PO-20 EL DESCUBRIMIENTO DE LAS MAGNITUDES INCONMENSURABLES Y LAS PARADOJAS DE ZENÓN: LA CRISIS QUE GENERARON Y SU INFLUENCIA EN EL DESARROLLO DE LOS MÉTODOS INFINITESIMALES QUE LLEVARON A LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE[29]

Sergio Alarcón Vasco
Matemático. Magister en Educación Matemática
Profesor asistente Instituto Tecnológico Metropolitano. Medellín
sergioalarcon@itm.edu.co

Héctor Herrera Mejía
Matemático. Magister en Matemáticas Aplicadas
Profesor asistente Instituto Tecnológico Metropolitano. Medellín
hectorherrera@itm.edu.co

RESUMEN

La crisis que generaron en la matemática griega el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables y las paradojas de Zenón condujo a la negativa, por parte de los filósofos griegos, de manejar el concepto de infinito. Esto influyó notablemente en sus estudios sobre métodos para resolver problemas de corte infinitesimal, impidiéndoles desarrollar el concepto numérico de límite. Esta situación ha permanecido históricamente durante el periodo de desarrollo de este concepto y se ha convertido, hoy día, en un obstáculo que retrasa su comprensión por parte de los alumnos.

Se hará entonces un escrutinio histórico de las circunstancias que llevaron al descubrimiento de las magnitudes inconmensurables y a la formulación, por Zenón, de sus paradojas. Igualmente, se mostrará como la crisis generada por estas dos situaciones ha permanecido, a través de la Historia, en las mentes de algunos matemáticos, convirtiéndose en un obstáculo que retrasó el desarrollo del concepto de límite.

Palabras clave: Inconmensurables, infinito, límite

ABSTRACT

The crisis generated in Greek mathematics by the discovery of the incommensurable magnitudes and the Zenon paradoxes led to the refusal by the Greek philosophers to handle the concept of infinity. This greatly influenced his studies on methods for solving infinitesimal problems, not allowing them to develop the numerical concept of limit. This situation has historically remained during the period of development of this concept, and until today has become an obstacle delaying its understanding by the students.

In this paper the circumstances that led to the discovery of the incommensurable magnitudes and the formulation of the Zenon paradoxes are given. Also it will be displayed how the crisis generated by

[29] Este trabajo está enmarcado dentro del proyecto de investigación "Diseño e implementación de una estrategia metodológica para la construcción de los conceptos básicos del cálculo, a partir del concepto de infinito potencial"; Grupo Da Vinci, ITM, Medellín.

these two situations has remained through history in the minds of some mathematicians, becoming an obstacle that delayed the development of the concept of limit.

Key words: Incommensurable, infinite, limit

Introducción

Como resultado de los interrogantes sobre el cambio y el movimiento aparecieron las primeras manifestaciones de tipo infinitesimal en la filosofía griega. De esta manera se dio origen al estudio de tres problemas fundamentales: La división de segmentos al infinito, la continuidad de los entes geométricos y la división atomística de entes intrínsecamente indivisibles. Dos acontecimientos importantes aportaron considerablemente a este estudio, el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, por Hipaso de Metaponto (470 a.C.), y las paradojas de Zenón de Elea contra la multiplicidad y el movimiento (445 a.C.); teniendo como protagonistas dos escuelas filosóficas, la pitagórica y la eleática, establecidas en Crotona y Elea respectivamente.

La filosofía pitagórica, mezcla entre misticismo y matemática, tuvo como máxima la de que todo cuanto existe en el universo podía ser explicado en términos de números (naturales) y de sus razones. Inicialmente estos números fueron considerados como entidades geométricas, físicas y aritméticas compuestas de puntos, cada uno de los cuales constituía una "unidad de existencia" que, al combinarse con otras de acuerdo con las distintas figuras geométricas, representaba el objeto material (Kline, 2000), (Mason, 2001). Así pues los números, además de tener un tamaño cuantitativo, poseían una figura geométrica; razón por la cual fueron considerados las formas e imágenes de los objetos materiales. De ahí que la explicación de todos los fenómenos naturales sólo pudiera lograrse con la ayuda de los números (Kline, 2000).

Esta concepción atomista de lo numérico y de lo geométrico permitió que los pitagóricos concibieran los segmentos y demás entes geométricos como una yuxtaposición de un número finito de puntos, lo cual significaba que podían ser siempre medidos con exactitud (González, 1992), (Pérez, 2001). Así, sólo hablaban de magnitudes conmensurables y de razones entre magnitudes conmensurables, es decir, razones entre dos magnitudes que pueden ser medidas por una unidad común. Esta concepción atomista se vio también reflejado en el tiempo y en el movimiento, concibiendo el tiempo como una sucesión de instantes y el movimiento como una adición de pasos de un punto a otro (González, 1992).

Por su parte la escuela eleática, con su teoría sobre la experiencia sensible, mantenía la idea de la inmutabilidad de las cosas, a pesar de la apariencia de cambio. Su principio fundamental era el de la unidad y la permanencia del ser, contrastando profundamente con la concepción pitagórica de la multiplicidad y el cambio. Sostenían que el movimiento o el cambio en general es imposible (Kline, 1994).

El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables

En el libro X de los *Elementos* Euclides define las magnitudes inconmensurables como aquellas que no pueden ser medidas por una unidad común (Euclides, 1970). Los pitagóricos, afirman González y Klein, llamaban *alogos* ó *alogon* a las razones entre este tipo de magnitudes, que significa "lo inexpresable" (González, 1992), (Kline, 1994). Aunque, afirma Klein, también utilizaron el término *arretos* que significa "que no tiene razón" (Kline, 1994).

La mayoría de los investigadores están de acuerdo en que fue el pitagórico Hipaso de Metaponto (470 a.C.) el descubridor de las magnitudes inconmensurables. Sin embargo, no se sabe cuándo y cómo se hizo este descubrimiento. Suele admitirse que tuvo lugar por aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles. Según González, esto pudo darse al intentar en vano repetidamente, de forma empírica, encontrar una unidad común que permitiera medir, de forma exacta, la diagonal y el lado del cuadrado (González, 1992).

Aristóteles exhibe una demostración, por *reducción al absurdo*, de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado con respecto al lado, basada en la distinción entre lo par y lo impar. Sin embargo, asegura Boyer, ésta no es aceptada como la base del descubrimiento original de los inconmensurables, debido al grado de abstracción tan alto que posee (Boyer, 1986). De acuerdo con Wussing, la demostración pudo haber pertenecido a un época posterior y habría servido como medio de constatar una situación ya observada en otro ámbito (Wussing, 1998).

Las investigaciones más recientes relacionan el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables con la estrella pentagonal, formada al trazar las diagonales del pentágono regular, mostrando como la razón de la diagonal con respecto al lado de dicho pentágono es inconmensurable. Para esto se usa el hecho de que las diagonales del pentágono se cortan según media y extrema razón, es decir, según la sección áurea. En efecto, al trazar las cinco diagonales del pentágono, estas forman otro pentágono regular más pequeño, cuyas diagonales se cortan según media y extrema razón. A su vez, las diagonales de este segundo pentágono forman un tercer pentágono regular más pequeño que el anterior, donde sus diagonales se siguen cortando según media y extrema razón. Este proceso puede continuarse indefinidamente de tal forma que se obtengan pentágonos cada vez más pequeños y donde la sección áurea se repite una y otra vez. De esta forma, se llega la conclusión de que la razón de la diagonal al lado en un pentágono regular es inconmensurable (Boyer, 1986), (Wussing, 1998).

Con el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables la filosofía pitagórica sufre un gran golpe. La creencia de que los números podían medirlo todo deja de tener valor, quedando eliminada de la geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud. De acuerdo con Kline, antes del descubrimiento de las razones inconmensurables los pitagóricos hablaban de número y geometría, pero después de su descubrimiento esta identificación fue destruida; aunque consideraron todo tipo de longitudes, áreas y razones, se limitaron a considerar razones numéricas sólo para el caso conmensurable (Kline, 1994).

Las paradojas de Zenón contra el cambio y el movimiento

Zenón de Elea (445 a.C.), uno de los más dignos representantes de la escuela eleática, propuso una serie de paradojas con las que pretendía defender las teorías de su maestro Parménides (515 a.C.-440 a.C.), quien sostenía que el movimiento y el cambio eran imposibles. La idea central era la de demostrar la inconsistencia de los conceptos de multiplicidad y de divisibilidad (Boyer, 1986). Los argumentos de Zenón, asegura Kline, iban dirigidas contra dos concepciones opuestas del espacio y el tiempo: la primera, relacionada con el atomismo pitagórico, concebía el espacio y el tiempo como formados por pequeños intervalos indivisibles, por lo que el movimiento consistiría en una sucesión de minúsculos saltos; y la segunda concebía el espacio y tiempo como indefinidamente divisibles, en cuyo caso el movimiento resultaría ser “continuo” (Kline, 1994). A continuación se enuncian las cuatro paradojas y se hace un análisis de ellas desde la perspectiva de Boyer (Boyer, 1986).

Las dos primeras paradojas son la de la *Dicotomía* y la de *Aquiles*, con ellas Zenón quiere demostrar que el movimiento es imposible bajo la hipótesis de la divisibilidad indefinida del espacio y del tiempo. En la *Dicotomía* se afirma que un corredor, antes de recorrer una distancia dada, debe recorrer la mitad de dicha distancia; pero antes de recorrer esta, deberá recorrer un cuarto de la distancia inicial; y antes, deberá recorrer un octavo, y así indefinidamente. De esta manera, siempre va a quedar alguna parte de la distancia por recorrer y, por lo tanto, el comienzo del movimiento es imposible.

La segunda paradoja, la de *Aquiles*, establece que Aquiles compite en una carrera con una tortuga a la que le da una ventaja inicial. Al comenzar la carrera, cuando Aquiles llega al lugar de donde partió la tortuga, ésta ya ha avanzado alguna distancia, y cuando Aquiles haya recorrido ésta distancia, la tortuga habrá avanzado una nueva, y así el proceso se sigue indefinidamente. De esta forma, Aquiles por muy veloz que corra nunca va a alcanzar a la tortuga.

Las otras dos paradojas son la de *Flecha* y la del *Estadio,* Zenón quiere demostrar con ellas que el movimiento es imposible bajo la hipótesis de que la divisibilidad del espacio y del tiempo termina en indivisibles. En la *Flecha* Zenón afirma que una flecha moviéndose en el aire siempre va a ocupar un espacio igual a sí misma; pero lo que ocupa un lugar igual a sí mismo no puede estar en movimiento; por lo tanto, la flecha está en reposo en cada instante durante su vuelo, de esta forma el movimiento de la flecha es una ilusión.

El argumento de la paradoja del *Estadio* puede formularse de la siguiente manera: Supóngase que se tienen tres filas de soldados A,B y C (figura 1), y que en la menor unidad de tiempo la fila B se mueve una posición hacia la izquierda, mientras que en el mismo tiempo la fila C se mueve un posición hacia la derecha. Entonces, relativamente a B, C se he movido dos posiciones, y por lo tanto ha debió haber una unidad de tiempo menor al cabo de la cual C estaría una posición a la derecha de B, o bien la mitad de la unidad de tiempo resultaría ser igual a la unidad misma.

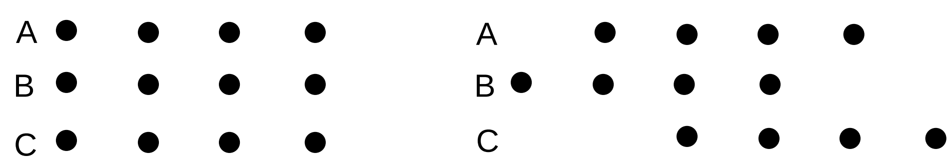

Figura 1. Paradoja del Estadio

Las consecuencias que generaron el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables y las paradojas de Zenón

El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables y las inquietudes que generaron las paradojas de Zenón contra la pluralidad y el movimiento trajeron consecuencias que afectaron de manera considerable el desarrollo las matemáticas griegas. A continuación se exponen algunas de ellas:

Al descubrirse las magnitudes inconmensurables la máxima pitagórica “el número es la esencia de todas las cosas” sufre un gran tropiezo, ya que se elimina de la geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud. Según González esto hizo que se quebrantaran las bases de la geometría griega, llevando a que se invalidaran todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban proporciones, generando así la primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática (González, 2008).

Con el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables y los interrogantes generados por las paradojas de Zenón, se desbarata el paralelismo que habían establecido los pitagóricos entre el concepto numérico y la representación geométrica. El número, asegura Boyer, siguió conservando las propiedades características de lo discreto, mientras que las magnitudes continuas fueron separadas del número y tuvieron que ser tratadas con métodos puramente geométricos (Boyer, 1986).

Toda la problemática que provocaron en la matemática griega el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables y las paradojas de Zenón, contra la pluralidad y el movimiento, desencadenó en una gran crisis que generó lo que se conoce como el "horror al infinito", caracterizada por la negativa de los griegos de manejar el concepto de infinito. Esta situación y el hecho de tratar las magnitudes continuas separadas del número, llevó a que los griegos desarrollaran métodos infinitesimales basados en métodos puramente geométricos, lo que les impidió desarrollar el concepto numérico de límite. El infinito se ve entonces camuflado en el axioma de continuidad, en el principio de eudoxo y en el método de exhaución, que son la traducción geométrica del paso al límite.

Esta problemática se siguió presentando en el tiempo, en el desarrollo de los métodos infinitesimales que llevaron a la formación del concepto de límite. Descartes, por ejemplo, no utilizó límites ni infinitesimales. Descartes, afirma González, aunque desarrolló un método puramente algebraico para hallar la tangente a una curva, fue incapaz de aplicar su método a curvas mecánicas, por ejemplo la cicloide, por lo que inventa el concepto de centro instantáneo de rotación, donde aplica la idea de velocidad instantánea para sustituir a los límites y a los infinitesimales". (González, 1992)

Referencias bibliográficas

Boyer, C. B. (1986). Historia de la Matemática. Madrid: Alianza Editorial.
Euclides. (1970). Elementos de Geometría. En F. Vera, Científicos griegos, Vol.1,. Madrid: Aguilar.
González, P. (1992). Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Madrid: Alianza Editorial.
González, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables: La teoría de la proporción y el método de exhaución. SIGMA, 101-129.
Kline, M. (1994). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I. Madrid: Alianza Editorial.
Kline, M. (2000). Matemáticas: La pérdida de la certidumbre (quinta edición). México : Siglo XXI.
Mason, S. F. (2001). Historia de las Ciencias: 1.La ciencia antigua, la ciencia en Oriente y en la Europa medieval. Madrid: Alianza Editorial.
Pérez, P. (2001). Los conceptos matemáticos: Su génesis y su docencia. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
Wussing, H. (1998). Lecciones de Historia de las Matemáticas. Madrid: Siglo XXI Editores.