

PO-31 SIMULACIÓN Y SENSIBILIDAD DE UN MODELO PARA TRANSMISIÓN DEL VIH EN UNA POBLACIÓN DIVERSIFICADA³²

Juan C. Castillo P.

Licenciado en matemáticas

Docente catedrático universidad del Quindío

jccastillo@uniquindio.edu.co

Aníbal Muñoz L.

Doctor en ciencias matemáticas BUAP-México

Docente investigador y de planta universidad del Quindío

anibalml@hotmail.com

Oscar M. García A.

Msc. en matemáticas Universidad Nacional de Colombia

Docente tiempo completo universidad del Quindío.

omgarcia@uniquindio.edu.co

RESUMEN

Se formula un modelo de simulación con base en un sistema dinámico de ecuaciones diferenciales no lineales para la dinámica de transmisión del VIH en una población homosexual, diferenciado la población infectada entre diagnosticados y sin diagnosticar, incorporando diferentes controles constantes, según la población infectada, a través de medidas preventivas que reduzca la transmisión de la infección. Se determina e interpreta el umbral epidémico realizando el análisis de sensibilidad del R_0 respecto a cada uno de los parámetros. Se finaliza simulando el sistema utilizando MAPLE con datos hipotéticos y de la literatura para los parámetros.

Palabras claves: modelo de simulación, sistema dinámico, VIH/SIDA, umbral epidémico, análisis de sensibilidad, R_0 .

ABSTRACT

A simulation model for HIV transmission dynamics is proposed the model is formulated as a nonlinear differential equations system and considers transmission in a homosexual population with diagnosed and non diagnosed individuals. Model incorporates preventive measures as control strategy to reduce the infection impact this determined the basic reproductive number R_0 and the sensitivity analysis was made. Finally numerical simulations were made on MAPLE with synthetic data from literature.

Introducción

³² Modelado de la dinámica y el control óptimo con medidas preventivas de la transmisión del VIH en una población homosexual y sexualmente activa. Grupo de modelación matemática en epidemiología (GMME). Universidad del Quindío.

Al principio de la década de los ochenta, el mundo presenció la aparición de una nueva enfermedad, el síndrome de inmunodeficiencia adquirida (SIDA) sobre cuya etiología se formularon diversas hipótesis de naturaleza infecciosa, tóxica, degenerativa y nutricional, entre otras. La expansión de la epidemia no ha diferenciado países, ni clases, ni género; ha afectado a toda la sociedad teniendo mayor impacto en aquellas regiones con escasa información de la enfermedad; actualmente existen tratamientos para mejorar la calidad de vida de las personas infectadas (Ramirez, Jaime; Rugeles M.T., 2007).

El SIDA o Síndrome de inmunodeficiencia adquirida es un conjunto de manifestaciones clínicas que aparecen como consecuencia de la depresión del sistema inmunológico debido a la infección por el virus de la inmunodeficiencia humana (VIH). Es una enfermedad de carácter terminal y considerado como una de las epidemias del siglo XXI; ha producido innumerables muertes en todo el mundo, en mayor número en aquellos países sin mecanismos de prevención (Ramirez, Jaime; Rugeles M.T., 2007).

El VIH no posee cura ni vacuna alguna, llevando a que la única manera de evitarlo y controlar su propagación entre las personas es a través de la prevención; siendo el mejor mecanismo de prevención la abstención de tener relaciones sexuales con otras personas, más considerando el contexto de nuestra sociedad, este mecanismo es absolutamente inoperante. Otros métodos de prevención del VIH consisten en tener una pareja estable, el uso del condón y la no utilización de materiales quirúrgicos como jeringas o agujas, pero la más eficaz es el conocimiento de la enfermedad.

El avance de esta epidemia ha suscitado el interés de la comunidad científica, principalmente en áreas de la salud y la medicina en busca de una cura o vacuna para contrarrestar su desarrollo. No siendo ajena a esto, las matemáticas se convierten en un instrumento ideal para el estudio del impacto que el SIDA presente en nuestra sociedad; de allí es de donde se plantea la necesidad de modelar la dinámica de transmisión del VIH/SIDA en una población homosexual sexualmente activa y considerando el uso de medidas preventivas (Alexandro V, Slochevski S, Lemak S., 1998).

Se plantea y analiza un modelo matemático que describe la dinámica básica de transmisión del VIH en una población homosexual, donde se considera la interacción entre poblaciones susceptible, e infectadas diagnosticadas y sin diagnosticar, con supuestos tales como población total variable, tasa de mortalidad natural y a causa del virus, y el uso de medidas preventivas como mecanismo de control de la enfermedad. Determinando el R_0 como umbral epidémico en la propagación de la enfermedad y el análisis de sensibilidad en cada uno de los parámetros que conforman el R_0 .

Modelo

Se construye y analiza un modelo para la dinámica de la transmisión del VIH en una población homosexual, sexualmente activa, considerando la interacción de la población susceptible con poblaciones infectadas con y sin conocimiento de poseer el virus y que plantea los siguientes supuestos:

La población total es variable.

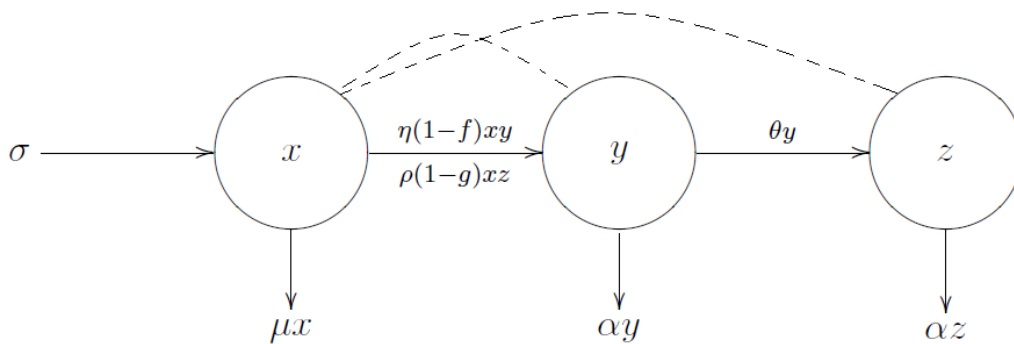
La tasa de mortalidad en la población infectada es solo por causa del virus.

El uso de medidas preventivas como mecanismos de control de la enfermedad, diferenciando las medidas preventivas de las poblaciones infectadas.

Se considera el principio de acción de masas.

Las variables y parámetros que describen la dinámica son x los números promedio de hombres homosexuales susceptibles de adquirir VIH, y infectados sin diagnosticar e z infectados diagnosticados con VIH respectivamente, σ flujo constante de hombres que pasan a ser sexualmente activos, η y ρ tasa de infección de hombres susceptibles por contacto con hombres sin diagnosticar y diagnosticados respectivamente, f y g fracción de hombres que se protegen con medidas preventivas, μ tasa de mortalidad de los hombres susceptibles, α tasa de mortalidad a causa de la infección y θ tasa de hombres infectados que entran en tratamiento.

El flujograma que describe la dinámica del modelo es:



Dinámica de la transmisión del VIH, diferenciado la población infectada.

Con los supuestos considerados anteriormente, la dinámica se interpreta mediante las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma - \eta(1-f)xy - \rho(1-g)xz - \mu x \\ \dot{y} &= \eta(1-f)xy + \rho(1-g)xz - \theta y - \alpha y \\ \dot{z} &= \theta y - \alpha z \end{aligned}$$

Donde x , y y z

La población total está dada por $N = x + y + z$ y la región de sentido epidemiológico esta dado por:

La cual por el teorema de Birkhoff y Rota (Perko, 2000) de desigualdades diferenciales, es una región de invariancia. En consecuencia el conjunto de soluciones del sistema anterior en Ω están contenidos en Ω . Los resultados de unicidad, existencia y continuidad se cumplen para dicho sistema. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales que interpretan la dinámica de transmisión y control por prevención del VIH para una población homosexual, sexualmente activa con diferenciación de la población infectada esta matemática y epidemiológicamente bien planteado.

Número básico de reproducción

Conocer cuál es el curso de la enfermedad cuando se introduce un individuo infeccioso en una población enteramente susceptible. El número básico de reproducción R_0 funciona como un umbral que establece condiciones para que no haya riesgo de una epidemia (Muñoz L, 2008).

$$R_0 = \frac{\beta \eta}{\rho}$$

Es de suma importancia en el estudio del modelo, el impacto que tiene el uso de estrategias de control a través de medidas preventivas para determinar el comportamiento de la enfermedad del VIH, por lo tanto se da el R_0 en función de β y η , donde η es el período infeccioso de los infectados, ρ y β son las probabilidades de transmisión, N la población total susceptible, η y ρ fracciones de homosexuales que no toman medidas preventivas.

El número básico de reproducción sin medidas preventivas está dado por:

$$R_0 = \frac{\beta \eta}{\rho}$$

Quien representa el número de casos secundarios causados por un infeccioso en ausencia de medidas preventivas.

Análisis de sensibilidad de los parámetros

Para examinar la sensibilidad de R_0 en cada uno de sus parámetros, propuesto por Arriola y Hyman, el índice de sensibilidad es normalizado hacia adelante con respecto a cada uno de los parámetros, se calcula a través (White, 2007):

$$S_i = \frac{\partial R_0}{\partial \theta_i} \frac{\theta_i}{R_0}$$

Donde θ_i al que se le quiere analizar la sensibilidad:

Determinemos la sensibilidad de

$$R_0 = \frac{\beta \eta}{\rho}$$

Así, por ejemplo, un aumento en 4% se traducirá en un aumento de la R_0 del 4%.

Realizando este proceso con cada uno de los parámetros se tiene la siguiente tabla:

Parámetro									
Índice	β	1	-1	-0.85	-0.145	0.989	0.0109	0	0
	η	1	-1	-0.86	-0.138	0.981	0.0181	-0.31	-0.34

La tabla anterior muestra que parámetros como β son directamente proporcionales en el R_0 , a diferencia del γ que son inversamente proporcionales, lo que muestra un resultado valioso en la reducción de la enfermedad, intentar disminuir la tasa de contagio a causa del contacto con personas sin diagnosticar, llevaría a una disminución notoria en el R_0 y posterior control de la propagación de la enfermedad, lo que conlleva a que las estrategias de control se centren en esta población, enfatizada en campañas dirigidas a la prevención y detención del virus del VIH.

Simulación numérica

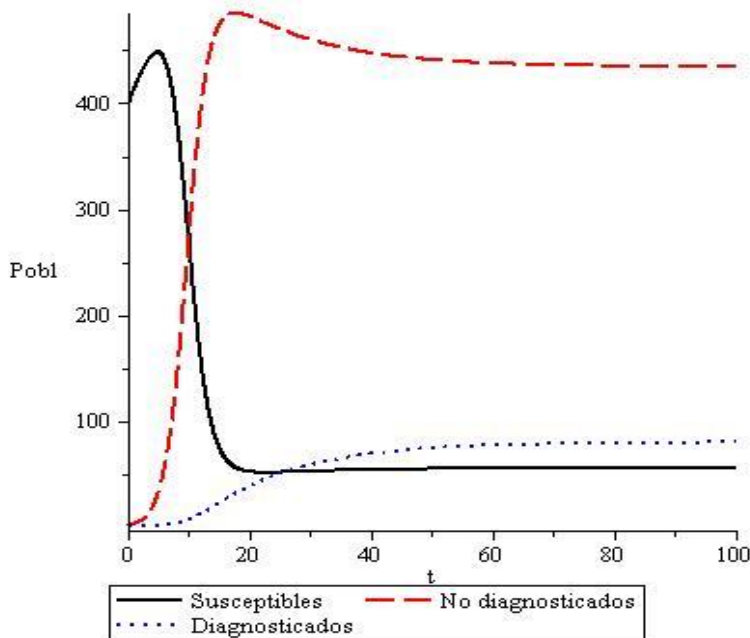
Se muestra el comportamiento de las poblaciones susceptibles e infectadas según varios escenarios, donde se simula con diferentes valores para β y γ , donde el $R_0 > 1$ y $R_0 < 1$.

Variables y parámetros del modelo del VIH

Parámetro	Símbolo	Valor
Promedio de homosexuales		400
Promedio de homosexuales no diagnosticados		2
Promedio de homosexuales diagnosticados		2
Flujo constante de hombres homosexuales		100
Probabilidad de infectados por β		0.65
Probabilidad de infectados por γ		0.003
Tasa de hombres que entran en tratamiento		0.01
Tasa de mortalidad por VIH		0.054
Tasa de mortalidad natural de los susceptibles		0.013

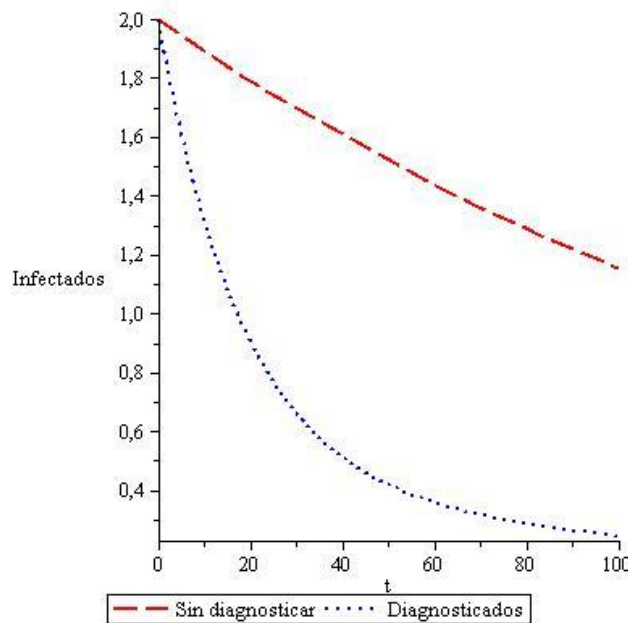
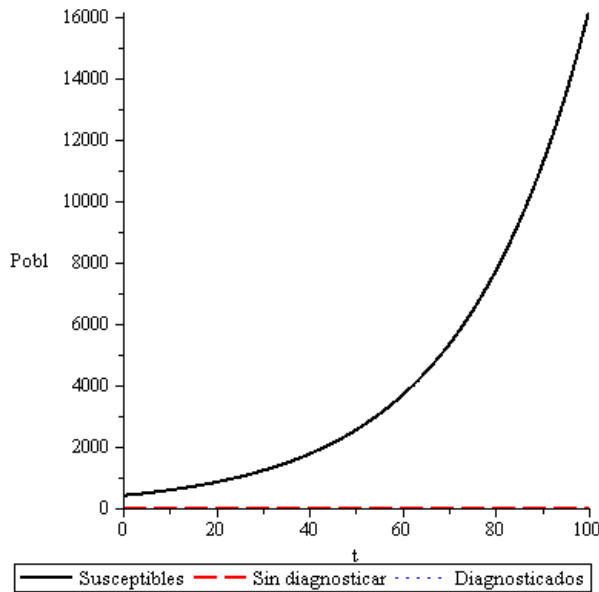
Los valores utilizados en la simulación numérica son escenarios hipotéticos, a diferencia de los datos demográficos tomados según la literatura, la unidad de tiempo utilizada son meses.

$R_0 > 1$



Cuando la fracción de protección es nula, la población susceptible presenta un pico, pero decrece rápidamente en un intervalo de tiempo muy corto, para luego estabilizarse; las poblaciones de infectados crecen de forma continua, lo que indica que al no haber protección por parte de las poblaciones, la propagación de la epidemia es casi total.

$$R_0 < 1$$



Cuando las fracciones de protección en la población infectada sin diagnosticar es superior al 90% y en la diagnosticada superior al 85%, la población susceptible presenta crecimiento continuo, las

poblaciones de infectados decrecen de forma continua, lo que indica la efectividad de la protección en el control de la enfermedad.

Referencias

Alexandro V, Slochevski S, Lemak S. (1998). *Introducción a la modelación matemática en sistemas controlables*. Pueba México.

Muñoz L, A. (2008). *Modelos Biomatemáticos I*. Armenia Quindio: Elizcom Colombia.

Perko, L. (2000). *Differential equations and dynamical systems*. New York: Tex in applied mathematics 7.

Ramirez, Jaime; Rugeles M.T. (2007). Origen no infeccioso del SIDA, ¿mito o realidad? *Asociación colombiana de infectología* , 190-207.

White, E. (2007). Heroin epidemics, treatment and ODE modelling. *Mathematical Biosciences* , 312-324.