y ahora no, comenzaba desde cero”*

Para algunos estudiantes que posiblemente no realizaron las actividades previas, la metodología implicó cambios en su método de estudio, quizá porque en la “clase” no comprendieron lo necesario:

*“Tenía que estudiar mucho más, ya que en las clases no entendía nada”*

## Conclusiones

Se presentaron muchas dificultades en el desarrollo e implementación de las guías, entre otros motivos por las concepciones de los profesores y los alumnos sobre la clase tradicional y el papel que juega cada uno en la misma, los alumnos desean que se les “explique” y los profesores no confían en el trabajo de los estudiantes además de considerar que la elaboración de las guías demanda mucho trabajo.

El presentar actividades que involucraban diferentes registros de representación, permitió al estudiante: asimilar los conceptos tratados en la clase desde otras perspectivas; descubrir otras formas de resolver los problemas planteados y el uso de herramientas computacionales como Excel y Matlab para la solución de ecuaciones desde los registros numérico y geométrico.

## Referencias

- González, J. H. (2002). *De la clase magistral ... al aprendizaje activo*. Cartilla Docente, Universidad Icesi. Segunda edición.
- Hernández, A. (1999). Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.
- Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). “Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales”. *Enseñanza de las ciencias*, 21.2, pp. 265-280.
- Ortiz, H; Jiménez, F. (2007). “Una experiencia pedagógica en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales exactas y los factores integrantes” [En línea]. *Scientia et técnica*. Universidad Tecnológica de Pereira. Año XIII, N 37. pp 497 – 501. <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/849/84903785.pdf>.
- Peltier, M. L. (1993). Una visión general de la didáctica de las matemáticas en Francia. *Educación Matemática*, 5 (2), pp. 4-10.
- Schoenfeld, A.(1989) . Ideas in the air: Speculations on small group learning, environment and cultural influences on cognition, and epistemology. *International Journal of Educational Research*, 13(1).

## Anexo

Módulo I: Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

Actividad N° 1

Solucione cada una de las siguientes situaciones:

1. Halle la ecuación de la curva que pasa por el punto (1,2) y cuya pendiente en un punto (x, y), está dada por  $g(x) = x^2 - 4$ .
2. A continuación se da una tabla de valores donde se muestra la población (en millones) de un país determinado con respecto al tiempo en intervalos de 10 años. Además, se sabe que la variación instantánea de la población es directamente proporcional a la población con una constante de proporcionalidad igual a 0.027737.

Año	Población en millones	Año	Población en millones
1790	3.93	1900	83.0721432
1800	5.186242	1910	109.626532
1810	6.844048	1920	144.669152
1820	9.031780	1930	190.913305
1830	11.91883	1940	251.939613
1840	15.72874	1950	332.473257
1850	20.75650	1960	438.749847
1860	27.391419	1970	578.998233
1870	36.147198	1980	764.077654
1880	47.701813	1990	1008.318555
1890	62.9499160		

Halle la ecuación de la función que describe la población en términos del tiempo y la variación instantánea en 1945.

A continuación se da una tabla y una gráfica donde se ilustra la forma en que se desintegra una sustancia radioactiva.

3. Halle la variación promedio de desintegración de la sustancia para intervalos de 1 día; es decir, de 1 a 2, de 2 a 3, de 3 a 4 y así sucesivamente
  - b. Halle la variación instantánea para el día 18. ¿Es posible hallar una ecuación para la función ilustrada en la tabla y en la gráfica y una ecuación para la variación instantánea? Si es posible,
  - c. Determine las ecuaciones.
  - d. Existe alguna relación entre la variación promedio y la variación instantánea? explique

Tiempo en días	Cantidad de la sustancia en gramos
0	50
1	29,2401774
2	17,0997595
3	10
4	5,84803548
5	3,41995189
6	2
7	1,1696071
8	0,68399038
9	0,4
10	0,23392142
11	0,13679808
12	0,08
13	0,04678428
14	0,02735962
15	0,016

