CU-11 ALGUNOS PROBLEMAS DE MÉTODOS NUMÉRICOS USANDO DERIVE

Orlando García Jaimes
Doctor en Ciencias Matemáticas U.P.V España,
profesor Universidad EAFIT
olgarcia@eafit.edu.co

RESUMEN

En este trabajo se pretende resolver algunos problemas clásicos del análisis numérico usando Derive; entre los problemas tratados estarían los relacionados con el cálculo de raíces mediante el método de Newton y la bisección, la extensión del método de Newton a varias variables (sistemas de ecuaciones no lineales), problemas relativos a interpolación mediante splines cúbicos, interpolación mediante polinomios y problemas relativos a la solución numérica de ecuaciones diferenciales (Euler y Runge Kutta). El enfoque del trabajo está centrado en el análisis de las condiciones suficientes y necesarias para resolver el problema planteado y en el uso de las herramientas computacionales proporcionadas por el paquete derive.

Palabras claves Derive, métodos numéricos, Interpolación.

ABSTRACT

This work is intended to solve some classic problems of numerical analysis using Derive; among the problems would be those relating to the calculation of roots by Newton's and the bisection methods, the extension of Newton's method for multiple variable (non-linear equations systems), problems related to interpolation using cubic splines, interpolation by polynomials and problems relating to the numerical solution of differential equations (Euler and Runge Kutta). The focus of the work is centred on the analysis of necessary and sufficient conditions for solving the problem and in the use of the computational tools provided by the package derive.

Key words Derive, numerical methods, interpolation.

Introducción

Existe una gran variedad de paquetes para realizar cálculos matemáticos más o menos complejos, sin embargo el uso de estos requiere a menudo que el usuario tenga que dedicarle mucho tiempo a la tarea de conocer y manipular las instrucciones del paquete; en este sentido el uso de paquetes amigables con el usuario permite que no se pierda de vista el problema fundamental que nos ocupa y que se puedan realizar los cálculos requeridos de una manera fácil y eficiente. En este trabajo se quiere mostrar algunos ejemplos del análisis numérico que, aún cuando requieren un gran volumen computacional, se pueden programar y resolver de forma sencilla con derive.

Método de Newton

Existen algunos métodos, como el de la secante y de la posición falsa que tienen su origen en aproximaciones de en una vecindad de la raíz , mediante una línea recta. El método de Newton o Newton-Raphson, como también se le conoce, aplica la misma idea de linealización con la diferencia que se inicia con un solo punto de partida en vez de los dos con los que se inicializan los métodos de la secante y de la posición falsa. La aproximación lineal que se aplica en el caso del método de Newton es la que corresponde a la recta tangente a la gráfica de en el punto teniendo en cuenta que es un valor próximo a la raíz que estamos buscando. En otras palabras, una buena aproximación para la raíz de se puede obtener considerando el punto de intersección de la recta tangente a en con el eje de las esta situación puede verse en la siguiente figura.

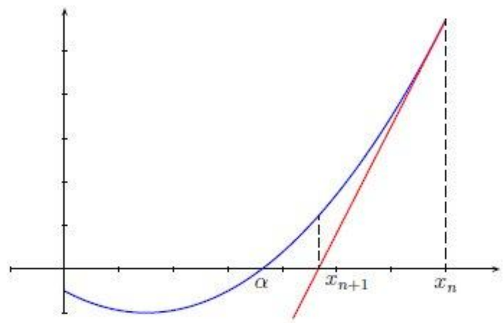

Figura 1. Interpretación geométrica del método de newton.

Dada la aproximación para la raíz, para calcular el nuevo elemento de la sucesión recordemos que la ecuación de la recta tangente a la función en el punto esta dada por

Si se denota por a la intersección de esta recta con el eje x, tenemos que

En la aplicación de este método iterativo, se parte de una aproximación inicial, digamos y se obtiene una sucesión Para garantizar la convergencia de tal sucesión es necesario tener algunas condiciones con respecto a la función En general, lo que se necesita para asegurar la convergencia es inicializar el proceso con una aproximación adecuada de la raíz, que y que . Al aplicar un método iterativo para calcular raíces de ecuaciones, es necesario tener un criterio de parada para decidir cuándo terminar el proceso, es usual incorporar a un algoritmo más de un criterio de parada. En el caso del método de Newton se puede emplear un criterio que tenga en cuenta el número de veces que se aplique el algoritmo o también un criterio que tenga en cuenta una acotación previa para el error o tolerancia en la determinación de la raíz. Como en la práctica no conocemos el valor exacto de la raíz podemos afirmar que si la sucesión es convergente, entonces las diferencias se aproximan a 0, por lo cual, un buen criterio de parada para el algoritmo corresponde a la ejecución del mismo hasta el momento en el cual para un dado de antemano. El siguiente diagrama de flujo muestra la forma de aplicar el método de Newton teniendo en cuenta los dos criterios de parada descritos.

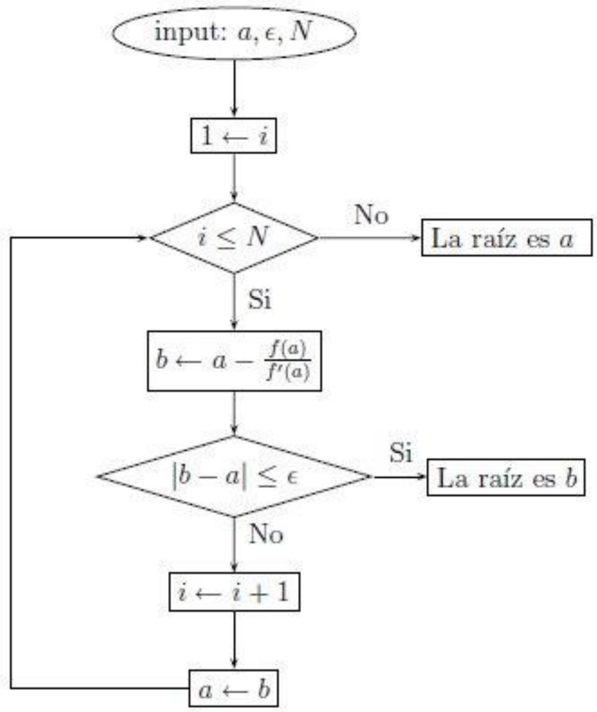

Figura 2. Diagrama de flujo para el método de Newton

Las instrucciones en derive para este algoritmo son las siguientes

$$f(x) :=$$

$$vo(in) := [0,\ in]$$

$$IT(v) := \left[v_1 + 1,\ v_2 - \frac{f(v_2)}{\lim\limits_{x \to v_2} \frac{d}{dx} f(x)} \right]$$

$$new(in,\ n) := ITERATES(IT(v),\ v,\ vo(in),\ n)$$

En se introduce la función, en se introduce el intervalo donde se cree que se encuentra la raíz, la instrucción met(in,n) genera una lista con n valores de la posible raíz de

Interpolación

Otro de los problemas clásicos del análisis numérico es el de determinar un polinomio que pase por un número fijo de puntos del plano Este problema es conocido con el nombre de interpolación polinómica y en este artículo presentaremos dos técnicas de solución diferentes, en un caso se resolverá el problema mediante la solución de un determinado sistema lineal de ecuaciones y en el segunda instancia se construirá el polinomio interpolador mediante el algoritmo conocido como método de Lagrange.

El problema que se presenta es el de construir un polinomio de grado mínimo que pase por el conjunto de puntos Si llamamos al polinomio que buscamos, tenemos que y lo que se tiene que calcular son los coeficientes del polinomio. Para determinar estos coeficientes, se recurre a las restricciones que se imponen al polinomio de pasar por cada uno de los puntos dados, esto es lo cual da origen al siguiente sistema lineal de ecuaciones con las incógnitas

La matriz del sistema anterior es invertible (los son todos diferentes) y se conoce como "matriz de vandermonde," de este modo el sistema tiene solución única. La siguiente lista de instrucciones en derive, nos proporciona un algoritmo para determinar el polinomio interpolador correspondiente a una tabla de valores

$$\mathrm{mc}(A) := \mathrm{vector}(\mathrm{l}(A, k), k, \mathrm{dimension}(A))$$

$$l(A,k) := vector(A_{k,1}^{j-1}, j, dimension(A), 1, -1)$$

$$Pol(A) := (mc(A))^{-1} A_{\downarrow\downarrow 2}^{t} vector(x^{j-1}, j, dimension(A), 1, -1)$$

Para ejecutar el algoritmo lo único que hay que hacer es escribir la tabla de datos (la matriz A) y calcular

El polinomio interpolador asociado a una tabla de valores es único, siempre y cuando los valores de las sean diferentes, sin embargo, existen distintas formas y algoritmos para determinarlo. Otro de estos algoritmos es conocido como forma de Lagrangre del polinomio de interpolación. En este método se pretende construir el polinomio escribiéndolo en la forma

dónde los términos son polinomios que dependen de los valores Para calcularlos, recordemos que lo cual nos muestra que , y como se tiene que , entonces el polinomio debe escribirse en la forma

La siguiente lista de instrucciones en Derive permite calcular el polinomio interpolador mediante el algoritmo de Lagrange, así como cada uno de los
polinomios .

$$fl(i,a) := IF(i = j, 1, (x - a_{\downarrow j \downarrow 1})/(a_{\downarrow i \downarrow 1} - a_{\downarrow j \downarrow 1}))$$

$$coe(i,a) := \prod_{j=1}^{dimension(a)} fl(i,a)$$

$$Pol(a) := \sum_{i=1}^{dimension(a)} coe(i,a) a_{\downarrow i \downarrow 2}$$

Para calcular el polinomio interpolador se debe entrar la matriz de datos y luego evaluar Pol(a), si se quiere calcular cada uno de los polinomios se debe evaluar la función coe(i,a) donde es el orden del coeficiente (de hasta n+1) y a es la matriz de datos.

Series de Fouirer

Los conceptos de ortogonalidad y de base que se presentan para los espacios vectoriales de dimensión finita, pueden extenderse al caso de espacios vectoriales donde la dimensión es infinita. Tal es caso del conjunto de las funciones continuas a tramos definidas de en y con período , para este conjunto, puede decirse que la sucesión de funciones constituye una base ortogonal, considerando como producto interno. El resultado fundamental para la representación de funciones periódicas se resume en el siguiente teorema.

Teorema

Si f(x) es una función integrable de período , su serie de Fourier converge a – en todo punto donde posee derivadas por izquierda y derecha.

En este caso la representación de como serie, es la siguiente

–

donde los coeficientes y se definen como

–

–

Para calcular y realizar las gráficas de algunas de las sumas parciales de la serie de Fourier, se utilizaron las siguientes instrucciones en derive:

$$f(x) :=$$

$$a0 := 1/(2\pi) INT(f(x), x, -\pi, \pi)$$

$$a(n) := 1/\pi INT(f(x)\cos(nx), x, -\pi, \pi)$$

$$b(n) := 1/\pi INT(f(x)sen(nx), x, -\pi, \pi)$$

$$suma(m) := a0 + \sum(a(n)\cos(nx) + b(n)sen(nx), n, 1, m)$$

Para realizar cálculos con esta rutina, debe de editarse la función y luego ejecutar la instrucción suma(m), la cual permite obtener los m primeros términos de la serie de Fourier. En la siguiente gráfica puede observarse la función y los términos de una de sus sumas parciales para la función

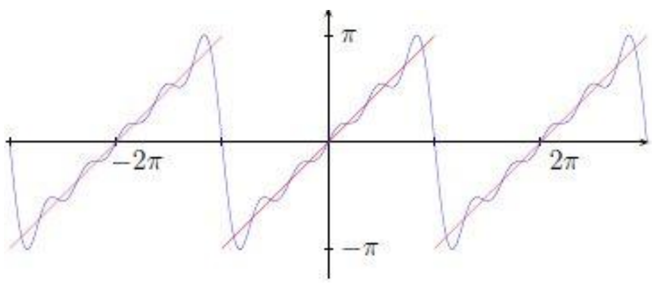

Figura 3. Sumas parciales para la función

Referencias Bibliográficas

Boyce, W. E y R.C. Diprima, (1997). Elementary differential equations and boundary value problems, New York, Willey.

Burden,Richard L, y Faires, J. Douglas, (2002) Análisis Numérico. Thomson.

Kincaid,David y Cheney, Ward, (2002) Análisis Numérico. Addison Weslye