# PO-10 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGÉNEAS POR EL MÉTODO DE LOS OPERADORES INVERSOS

**Jorge E. Agudelo Quiceno**
Ingeniero Civil. Magister en Matemáticas
Profesor Asistente ITM
jorgeagudelo@itm.edu.co

**Yolanda Álvarez Ríos**
Matemática. Magister en Ciencias Económicas
Profesor Asistente ITM.
yolandaalvarez@itm.edu.co

**RESUMEN**

Para optimizar el tiempo invertido en la búsqueda de la solución de una ecuación diferencial de la forma donde es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes y una función polinómica, exponencial, sinusoidal o una suma o producto finito entre ellas, el método de los operadores inversos es más eficiente pues, éste consiste en efectuar operaciones de derivación y de integración de una manera ágil, con la ventaja frente a los dos métodos tradicionales de no conocer de antemano la solución complementaria de la ecuación diferencial.
El objetivo central de este trabajo es mostrar la manera como se utiliza el método para encontrar la solución particular de una ecuación diferencial no homogénea con coeficientes constantes, motivar el uso del mismo en el aula de clase y establecer las ventajas que tiene frente al método de los coeficientes indeterminados y al de la variación de parámetros.

Palabras Clave: Operador inverso, ecuación diferencial, solución.

**ABSTRACT**

To maximize the time spent in the search for the solution of a differential equation of the form where isa linear differential operator with constant coefficients and a polynomial function, exponential , sinusoidal or a sum or finite product, the method of inverse operator is more efficient because it consist in perform operations of derivation and integration in an agile way and has the advantage over the two traditional methods of not requiring the solution complementary of the differential equation.

The main objective of this paper is to show the virtues of the method of inverse operators in front of the traditional ones

Key Words: Inverse operators, differential equation, solution

**Introducción**

Este trabajo pretende socializar los resultados del proyecto de investigación “Estrategias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje significativo del Cálculo” desarrollado en el grupo de investigación Davinci del ITM.

El objetivo principal es establecer un puente que permita transitar fácilmente del Cálculo a la solución de una ecuación diferencial, pues la diferenciación y la integración son operadores que así lo permiten.

Los métodos que generalmente se emplean en un curso de Ecuaciones Diferenciales para encontrar la solución particular de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes son, el método de los coeficientes indeterminados y el de la variación de parámetros.

El primero de ellos sólo permite resolver aquellas ecuaciones diferenciales en las que la parte no homogénea corresponde a una función polinómica, exponencial, sinusoidal o una suma o producto finito entre estas; una variación de este método es el del Anulador, el cual no puede confundirse con el de los operadores inversos. El segundo, es más general, pues permite resolver no sólo los casos antes descritos, sino también aquellos en los cuales la parte no homogénea corresponde a cualquier tipo de función.

La fortaleza del método de los operadores inversos es la rapidez con la que se obtiene la solución particular. En este trabajo se parte de una definición y unas propiedades de los operadores que permiten resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de una manera más ágil que los métodos mencionados.

**Definición y propiedades del operador inverso**

Definición. Dada la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, se define el operador inverso — como el operador tal que es una solución particular de la ecuación diferencial.

Los operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes se comportan como cantidades algebraicas, por ende, se pueden multiplicar o factorizar y obedecen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva como lo hacen estas cantidades.

De otro lado, todo operador diferencial lineal puede escribirse como

En efecto,

Así, al definir y se obtiene el resultado.

Propiedades. Sea un operador diferencial lineal con coeficientes constantes. Entonces,

.

Sea y sea , entonces —

Sea y sea , entonces

Sea un intervalo abierto en , sea y sea , entonces

Sea tal que su término independiente es distinto de 0 y sea un polinomio de grado , entonces donde es el operador diferencial lineal que se obtiene al efectuar el cociente entre 1 y y en el cual se toman tantos términos de acuerdo al valor de .

Sea y sea tal que

,

Entonces y .

Sí , y son reales, entonces y .

Sí , entonces y .

y donde es un polinomio.

**Ejemplificación del método**

Este primer ejemplo es un caso típico de variación de parámetros.

Sea la ecuación diferencial

la cual puede expresarse como

La solución de esta ecuación por el método del operador inverso es

Aplicando la propiedad 3 con el operador inverso se obtiene

Que al integrar conduce a

Aplicando ahora la misma propiedad con el operador inverso se tiene finalmente

Que al integrar conduce a

Solución que se obtiene como se mencionó antes, por el método de la variación de parámetros el cual, como se puede comprobar, requiere de encontrar soluciones de ecuaciones polinómicas, realizar procesos de integración y derivación y plantear y resolver sistemas de ecuaciones.

Se observa además que, aunque por la definición de operador inverso, el método se emplea para encontrar la solución particular de una ecuación diferencial, en algunos casos como el del ejemplo anterior, éste permite obtener la solución completa.

Como segundo ejemplo, considere la ecuación diferencial

La cual puede resolverse utilizando el método de los coeficientes indeterminados, que implicaría además de procesos largos de derivación, el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones 2 2 para la parte correspondiente a y de un sistema de ecuaciones 4 4 para la parte correspondiente a .

Para utilizar el método del operador inverso, ésta debe escribirse como

De esta manera, la solución particular está dada por

Lo que es equivalente a

Por la propiedad 7

Ahora, por las propiedades 4, 9, 2 y 5, aplicadas en ese orden se tiene que

Así, con los resultados obtenidos se sigue que

**Referencias**


Agudelo, J. & Álvarez, Y. (2009). Cálculo Integral. Guía de trabajo independiente. Medellín: Fondo editorial ITM.

Henao, D. & otros. (1983). Ecuaciones Diferenciales. Medellín: Editorial Eafit.

Mercado, N. (1994). Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería. Medellín: Fondo editorial cooperativo.

Murray, R. (1983). Ecuaciones Diferenciales Aplicadas (3 ed.). México: Prentice-Hall.