PO-03 UTILIZACIÓN DE LA DERIVACIÓN IMPLÍCITA PARA DETERMINAR LAS COORDENADAS Y ECUACIONES DE LOS ELEMENTOS DE LAS SECCIONES CÓNICAS[10]

María Cristina González Mazuelo
Ingeniera Civil
Docente auxiliar Instituto Tecnológico Metropolitano. Medellín
mariagonzalez@itm.edu.co

Juan Guillermo Paniagua Castrillón
Ingeniero mecánico. Magister en educación y desarrollo humano.
Docente asistente Instituto Tecnológico Metropolitano. Medellín
juanpaniagua@itm.edu.co

RESUMEN

En la mayoría de los textos rastreados, se obtienen los elementos de las secciones cónicas a partir de su ecuación general, transformándola a su forma canónica mediante operaciones algebraicas. Esta ponencia presenta un método alternativo que permite determinar las coordenadas y las ecuaciones de los elementos de las secciones cónicas a través de la derivación implícita, a partir de la ecuación general , inicialmente con . La propuesta se fundamenta en el concepto geométrico de la derivada de una curva, como una expresión general para la pendiente de todas las rectas tangentes a ella, lo cual permite determinar las coordenadas de los puntos de corte de ésta con los ejes coordenados. El método puede ser sistematizado fácilmente a partir de la ecuación general, empleando los valores de sus coeficientes. Se muestra la sistematización del método con una interfaz GUIDE® de Matlab®, donde se evidencia su aplicabilidad y funcionalidad.

Palabras clave: Derivación, implícita, cónicas

ABSTRACT

In most texts tracked the elements of conic sections are obtained from the general equation, when transformed to a canonical form by algebraic operations. This paper presents an alternative method to determine the coordinates and equations of the elements of conic sections through implicit differentiation, from the general equation , with . The proposal is based on the geometric concept of the derivative of a curve as a general expression for the slope of all lines tangent to it, which determines the coordinates of the breakpoints of the curve with the coordinate axes. The method can be easily systematized from the general equation, using the values of their coefficients. It is Shown the systematization of the method with an interface to Matlab GUIDE®, which demonstrates its applicability and functionality.

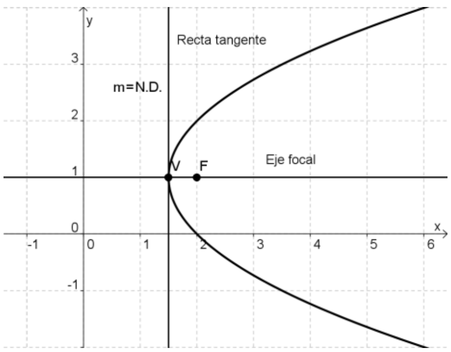
Key words: Derivative, implied, conical

[10] Este trabajo hace parte de las estrategias generadas como resultado del proyecto de investigación Estrategias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje significativo del cálculo, adscrito al grupo de investigación Da Vinci, del ITM. Institución Universitaria.

Introducción

La propuesta está fundamentada en la concepción geométrica de la derivada, la cual permite determinar la ecuación de las pendientes de las rectas tangentes a una curva. En la ecuación general con (Sin rotación de ejes) se puede encontrar las coordenadas de los puntos de corte de la curva con los ejes coordenados o con ejes paralelos a ellos.

Cuando el eje focal de una sección cónica es paralelo a uno de los ejes coordenados, en los puntos de corte (vértices), la pendiente (m) de la recta tangente a la curva es cero (Recta horizontal) ó no está definida (Recta vertical). (Ver figura 1)



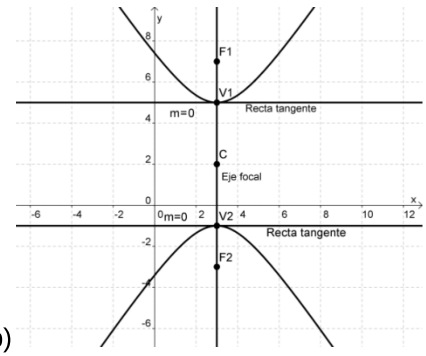
b)


Figura 1. Esquematización de las rectas tangentes a la curva para a) parábola b) hipérbola

Desarrollo del método

A partir de la ecuación general , se puede determinar el tipo de sección cónica de acuerdo con los valores de los coeficientes así:

Si y , la ecuación general se transforma en , que corresponde a una parábola con eje focal horizontal. Si y , la ecuación es una parábola de eje focal vertical.
Si y , y son de igual signo, la ecuación corresponde a una elipse. Si , es una circunferencia.
Si y , y son de diferente signo, la ecuación general corresponde a un hipérbola.

Al derivar implícitamente la ecuación general de la sección cónica

(1)

con se obtiene

(2)

La expresión (2) corresponde a la forma general de la pendiente de la recta tangente en los vértices de la sección cónica. El procedimiento a utilizar para cada sección cónica se resume a continuación.

Parábola de eje focal horizontal

La recta tangente a la curva en el vértice tiene pendiente no está definida y con , en (2) tenemos que . Obteniendo a y reemplazando en la ecuación general (1) y solucionando para , las coordenadas del vértice de la parábola son

(3)

Para encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz, como son elementos que no hacen parte de la curva, se deben buscar de forma geométrica. El valor de (Distancia del foco al vértice ó del vértice a la directriz) es —, luego, las coordenadas del foco son

(4)

La ecuación de la directriz es

(5)

Las expresiones encontradas pueden ser sistematizadas en medios informáticos. En la figura 2 se muestra una parábola de eje focal horizontal, con su vértice, foco y directriz, además de sus coordenadas y ecuación, usando una interfaz GUIDE de Matlab

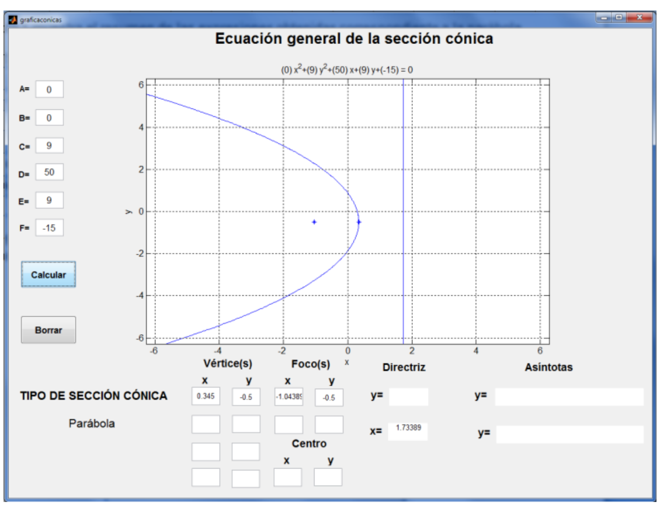


Figura 2. Visualización de una parábola de eje focal horizontal en Interfaz GUIDE de Matlab

Parábola de eje focal vertical

Para hallar las coordenadas del vértice, foco y ecuación de la directriz se procede de forma similar a la parábola de eje focal horizontal. A partir de (2) con y como la recta tangente a la curva en el vértice es horizontal . Obteniendo a y reemplazando en la ecuación general (1), obtenemos las coordenadas del vértice de la parábola

— —— (6)

Sabiendo que —, las coordenadas del foco son — ——— y la ecuación de la directriz es ———.

La tabla 1 muestra el resumen de las expresiones obtenidas correspondiente a la parábola

Tabla 1. Resumen de coordenadas y ecuaciones de los elementos de la parábola

ELEMENTO	**EXPRESIONES GENERALES**	
	EJE FOCAL HORIZONTAL	EJE FOCAL VERTICAL
Ecuación General		
PARÁBOLAS CON VÉRTICE EN		
Orientación del eje focal		
Coordenadas de los vértices	——— —	— ———
Coordenadas del foco	——— —	— ———
Ecuación de la directriz	———	———
Ecuación del eje	—	—

En la figura 3 se muestra una parábola de eje focal vertical con su vértice, focos y directriz, indicándose las coordenadas y ecuaciones de estos elementos.

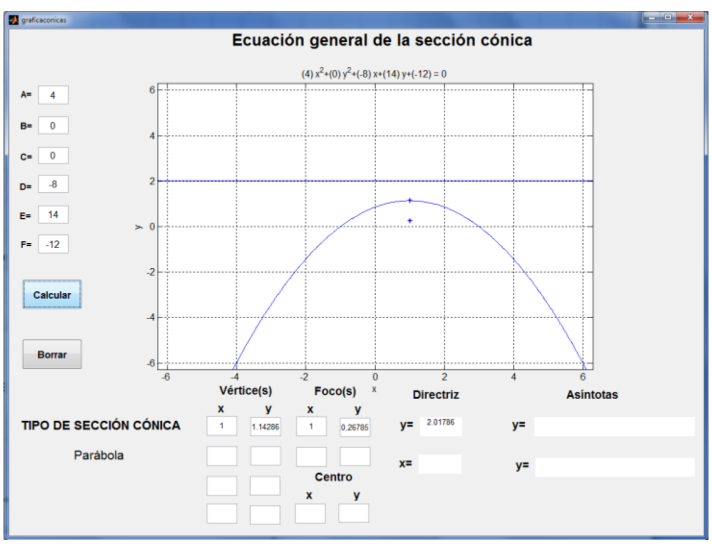


Figura 3. Visualización de una parábola de eje focal vertical en Interfaz GUIDE de Matlab

Elipse

En la figura 4 se muestran las rectas tangentes a la elipse en cada vértice.

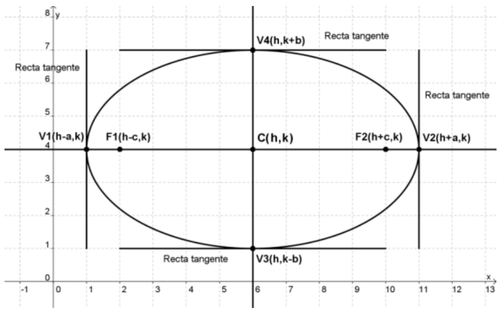


Figura 4. Elementos de la elipse

Para las rectas tangentes verticales, de (2) se tiene que , obteniéndose —. Para las rectas tangentes horizontales , hallándose a —. Como el centro de la elipse tiene por abscisa la misma de los vértices y , y su ordenada es igual a la de los vértices y , entonces las coordenadas de éste son

(7)

Para hallar las coordenadas faltantes de los vértices se reemplazan los valores de ó , según el caso en la ecuación general (1) y para las coordenadas de los focos, se buscan los valores de , y , en forma geométrica y algebraica. En la tabla 2 se muestran los resultados obtenidos para cada uno de los elementos de la elipse.

Tabla 2. Resumen de coordenadas y ecuaciones de los elementos de la elipse.

ELEMENTO	**EXPRESIONES GENERALES**	
	EJE FOCAL HORIZONTAL	EJE FOCAL VERTICAL
Ecuación General		
ELIPSES CON CENTRO EN		
Coordenadas del centro		
Coordenadas de los vértices		
Distancia entre vértices		
Orientación del eje focal	<	<
Coordenadas de los focos		

Ecuación del eje	—	—

En las figuras 5 y 6 se muestran una elipse de eje focal horizontal y una de eje focal vertical con sus vértices y focos respectivamente, indicándose las coordenadas de éstos.

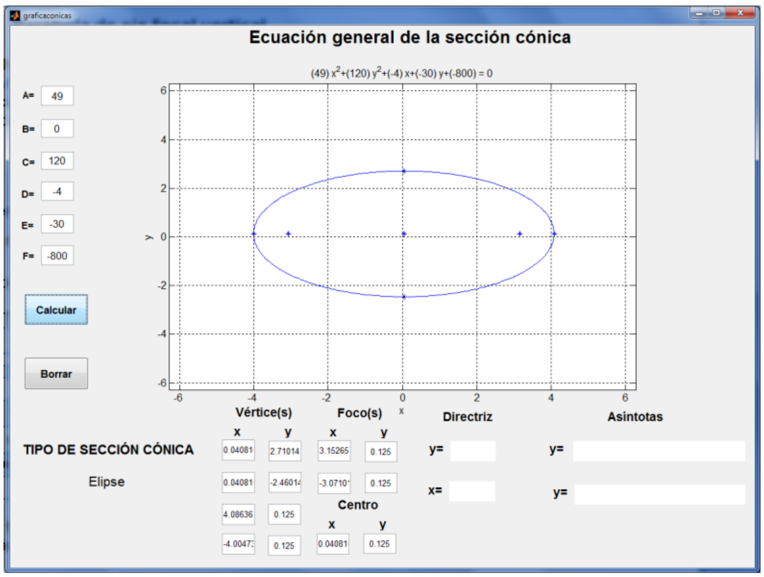


Figura 5. Visualización de una elipse de eje focal horizontal en Interfaz GUIDE de Matlab

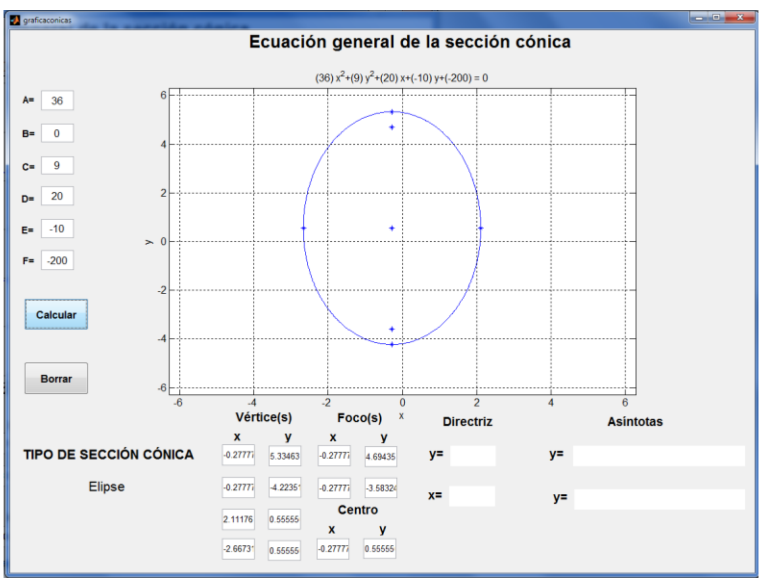


Figura 6. Visualización de una elipse de eje focal vertical en Interfaz GUIDE de Matlab

Hipérbola

Inicialmente, se verifica si la hipérbola es de eje focal horizontal o vertical. Para ello, comprobamos si —, la hipérbola es de eje horizontal ó si —, es de eje vertical. Cuando la recta tangente en los vértices es vertical , luego —; si la recta tangente es horizontal y se tiene que —. La otra coordenada de los vértices se obtiene reemplazando el valor de ó , según el caso, en la ecuación general (1) y se soluciona para la variable presente en ella.

Las coordenadas y ecuaciones de los elementos que no pertenecen a la curva (Centro, asíntotas), se encuentran de forma algebraica y geométrica. En la tabla 3 se muestran los resultados obtenidos durante el proceso.

Tabla 3. Resumen de coordenadas y ecuaciones de los elementos de la hipérbola.

ELEMENTO	**EXPRESIONES GENERALES**	
	EJE FOCAL HORIZONTAL	EJE FOCAL VERTICAL
Ecuación General		
HIPERBOLAS CON CENTRO EN		
Orientación del eje focal		
Coordenadas del centro		
Coordenadas de los vértices		
Coordenadas de los focos		
Asíntotas		

En las figuras 7 y 8 se muestran una hipérbola de eje focal vertical y una de eje focal horizontal respectivamente, con sus vértices, focos y asíntotas, indicándose las coordenadas y ecuaciones de ellos.

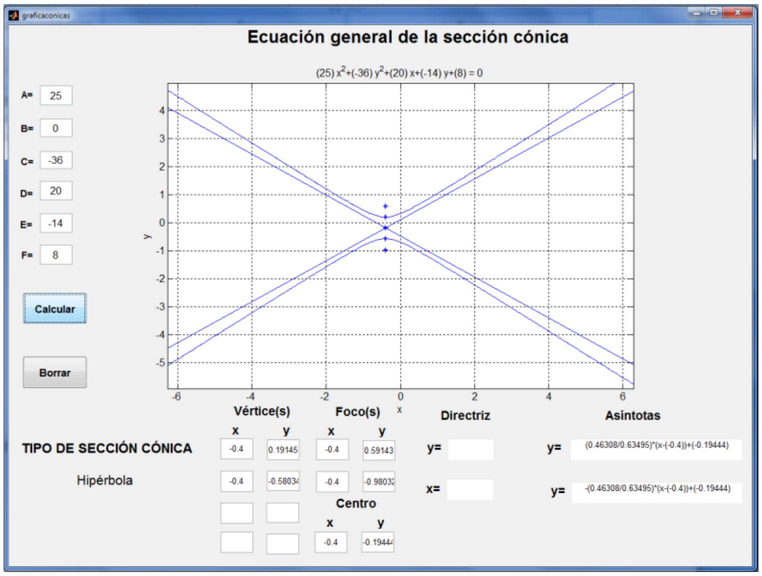


Figura 7. Visualización de una hipérbola de eje focal vertical en Interfaz GUIDE de Matlab

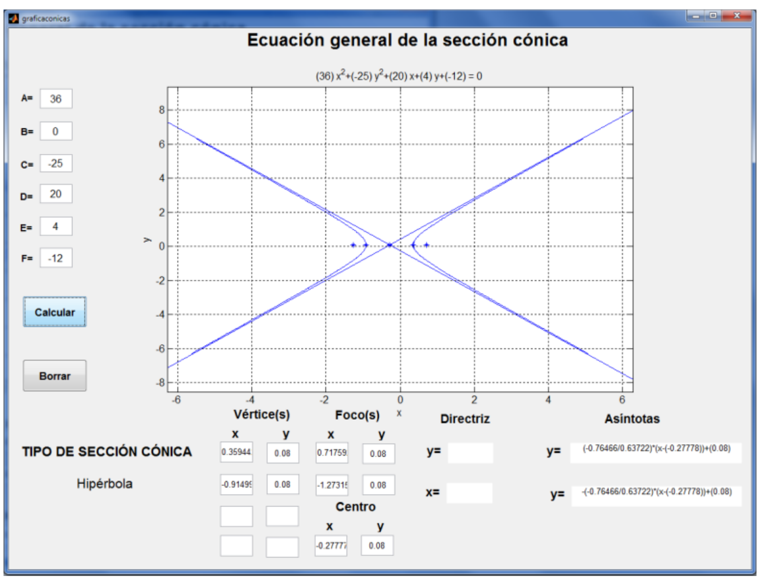


Figura 8. Visualización de una hipérbola de eje focal horizontal en Interfaz GUIDE de Matlab

Conclusiones

La propuesta brinda un método alternativo a los desarrollados en la mayoría de los textos, mostrando una aplicación de la derivación implícita. Las expresiones obtenidas en la propuesta son fácilmente sistematizables. La opción mostrada con la interfaz GUIDE de Matlab permite calcular con exactitud y facilidad las coordenadas y ecuaciones de los elementos de las secciones cónicas ingresando solamente los coeficientes de la ecuación general, además de proporcionar una gráfica donde se muestran la curva y sus elementos.

La propuesta no tiene limitaciones en cuanto a los valores de los coeficientes de la ecuación general, siendo posible utilizar en ellos valores racionales e irracionales, los cuales por el método tradicional generan mayor dificultad.

Referencias bibliográficas

Demana, F. D., Waits, B. K., Foley, G. D., Kennedy, D. (2007). *Precálculo. Grafico, numérico, algebraico*. Mexico:

Fleming, W., Varberg, D. (1991). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Naucalpan de Juárez, México:

González, M., Paniagua, J. Patiño, G. (2008). *Secciones cónicas: Una mirada desde la derivación implícita*. Medellín:

Sánchez, A. V. (2002). *Fundamentos de Geometría Analítica*. México: