PO-02 LA MATEMÁTICA EN LA MÚSICA[9]

Pablo Felipe Ardila Rojo
Magister en Ciencias matemáticas
Matemático. Docente Auxiliar ITM
pabloardila@itm.edu.co

RESUMEN

Desde la antigua Grecia, con los trabajos de Platón en los cuales se infiere una relación entre la armonía y sonido, equiparándolo con el espacio tiempo y el universo; más adelante Pitágoras tomando una cuerda, que se divide en raciones simples 2:1, 3:2, 4:3, produce octavas, quintas, cuartas, y con ello muestra una estrecha relación entre la música y las matemáticas.
Pretendemos mostrar como los conceptos musicales tales como escala, acorde, octava pueden ser relacionados con conceptos matemáticos y geométricos, tales como fracciones, sucesiones, media aritmética, proporciones y triángulos, entre otros.
Finalmente, analizamos los aportes de Juan Sebastián Bach, quien da al a música su más vital aporte, creando reglas y fusionando muchas escuelas musicales anteriores. Veremos cómo sus fugas pueden ser vistas mediante modelos
Para algunas de las aplicaciones, cómputos y modelaciones se ha empleado Geogebra, Scientific WorkPlace, entre otros como software de apoyo.

Palabras claves: música, matemática, fuga

ABSTRACT

From ancient Greece, Plato's works in which infers a relationship between harmony and sound, comparing it with the space time and the universe, later Pythagoras taking strings, which is divided into single servings 2:1, 3 : 2, 4:3, produces octaves, fifths, fourths, and thus shows a close relationship between music and mathematics.
We intend to show how the musical concepts such as scale, chord, octave can be related to mathematical and geometric concepts such as fractions, sequences, arithmetic mean, proportions and triangles, among others.
Finally, we analyze the contributions of Juan Sebastian Bach, who gives to music its most vital contribution, by creating rules and fusing many musical schools above. We will see how their leakage can be seen by models
For some applications, computation and modeling has been used Geogebra, Scientific WorkPlace.

Key Words: music, mathematics, fugue

Introducción

Platón en el año 360 antes de Cristo plantea por primera vez las relaciones entre la música y el universo, habla de cómo las partes individuales del universo se correlacionan con la armonía. Pero quizá Pitágoras, quien toma una cuerda de extremos fijos y comienza a dividirla en proporciones a 2, 3, 4, etc. nota que genera sonidos diferentes, que corresponden a octavas, quintas, terceras, entre

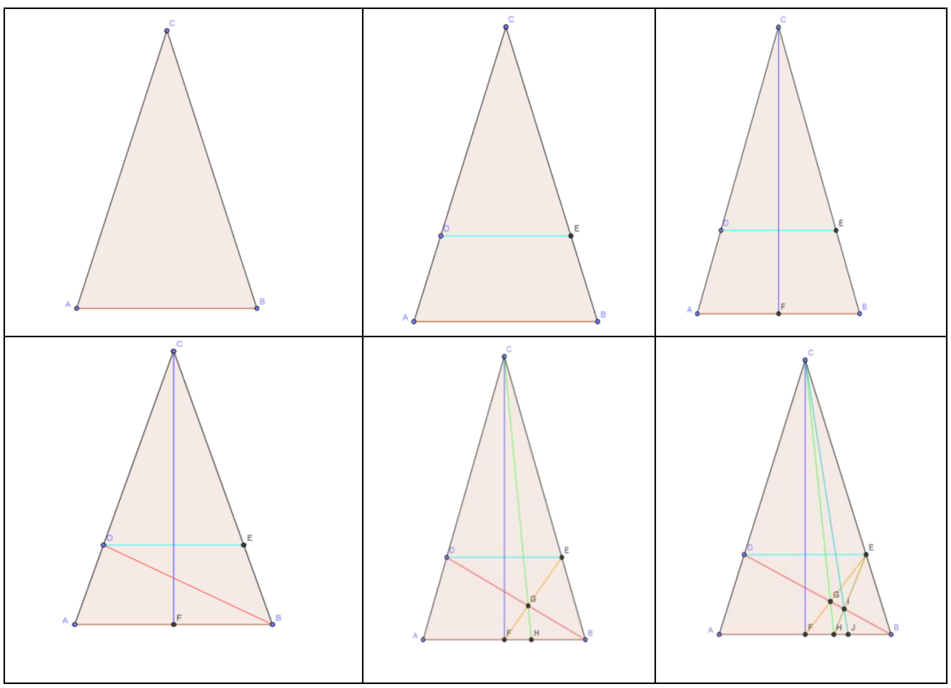
[9] La práctica de modelación en matemática escolar: una experiencia para el trabajo del aula en ingeniería. Grupo de investigación Da Vinci. ITM

otras. Esto nos remonta al monocordio, utilizado por Pitágoras en el siglo VI antes de Cristo, (González, E. 2010), el cual estaba formado por una sola cuerda y emitía sonidos en relación con la escala musical.

El uso de este instrumento dado por Pitágoras fue quizá el primer paso en mostrar que la música era generada por matemáticas, así variando la longitud de la cuerda, se obtenían sonidos diferentes los cuales estaban en la relación de la escala musical.

La geometría y al música

El proceso utilizado para generar los distintos sonidos era el siguiente: Se partía de un triángulo isósceles, ABC , con base en AB, se traza un segmento DE paralelo a la base, y tomamos la altura CF desde C hasta el lado AB, de esta forma la base AB queda divida en dos segmentos congruentes AF=FB, posteriormente, se unen los puntos D y B con el segmento DB, y los puntos F y E con otro segmento FE, por el punto G de intersección de estos segmentos, se traza un segmento que une el punto C con el punto de intersección de los anteriores segmentos, el corete este segmento con la recta AB, estará a una distancia de 1/3 del punto B. Lo desarrollado se hace con el programa Geogebra.



Con este método se consigue dividir una cuerda de longitud dada en segmentos que tienen 1/2, 1/3, 1/4, etc. de longitud para una unidad patrón. Lo interesante de este proceso es que cuando la cuerda se pone a vibrar con cualquiera de las longitudes obtenidas con el proceso anterior se obtienen sonidos que están en la escala musical y tenemos la siguiente tabla que relacionan las longitudes con la nota obtenida, suponiendo que originalmente se emita un do.

Longitud de la cuerda	Nota dada
1	Do
½	Do (segunda octava)

1/3	Sol
¼	Do (Tercera octava)
1/5	Mi
1/6	Sol
1/7	Si
1/8	
1/9	Re

La aritmética y al música

Existen otras aproximaciones, no obtenidas usando la geometría sino con aritmética, en este caso se emplean la media aritmética, geométrica y armónica que definiremos a continuación (Hestein,1975)
Medía aritmética: Sean , números reales no necesariamente diferentes entonces la media entre ellos , se define como:

Medía geométrica: Si números reales, tales que si n es par (2,4,6,…) entonces su media geométrica

Media armónica: Para un conjunto de números reales la media armónica entre ellos , se obtiene de la siguiente forma

Donde , ,…, son las frecuencias relativas de cada número (es decir las veces que se repite cada número)
Existe una importante relación entre la media geométrica y aritmética, que es la siguiente:

Ejemplos.
En lo relacionado con la música si tomamos los números 1 y ½ su media aritmética

Ahora repetimos el mismo cómputo con la media armónica

Finalmente, sacamos la media geométrica

Escribiendo los números anteriores en la recta numérica obtenemos

Resulta que si tomamos los cocientes – – — .Esto es, la sucesión formada por es una sucesión geométrica de razón —. De forma – — —, con

Por motivos ideológicos, los pitagóricos asociaron el valor 2/3 al a quinta de la octava (sol) y 3/4 con la cuarta (Fa), pero no usaron el tercer valor — ya que este número es irracional y según ellos era mejor no dar a conocer al público números irracionales pues éstos estaban fuera de la perfección del universo que violaban los números irracionales por su inconmensurabilidad, es decir por no poder ser vistos como el cociente de dos racionales. Siendo esta longitud correspondiente a Fa sostenido (F #).
Bach y la música: la pequeña fuga en sol menor BWV 578

Esta obra compuesta por J. S. Bach entre los años de 1700 a 1707 presenta un estilo fugado (que implica que un tema se repite varias veces en diferentes tonos según las reglas de la armonía y el contrapunto (Brimal, 2009). Su nombre ha sido acuñado por extensión más no por su contenido y desarrollo. La obra comienza con la exposición del tema de la fuga que se denomina sujeto, posterior a esto se responde con el contrasujeto (Almudena, 2011), que es otro tema que siempre se ejecutará cuando entre el sujeto. La dinámica de cada fuga es un rasgo propio como en una persona la huella digital, depende de factores tales como el tono, el compás, la velocidad en la cual fue pensada la fuga, entre otras).

En el desarrollo de la obra, el tema de la fuga aparece varias veces, en tonos diferentes (Danhauser, 2005), con algunas entradas incompletas y adornadas con algunas voces adicionales que no están en la fuga (Farlex, 2011). La obra termina, con la entrada del tema en el tono original (sol menor) en el bajo (pedal del órgano) y al final una coda en acordes (Almudena, 2011). Haremos ahora un análisis matemático de lo expuesto en el inicio. Para un mejor manejo de los datos cada nota de la escala se le dará un número natural, empezando con el do más grave del piano el cual en nuestra representación se le asignará el 1, luego do # con 2, re 3, etc. Esto lo vemos en la siguiente tabla

Nota	Valor
Do	1
Do#	2
Re	3
Re#	4
Mi	5
Fa	6
Fa#	7
Sol	8
Sol #	9
La	10
La #	11
Si	12
Do	13

Nota	Valor
Do#	14
Re	15
Re#	16
Mi	17
Fa	18
Fa#	19
Sol	20
Sol #	21
La	22
La #	23
Si	24
Do	25
Do#	26

Nota	Valor
Re	27
Re#	28
Mi	29
Fa	30
Fa#	31
Sol	32
Sol #	33
La	34
La #	35
Si	36
Do	37
Do#	38
Re	39

Nota	Valor
Re#	40
Mi	41
Fa	42
Fa#	43
sol	44
Sol #	45
La	46
La #	47
Si	48
Do	49

Con esta tabla, se hace más fácil seguir el desarrollo de la obra. Empecemos con la primera entrada del tema.

Escribamos ahora el tema inicial, marcado en la primera parte usando la convención antes establecida obtenemos que el primer tema o entrada de la fuga es S1= (32)(39)(35)(34)(32)(35)(34)(32)(31)(34)(27)(32)(27)(34)(27)(35)(34)(32)(34)(27)(32)(27)(32)(34)(27)(34)(35)(34)(32). Para la segunda entrada de la fuga se tiene S2= (27)(34)(30)(29)(27)(30)(29)(27)(26)(29)(22)(27)(22)(29)(22)(30)(29)(27)(29)(22)(27)(22)(27)(29)(22)(29)(30)(29)(27) El tercer tema se puede describir como s3= (20)(27)(23)(22)(20)(23)(22)(20)(19)(22)(15)(20)(15)(22)(15)(23)(22)(20)(22)(15)(20)(15)(20)(22)(15)(22)(23)(22)(20)

Por último entra el tema en el pedal que no aparecen la figura es S4= (15)(22)(18)(17)(15)(18)(17)(15)(14)(17)(10)(15)(10)(17)(10)(18)(17)(15)(17)(22)(15)(10)(15)(17)(10)(17)(18)(17)(15).

El tema hace una quinta entra esta vez en el tono original, luego .

En la siguiente tabla aparecen marcadas las entradas del tema (Rodeby , 2002).)

Ahora empecemos a relacionar los temas S1 y S2, recordemos un concepto matemático llamado congruencia, , si es múltiplo de m, (Gutierez, 2002). Ahora relacionando los temas antes citados se tiene:

Resta	Congruencia
Congruencia entre S1 y S2	
Congruencia entre S1 y S3	
Congruencia entre S1 y S4	

Así concluimos que: ,),),

De lo anterior vemos existe un estrecha relación entre los temas fugados de J.S. Bach y las congruencias, quedan otros interrogantes respecto a la relación con la teoría de grupos, álgebras y otras estructuras algebraicas (Hestein, 1975).

Bibliografía

Almudena, B. (28 de febrero de 2010). La forma Fuga: La pequeña fuga en sol menor BWV 578. Recuperada el 1 de agosto de 2011, de (http://www.enchufa2.es/archives/la-forma-fuga-pequena-fuga-en-sol-menor-bwv-578-de-bach.html

Brimal, J.(2009). Cuaderno de teoría 3 en 1.Medellín. Editorial Kimpres Ltda

Danhauser, A. (2005). Teoría de La música. Medellín. Editorial Kimpres Ltda

Farlex, J. Fuga. Recuperada el 10 de agosto de 2011, de http://www.thefreedictionary.com/fugue).

González, E. (2010), Pitágoras y la música. Recuperado el 2 de agosto de 2011, de http://www.iesezequielgonzalez.com/.

Gutierez, A (12 de marzo de 2002). Congruencias. Recuperado el 15 de agosto de 2011, de http://personales.unican.es/ruizvc/algebra/congruencias1.pdf

Hestein, I. (1975). Topics in algebra. Lexington. Xerox College Publishing.

Rodeby music (2002). Partitura la pequeña fuga en sol menor. Recuperada el 28 de julio de 2011, de http://www.free-scores.com/download-sheet-music.php?pdf=8197