Temática:

Enseñanza y aprendizaje de la matemática y la estadística

Estimación de medidas en el proceso de transformación de papel reciclado

Estimation of measures in the process of transforming recycled paper

Santiago Nieto, Yurlen[1] y Figueroa Flórez, Jaider[2]

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo contribuir en el fortalecimiento de procesos asociados al pensamiento métrico y los sistemas de medidas, a partir de la solución de situaciones de acción. Se centra, en el diseño de una estrategia que por medio de la transversalidad extienda el proceso educativo que se da en educación matemática, específicamente en cuatro de los procesos asociados al pensamiento métrico y los sistemas de medidas, en los estudiantes de grado 7º de la Institución Educativa

1 Universidad Nacional de Colombia – sede Manizales, Grupo de investigación EduCEN, ORCID ID 0000-0001-9278-0419. Contacto: yksantia@unal.edu.co.

2 Universidad Nacional de Colombia – sede Manizales, Grupo de investigación EduCEN, ORCID ID 0000-0002-7408-6017. Contacto: jafigueroaf@unal.edu.co.

Cámara Junior de la ciudad de Armenia, Quindío. Para ello, se considera la situación problemática actual en cuanto al desinterés y la poca importancia por el aprendizaje de las matemáticas y por la preservación del medio ambiente, a partir de resultados obtenidos en pruebas externas en cuanto al pensamiento métrico y sistemas de medias y el manejo de los residuos sólidos en nuestra comunidad. Se empleó enfoque cualitativo y alcance descriptivo – correlacional, que permite especificar las tendencias que se evidencian durante la ejecución de la estrategia didáctica planteada por medio de la producción escrita de los estudiantes. Teniendo en cuenta tres fases, diagnostica, formulación e implementación, evaluación y retroalimentación. En los resultados, se enfatiza el avance en los siguientes procesos asociados: La apreciación del rango de las magnitudes. La selección de unidades de medida, patrones y de instrumentos y procesos de medida. La estimación de medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de capturar lo continuo con lo discreto. El papel de trasfondo social de la medición.

Palabras clave: Pensamiento métrico, situación de acción, transversalidad, resolución de problemas, procesos cognitivos.

Abstract

This work aims to contribute to the strengthening of processes associated with metric thinking and action systems, based on the resolution of situations of action. It focuses, on the design of a strategy that through transversely extends the educational process that occurs in mathematical education, specifically in four of the processes associated with metric thinking and measures systems, in the 7th grade students of the Educational Institution Junior Chamber of the city of Armenia, Quindío. For this, the current problematic situation is considered in terms of disinterest and little importance for learning mathematics and preserving the environment, based on results obtained in external tests in terms of metric thinking and means systems and the management of solid waste in our community. Qualitative approach, descriptive – correlational scope, was used, which allows to specify the trends that are evidenced during the execution of the didactic strategy proposed through the written production of students. Taking into account three phases, diagnostic, formulation and implementation, evaluation. In the results, progress is emphasized in the following associated processes: Appreciation of the range of magnitudes. The selection of units of measure, patterns and instruments and measurement processes. The estimation of measurement of quantities of different magnitudes and the aspects of the process of capturing the continuous with the discrete. The social background role of measurement.

Keywords: Metric thinking, action situation, transversally, problem solving, cognitive processes.

I. INTRODUCCIÓN

La estimación de medida es didácticamente interesante, porque incorpora una nueva forma de hacer matemáticas, relacionada en el uso de estrategias personales de interpretación y valoración de resultados que están presentes en la cotidianidad o en situaciones realizadas para ello [1]. De este modo, el trabajo en las aulas de la estimación de medida permite que el conocimiento matemático relacionado con la medida adquiera sentido. Con ello, los estudiantes podrán comprender parte de la realidad que los rodea y criticarla. [1]

Por lo anterior, el propósito de esta propuesta se inclina por afianzar conocimientos matemáticos por medio del reciclaje de papel y su transformación, ya que permite aportar a la preservación del medio ambiente y, al mismo tiempo, mejorar la calidad de vida de la comunidad. Integrando el entorno y las situaciones cotidianas con los conceptos matemáticos se demuestra a los estudiantes la importancia de su aprendizaje y lo fácil que puede ser la comprensión de los mismos. Donde pase de ser un oyente a un actor crítico y generador de cambios dentro de su comunidad. Además, esta transversalidad brinda pautas que permiten optimizar la metodología y la evaluación en la acción educativa.

Se hace necesario, entonces, diseñar una estrategia de transformación del papel reciclado, que permita generar aprendizajes significativos en los procesos de medición y conversión, incluidos en el pensamiento métrico y los sistemas de medidas y sus procesos asociados como:

- La selección de unidades de medida, patrones y de instrumentos y procesos de medición.
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La estimación de medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de capturar lo continuo con lo discreto.
- El papel de trasfondo social de la medición. [2], [3]

A partir de "los cinco procesos generales de la actividad matemática:

- Formulación, tratamiento y resolución de problemas
- Modelación
- Comunicación
- Razonamiento
- Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos." [3]

Los estándares para grado séptimo referentes a:

- Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.
- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. (…)
- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.
- Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.
- Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas.
- Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de fi guras planas y cuerpos con medidas dadas.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).
- Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.
- Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.
- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). [3]

Y los Derechos Básicos de Aprendizaje V.2 grado 7º:

1. Comprende y resuelve problemas, que involucran los números racionales con las operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación) en contextos escolares y extraescolares.
2. Describe y utiliza diferentes algoritmos, convencionales y no convencionales, al realizar operaciones entre números racionales en sus diferentes representaciones (fracciones y decimales) y los emplea con sentido en la solución de problemas.
3. Utiliza diferentes relaciones, operaciones y representaciones en los números racionales para argumentar y solucionar problemas en los que aparecen cantidades desconocidas.
4. Utiliza escalas apropiadas para representar e interpretar planos, mapas y maquetas con diferentes unidades.
6. Representa en el plano cartesiano la variación de magnitudes (áreas y perímetro) y con base en la variación explica el comportamiento de situaciones y fenómenos de la vida diaria.
7. Plantea y resuelve ecuaciones, las describe verbalmente y representa situaciones de variación de manera numérica, simbólica o gráfica. [3]

Se han tomado documentos con temáticas relacionadas con la enseñanza de la medición, estimación de medida, reciclaje, reutilización de residuos sólidos y fabricación del papel.

Donde se aborda el pensamiento métrico y los sistemas de medidas desde el conocimiento didáctico del docente en cuanto a la estimación de medida, haciendo énfasis en la importancia del uso de material concreto, así como de diferentes herramientas de aprendizaje, a partir de las cuales se puedan construir los conceptos relacionados con la medición y fomentar el uso de instrumentos de precisión. También, motivar a los estudiantes en el trabajo colaborativo, mejorar su autoestima frente al área de matemáticas y establecer aprendizajes significativos al aplicar situaciones problema tomadas de su entorno, incorporando el lenguaje matemático y realizando cálculos sobre referentes concretos permitiendo relacionar la teoría con la práctica.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

A. Metodología

La clase de investigación a realizar es aplicada – fundamental, ya que con ella se busca consolidar la comprensión de los conceptos incluidos en el pensamiento métrico y los sistemas de medidas, aplicándolos en la solución de situaciones del entorno, para generar aprendizajes significativos en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Cámara Junior de la ciudad de Armenia - Quindío.

Se emplea un enfoque cualitativo, ya que la variable de estudio está vinculada con los procesos asociados al pensamiento métrico y los sistemas de medidas.

El alcance será descriptivo – correlacional, que permite especificar las tendencias que se evidencian durante la ejecución de la estrategia didáctica planteada. Se pretende por medio de la producción escrita de los estudiantes describir los avances y dificultades que ellos van teniendo a lo largo de la implementación del trabajo en los procesos asociados. Al tiempo que, se establece la relación entre las variables y se evalúa el impacto de la estrategia didáctica.

B. Instrumentos

1) Taller diagnóstico

Consiste en un cuestionario elaborado en la herramienta digital Forms de la Plataforma Office 365 y compuesto por diez preguntas, donde dos de ellas (pregunta 9, 7) corresponden al proceso de apreciación del rango de las magnitudes, tres (pregunta 4, 8, 10) corresponden al proceso de selección de unidades de medida, patrones y de instrumentos y procesos de medición, dos (pregunta 2, 5) corresponden al proceso de estimación de medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de capturar lo continuo con lo discreto y tres (pregunta 1, 3, 6) corresponden al proceso el papel de trasfondo de la medición. Con este taller se va a medir el nivel de conocimiento en que se encuentran los estudiantes alrededor de las temáticas y a evaluar sus conocimientos previos respecto a los procesos mencionados. Así identificar falencias o dificultades para dar el enfoque a los talleres de intervención.

2) Talleres de intervención

Diseño de la estrategia didáctica integrando la vida cotidiana y la vida escolar con los procesos de medición y transformación del papel reciclado mediante el trabajo colaborativo.

Consiste en una serie de talleres, cada uno enfocado en uno de los procesos asociados al pensamiento métrico y los sistemas de medida, en cuanto a la selección de unidades de medida, patrones y de instrumentos y procesos de medición, la apreciación del rango de las magnitudes, la estimación de medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de capturar lo continuo con lo discreto y el papel de trasfondo social de la medición. Esto, de forma práctica, durante las etapas de transformación de papel.

- Proceso 1 - La Apreciación del Rango de las Magnitudes - Actividad No. 2. Se tiene en cuenta si el estudiante tiene la capacidad de determinar magnitudes, unidades e instrumentos para dar solución a situaciones problema. Por medio de la etapa 1 (recolección – campaña de reciclaje, pesado, clasificación y picado del papel), etapa 2 (mezclado y remojo) y etapa 7 (secado y medición de sólidos y figuras geométricas).

- Proceso 2 - La Selección de Unidades de Medida, Patrones y de Instrumentos y Procesos de Medición - Actividad No. 3. Se tiene en cuenta si el estudiante tiene la capacidad de conocer, utilizar y aplicar instrumentos, sistemas y unidades de medida. Por medio de la etapa 1 (recolección – campaña de reciclaje, pesado, clasificación y picado del papel), etapa 2 (mezclado y remojo), etapa 4 (secado y desmolde de la hoja) y etapa 5 (mezclado - colbón y amasado).

- Proceso 3 - La Estimación de Medida de Cantidades y los Aspectos del Proceso de Capturar lo Continuo con lo Discreto - Actividad No. 4. Se tiene en cuenta si el estudiante tiene la capacidad de establecer cantidades de magnitud utilizando un referente. Por medio de la etapa 3 (licuado, aplicación de colbón, bastidor – elaboración hoja) y etapa 4 (secado y desmolde de la hoja).

- Proceso 4 - El Papel de Trasfondo social de la medición - Actividad No. 5. Se tiene en cuenta si el estudiante tiene la capacidad de analizar y definir las magnitudes dependiendo de las necesidades dadas. Por medio de la etapa 3 (licuado, aplicación de colbón, bastidor – elaboración hoja), etapa 4 (secado y desmolde de la hoja), etapa 6 (construcción sólidos y figuras geométricas) y etapa 7 (secado y medición de sólidos y figuras geométricas).

Con la aplicación de estos talleres se va a medir el nivel de avance de los estudiantes y a evaluar sus conocimientos aprehendidos respecto a estos procesos y subprocesos asociados al pensamiento métrico y los sistemas de medidas.

3) Taller final

Consiste en un cuestionario tipo SABER compuesto por diez preguntas, donde se evaluará al estudiante entorno a los cuatro procesos asociados al pensamiento métrico y los sistemas de medida en estudio, y al proceso de elaboración de papel a partir de papel reciclado.

Con este taller se va a medir el nivel de apropiación de los estudiantes frente a los conceptos y procesos vistos después de haber aplicado los talleres de intervención. Así identificar ventajas y desventajas de los mismos.

C. Fuentes de información

- Comunicación entre el docente y los estudiantes
- Comunicación entre los estudiantes – socializaciones
- Producción escrita de los estudiantes

D. Resultados

1) Resultados del Taller Diagnóstico

Se analizaron los resultados de manera general, teniendo en cuenta los cuatro procesos relacionados.

Se puede concluir que los estudiantes reconocen dos dimensiones de una figura (ancho y largo), un instrumento óptimo para medirlas (metro), además, utilizan cálculos matemáticos (suma y multiplicación) para hallar perímetro y área. Pero también, muestra que algunos estudiantes no logran asociar el tema con situaciones de la vida cotidiana como la presentada y por lo tanto no dan solución a la misma, o relacionan elementos que no corresponden a lo planteado.

2) Resultados de los Talleres de intervención

Se analizaron los resultados teniendo en cuenta los avances de los estudiantes en los siguientes subprocesos (subvariables) asociados a los procesos (variables).

La apreciación del rango de las magnitudes:

Se evidencia que los estudiantes tienen habilidad para hacer estimación del rango en que se halla una magnitud, dando soluciones a situaciones problema planteadas, partiendo de la identificación de las cualidades a ser medidas en diferentes objetos, relacionando patrones de medida y asignando un valor numérico.

1. Capacidad de analizar situaciones problema:

Se evidenció que los estudiantes analizan la situación problema planteada, identificando características e instrumentos de medida. A partir de la comparación de objetos a ser medidos y de instrumentos a utilizar como la balanza de resorte.

El 84,62% de los estudiantes responde que no utilizarían la balanza de resorte. Ellos comparan objetos e instrumentos de medida destacando cualidades como peso, tamaño y capacidad. Identifican cuál instrumento sería el más apropiado para medir un objeto dado. Además, el 36,36% de estos, propone otros instrumentos como la báscula para medir, objetos más grandes y pesados.

Estudiante 2: "No, es muy pequeña y no aguantaría el peso, toca es una báscula que está diseñada para más peso".

2. Determinar las magnitudes que intervienen en una situación problema:

Se evidenció que los estudiantes tienen la capacidad de identificar la propiedad que se va a medir en un cuerpo según la situación dada, aunque se les dificulta identificar varias magnitudes relacionadas en una situación problema.

El 15,38% de los estudiantes identifican únicamente la magnitud tiempo, siendo esta, una de las magnitudes relacionadas dentro de la situación planteada.

Estudiante 10: "Las magnitudes del tiempo ya que no entra el peso en esta circunstancia".

3. Identificar el tipo de unidades más apropiadas para realizar la medición de magnitudes en una situación problema:

Se evidenció que, aunque los estudiantes relacionan un patrón de medida, tienen dificultad para vincular unidades de medida con su magnitud correspondiente en situaciones problema. Se podría decir que, no identifican los datos base que se dan en la situación planteada y por lo tanto no logran relacionarlos y generalizar al momento de dar solución.

El 30,77% de los estudiantes relaciona la unidad de medida dada (ml) con la capacidad de un cuerpo (empaque del producto).

Estudiante 2: "Se está midiendo el contenido de por dentro".

4. Establecer (estimación perceptual) el intervalo de valores (rango) en que se halla la magnitud involucrada en una situación problema:

Se evidenció que los estudiantes relacionan instrumentos de medición apropiados para establecer el rango de la magnitud involucrada y asignar un valor numérico.

El 38,46% de los estudiantes relacionan la regla como mejor instrumento para medir, relacionando características de dicho instrumento y del objeto a medir.

Estudiante 8: "La regla, porque es muy pequeña y también las baldosas".

La selección de unidades, patrones y de instrumentos y procesos de medición:

Se evidencia que los estudiantes tienen habilidad para usar las unidades de medida e instrumentos apropiados en cada situación planteada, reconociendo propiedades a ser medidas en los objetos involucrados y elaborando procesos matemáticos para dar soluciones numéricas.

1. Comprensión de los atributos de la medida (tamaño):

Se evidenció que los estudiantes identifican atributos de la medida en una situación problema, referentes a magnitudes de peso y tiempo, reconociendo así las características que diferencian un objeto de otro al momento de ser medido.

El 76,92% de los estudiantes argumenta que, si se tiene la misma cantidad, el cambio de la forma (tamaño del papel) no altera su peso.

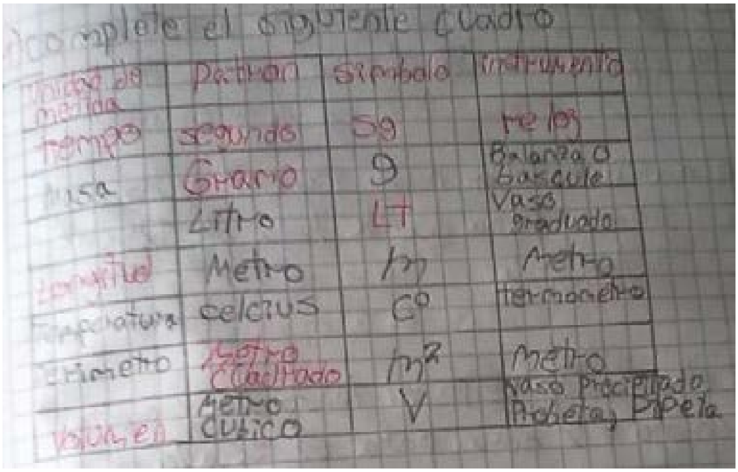
Estudiante 2: "Sí, porque no se altera ni disminuye el papel solo, alteró la forma del papel".

2. Identificación de lo abstracto (unidades de medida) y lo concreto (patrones de medida) en situaciones problema:

Se evidenció que los estudiantes tienen dificultad al momento de identificar algunas unidades de medida y relacionarlas con su patrón e instrumento de medida correspondiente.

El 30,77% de los estudiantes completan gran parte de los espacios del cuadro relacionando unidades de medida con su patrón e instrumento (Figura 1).

Figura 1: Respuesta actividad 3, subproceso 2, pregunta 1



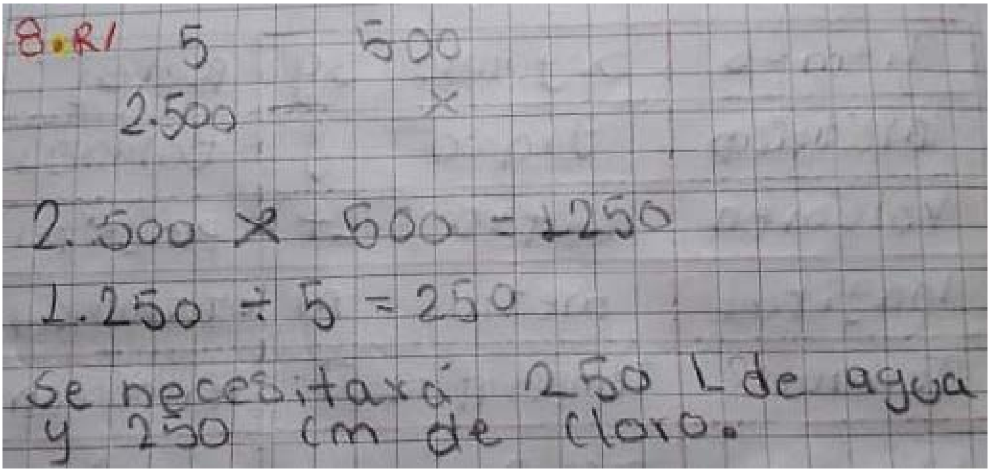
Fuente: Estudiante de grado 7.

3. Aplicación de procesos directos (utilización de instrumentos) e indirectos (calculo) en situaciones problema:

Se evidenció que los estudiantes tienen dificultad para realizar cálculos donde se requiere realizar equivalencias entre unidades de medida y procesos de conversión y llegar a un resultado más exacto.

El 100% de los estudiantes da solución incorrecta a las situaciones problema planteadas, se observa que, existe confusión para realizar procesos de conversión entre las unidades de medida relacionadas (gr, kg, lt, cm^3, cm, mm), igualmente en reconocer su equivalencia (Figura 2).

Figura 2. Respuesta actividad 3, subproceso 3, pregunta 2



Fuente: Estudiante de grado 7.

La estimación de medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de capturar lo continuo con lo discreto:

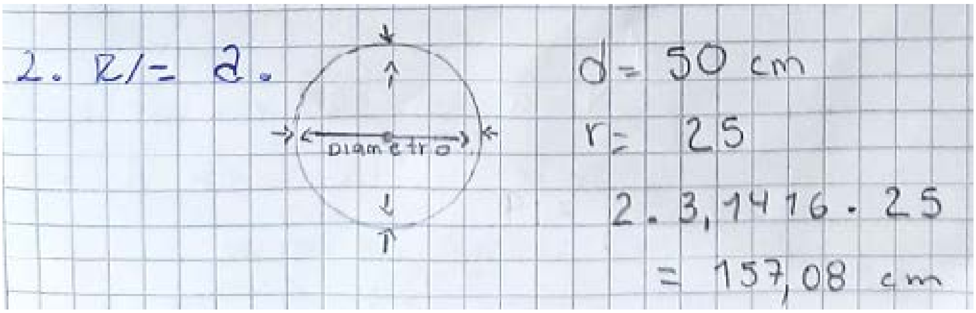
Se evidencia que los estudiantes tienen capacidad para reconocer los atributos a ser medidos en un objeto, aunque se les dificulta en algunas situaciones planteadas establecer el tamaño de las unidades.

1. Aplicación de conceptos de medida y conteo (unidad)

Se evidencio que los estudiantes aplican conceptos y procesos matemáticos relacionados en situaciones problema.

Dentro del 38,46% de los estudiantes que realiza un proceso para hallar el perímetro de un circulo, el 60% utiliza la fórmula matemática (Figura 3).

Figura 3. Respuesta actividad 4, subproceso 1, pregunta 2a



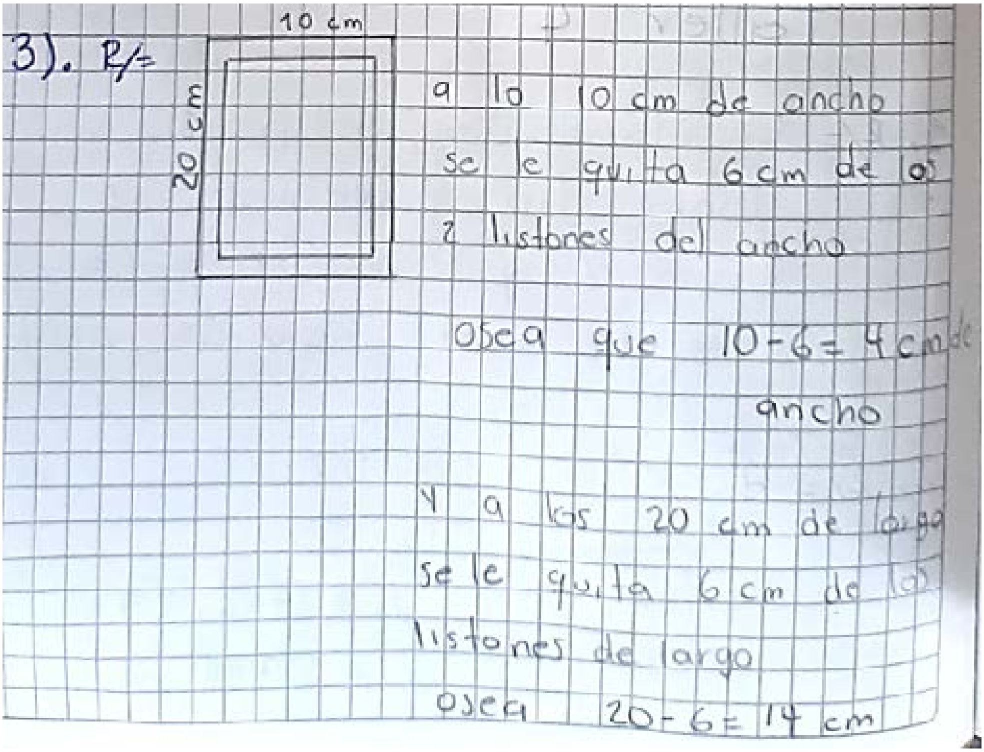
Fuente: Estudiante de grado 7.

2. Identificación de variables discretas y continuas (magnitudes)

Se evidenció que los estudiantes identifican magnitudes discretas y continuas en situaciones problema.

Dentro del 46,15% de los estudiantes que argumenta que las magnitudes no son continuas, el 50% realiza esquema con los datos dados en la situación planteada y procesos matemáticos para hallar medidas de ancho y largo de un objeto (bastidor) (Figura 4).

Figura 4. Respuesta actividad 4, subproceso 2, pregunta 3



Fuente: Estudiante de grado 7.

3. Estimación y construcción de la magnitud (referente, aproximación)

Se evidenció que los estudiantes tienen la capacidad de estimar una medida (tiempo, peso) a partir de un referente (objeto).

El 53,85% de los estudiantes calcula un aproximado al tiempo que se invirtió en el proceso de la elaboración del papel

Estudiante 7: “1 día, 24 horas por el medio día lo proceso, lo mide y lo otro medio día se procesa”.

4. Asignación numérica (grado de precisión e instrumento de medida)

Se evidenció que los estudiantes realizan asignación numérica a partir de un referente, pero no tienen en cuenta el grado de precisión que le podría dar el uso de la geometría.

El 7,69% de los estudiantes describe un proceso matemático cercano (construcción) parar hallar las medidas de un rectángulo inscrito en una circunferencia.

Estudiante 5: "para que entre preciso en la cubeta de 50 cm cada lado de la longitud debe ser 36,5 cm, a lo que le sobra a la cubeta de 50 cm entrando en el bastidor de a 32 cm queda 18 cm se divide en 4 se agrega a los lados".

El trasfondo social de la medición:

Se evidencia que los estudiantes tienen capacidad para reconocer las medidas específicas o generales dependiendo de las necesidades.

1. Identificar el tipo de unidades más apropiadas para realizar la medición de magnitudes en una situación problema (interacción social, referencia, cultura).

Se evidenció que los estudiantes tienen dificultad para identificar magnitudes necesarias para dar solución a una situación de la vida cotidiana.

El 15,38% de los estudiantes relaciona magnitudes generales que se podrían necesitar al momento de construir una mesa y una silla.

Estudiante 4: "Depende el espacio, el lugar y las medidas en donde nos vamos a hacer".

2. Establecer (estimación perceptual) el intervalo de valores (rango) en que se halla la magnitud involucrada en una situación problema.

Se evidenció que los estudiantes tienen dificultad para establecer el rango en que se halla la magnitud requerida en la situación cotidiana dada.

Se observa confusión en la identificación de los datos base, dados en la situación problema, a ser utilizados en el proceso para hallar la solución del mismo.

El 7,69% de los estudiantes relaciona un porcentaje equivalente a la respuesta de la situación cotidiana planteada.

Estudiante 1: "El 20% porque en mi casa consumimos mucho papel".

3. Estimación y construcción de la magnitud (referente, aproximación).

Se evidenció que los estudiantes estiman una magnitud a partir de un referente o de las características de un objeto.

El 7,69% de los estudiantes que propone un precio, hacen énfasis en el peso del cuaderno como determinante, teniendo en cuenta los datos dados en la situación problema.

Estudiante 7: "Yo cobraría $7.000 porque el peso es de igual manera".

4. Asignación numérica (grado de precisión e instrumento de medida).

Se evidenció que los estudiantes realizan asignación numérica aplicando equivalencias entre unidades de medida, además realizan procesos de conversión.

Dentro del 53,85% de los estudiantes que propone una solución a la situación cotidiana planteada, el 57,14% realiza operaciones matemáticas entre las cantidades de un producto dadas en porcentaje, aunque se presentan confusiones en el proceso operacional de las cantidades decimales.

Estudiante 1: "Lo mínimo le faltaría 5,20% y al máximo le faltaría 2,15%".

3) Resultados en el Taller Final

Se analizaron los resultados teniendo en cuenta los avances de los estudiantes en los siguientes subprocesos (subvariables) asociados a los procesos (variables).

Tabla 1. Porcentaje avances estudiantes

PORCENTAJE DE ESTUDIANTES QUE AVANZARON EN LOS PROCESOS Y SUBPROCESOS RELACIONADOS	
PROCESO 1: La apreciación del rango de las magnitudes	
Subproceso 1	84,62
Subproceso 2	38,46
Subproceso 3	30,77
Subproceso 4	92,31
PROCESO 2: La selección de unidades, patrones y de instrumentos y procesos de medición	
Subproceso 1	76,92
Subproceso 2	30,77
Subproceso 3	15,38
PROCESO 3: La estimación de medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de capturar lo continuo con lo discreto	
Subproceso 1	38,46
Subproceso 2	46,15
Subproceso 3	53,85
Subproceso 4	38,46
PROCESO 4: El trasfondo social de la medición	
Subproceso 1	15,38
Subproceso 2	53,85
Subproceso 3	30,77
Subproceso 4	30,77

Fuente: Elaboración propia.

III. CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo de grado se cumplió, ya que, de acuerdo con los resultados obtenidos en cada una de las actividades de aprendizaje aplicadas referentes a los cuatros procesos asociados al pensamiento métrico y los sistemas de medidas seleccionados, los estudiantes evidenciaron avances dando solución a situaciones de acción en el ámbito del reciclaje.

Comparando los resultados obtenidos en el taller diagnóstico con los del taller final, se observa que los estudiantes avanzan en la comprensión en procesos de estimación de medida y el trasfondo social de la medición, logrando asociar las temáticas trabajadas con situaciones cotidianas y proponiendo soluciones adecuadas a las mismas utilizando magnitudes de tiempo, peso y longitud.

De acuerdo al taller final, más del 50% de los estudiantes identifica unidades y patrones de medida en situaciones problema, utilizan instrumentos y realizan cálculos correspondientes relacionando equivalencias y teniendo en cuenta los atributos de la medida. El 67% de los estudiantes analiza y determinan las magnitudes que intervienen en una situación problema. El 50% de los estudiantes realiza estimación y construcción de la magnitud a partir de un referente, y su asignación numérica. Algunos estudiantes manifiestan tener dificultad al momento de hacer conversión de unidades y establecer el intervalo de valores en que se halla la magnitud involucrada en una situación dada.

El uso de la metodología cualitativa descriptiva y la elaboración de los talleres teniendo en cuenta los procesos asociados al pensamiento métrico y los sistemas de medidas, y la solución de situaciones de acción en el ámbito del reciclaje, ayudó a que el estudiante desarrollara habilidades y fortaleciera estos pensamientos. Además de identificar con más claridad los subprocesos donde tiene mayor dificultad.

Abordar estos procesos desde una situación problema del entorno como lo es la reutilización del papel, ayudó a que el estudiante relacionara lo abstracto (matemáticas) con lo concreto (situación del entorno), de esta forma se generó aprendizaje significativo en la conceptualización de los procesos de medición y conversión correspondientes al pensamiento métrico y sistemas de medidas.

El uso de un video donde se lleva a cabo el proceso de elaboración del papel y al tiempo se van desarrollando los talleres propuestos, dificulta el hacer profundidad en las temáticas abordadas, ya que los tiempos en esta época de virtualidad son diferentes, además cohíbe a los estudiantes a preguntar y a poder evidenciar acierto y error con la práctica directa.

Permitió contextualizar la matemática, replantear las metodologías utilizadas y hacer uso de la tecnología en la enseñanza del pensamiento métrico y los sistemas de medidas.

Muestra al estudiante la importancia de razonar y argumentar, así como de realizar cálculos en el quehacer diario.

REFERENCIAS

[1] Pizarro, R. N. (2015). Estimación de medida: el conocimiento didáctico del contenido de los maestros de primaria *[Tesis doctoral, Universitàt Autònoma de Barcelona].* https://www.tdx.cat/handle/10803/309285#page=1

[2] Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas.* https://www.mineducacion.gov.co/portal/micrositios-preescolar-basica-y-media/Direccion-de-Calidad/Referentes-de-Calidad/339975:Lineamientos-curriculares.

[3] Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡Un reto escolar¡ En Ministerio de Educación nacional (Ed.), *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden* (pp. 46-95). Imprenta Nacional de Colombia. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf.

[4] Álvarez, Z. V. y Salazar, C. Y. (2017). La construcción del concepto de magnitud de longitud y su medida. Análisis de una experiencia de aula con estudiantes de grado 6° [Tesis de maestría, Universidad ICESI]. Repositorio ICESI. https://repository.icesi.edu.co/biblioteca_digital/handle/10906/82423

[5] Gutiérrez, D. (2009, 5 de enero). El taller como estrategia didáctica. Razón y Palabra, Nº 66, [revista digital].http://www.razonypalabra.org.mx/N/n66/varia/dgutierrez.html

[6] Gutiérrez Mesa, J. M. y Vanegas Vasco, M. D. (2005). Desarrollo del pensamiento métrico en la educación básica secundaria [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia]. https://docplayer.es/58964279-Desarrollo-del-pensamiento-metrico-en-la-educacion-basica-secundaria.html

[7] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación – Icfes. (2019). Informe Nacional de Resultados del Examen Saber 11º 2018. Ministerio de Educación Nacional. https://www.icfes.gov.co/documents/20143/1711757/Informe%20nacional%20resultados%20examen%20saber%2011-%202018.pdf

[8] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación – Icfes. (2018). Resultados Nacionales. Saber 3º, 5º y 9º. 2012-2017. Gobierno de Colombia. https://www.icfes.gov.co/documents/20143/1627438/Resultado%20nacionales%20saber%20359%20-%202012%20al%202017%20-%202018.pdf

[9] Javier. (2011, 12 de mayo). Importancia del reciclaje [sitio web]. Importanacia.org. https://www.importancia.org/reciclaje.php

[10] Sáez, A., Leal, N. y Monasterio, S. (2014). Residuos sólidos en instituciones educativas. Revista Electrónica Venezolana de Ciencia y Tecnología - REVECITEC URBE, 5(1), 1 – 20. http://ojs.urbe.edu/index.php/revecitec/issue/view/135

AUTORES

Yurlen Katherine Santiago Nieto, nación en Bogotá, Colombia, el 01 de diciembre de 1977. Se graduó de bachiller en el Colegio Mixto de Integración Moderna de Bogotá, como Licenciada en Matemáticas y Computación en la Universidad del Quindío, Arquitecta en la Universidad La Gran Colombia – Armenia., Especialista en Diseño Urbano en la Universidad Nacional de Colombia – Medellín, Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales en la Universidad Nacional de Colombia – Manizales. Se ha desempeñado como docente de matemáticas de básica secundaria en la Institución Educativa Laura Vicuña de Armenia Quindío (2013-2019) y actualmente se desempeña como docente de básica primaria y básica secundaria en la Institución Educativa Cámara Junior de Armenia Quindío.

Jaider Figueroa Flórez, nació en Sucre, Colombia, el 06 de junio de 1980. Se graduó de bachiller en la Institución Educativa Liceo Carmelo Percy Vergara de Corozal, como Licenciado en Matemáticas en la Universidad de Sucre, y Magister en Matemática Aplicada en la Universidad Nacional de Colombia -Manizales. Se ha desempeñado como docente de matemáticas y directivo docente en Instituciones Educativas de básica secundaria y media (2002-2015), catedrático de la Universidad de Sucre (2004-2015) y de la Universidad de Caldas. Actualmente docente de planta de la Universidad Nacional de Colombia – sede Manizales, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística. Actualmente dedicado a la investigación en Modelamiento Matemático y Educación Matemática en las líneas pensamiento matemático y resolución de problemas, y construcción de ambientes de aprendizaje con tecnologías.

Conocimiento profesional del profesor de básica primaria: una reflexión sobre su práctica de enseñanza en matemáticas*

Professional knowledge of the elementary school teacher: a reflection on his teaching practice in mathematics

Bossio-Vélez, José Luis[1], Santa-Ramírez, Zaida Margot[2] y Jaramillo-López, Carlos Mario[3]

1 Doctorado en Educación. Universidad de Antioquia - Colombia. Facultad de Educación. Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia - EDUMATH (UdeA - Eafit). Universidad de Antioquia, http://orcid.org/0000-0002-1285-9416. Contacto: jose.bossio@udea.edu.co.

2 Tecnológico de Antioquia, http://orcid.org/0000-0003-0272-2405. Contacto: zaida.santa@tdea.edu.co.

3 Universidad de Antioquia, http://orcid.org/0000-0002-3937-5032. Contacto: carlos.jaramillo1@udea.edu.co.

Resumen

El propósito de este documento es divulgar algunos avances de investigación en el marco de un estudio doctoral en curso, el cual ha considerado, como justificación práctica del problema, un análisis del conocimiento profesional del profesor de educación básica primaria que enseña matemáticas, a partir de sus propias reflexiones que fueron extraídas de un espacio de formación que agrupó 101 profesores de dicho nivel. De este modo, se logra evidenciar en los profesores algunas barreras que impiden relacionar contextos conocidos por sus estudiantes con las matemáticas del currículo escolar. Con esto, se resalta la importancia de continuar indagando en el conocimiento del profesor que promueve una posible inclusión de la modelación en su práctica de enseñanza, en la perspectiva del desarrollo profesional en relación con la modelación como alternativa de enseñanza. Por lo tanto, por ahora, se puede deducir que la formación del profesor puede ser determinante para incluir dicha alternativa a su práctica y al proceso de aprendizaje.

Palabras clave: Desarrollo profesional, conocimiento didáctico, modelación matemática, práctica de enseñanza, profesores de educación básica primaria.

Abstract

The purpose of this document is to disclose some research advances in the framework of an ongoing doctoral study, which it has taken into account as practical justification of the problem, an analysis of the professional knowledge of the primary basic education teacher who teaches mathematics, based on his own reflections that were extracted from a training space that grouped 101 teachers of that level. In this way, it is possible to show in the teachers some barriers that prevent them from relating contexts known to their students with the mathematics of the school curriculum. With this, the importance of continuing to investigate the knowledge of the teacher that promotes a possible inclusion of modelling in their teaching practice is highlighted, from the perspective of the teacher's professional

development in relation to modeling as a teaching alternative. Therefore, until now, it can be deduced that teacher training can be decisive to include this alternative to their practice and the learning process.

Keywords: Professional development, didactic knowledge, mathematical modelling, teaching practice, elementary school teachers.

I. INTRODUCCIÓN

La idea de incluir la modelación matemática en la práctica de enseñanza del profesor de básica primaria surge bajo la premisa de introducir a los estudiantes en el proceso de resolución de problemas realistas, como una forma de iniciarlos en un tipo de pensamiento que es esencial para la modelación [1]. No obstante, se reporta que ha sido costumbre reservar la modelación para los años de la escuela secundaria, dejando a un lado la importancia de incluirla en los planes de estudio de la educación básica primaria [2].

En los primeros años de enseñanza en la básica primaria, la modelación se constituye en un proceso que les permite a los estudiantes generar y desarrollar sus ideas y procedimientos matemáticos particulares, para formar un conjunto de relaciones que son generalizables y reutilizables [3]. Lo que, de algún modo, implicaría para el profesor de ese nivel educativo una oportunidad de evaluar o caracterizar contextos, con el propósito de formular distintas estrategias en cada sesión de clase para la enseñanza de las matemáticas.

Dado que no es suficiente que el profesor tenga la oportunidad de una adecuada formación, se hace necesario brindarle los espacios y tiempos para poner en práctica lo aprendido [4]. En el caso de la modelación, exige mayor compromiso por parte del profesor para el análisis e interpretación de los contextos [5], los cuales pueden favorecer y enriquecer sus prácticas de enseñanza.

Se deduce, en cierta medida, que el conocimiento del profesor que enseña matemáticas está en correspondencia con la matemática escolar y se diferencia de otras disciplinas [6]. De allí, se podría entender que la modelación estaría en función de la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar, en el sentido de relacionar el mundo real y las matemáticas [7]. En consecuencia, el escaso conocimiento del profesor acerca de la modelación podría estar limitando su inclusión a su práctica de enseñanza de las matemáticas, en básica primaria.

En esta medida, el presente artículo describe el análisis de algunas reflexiones de profesores que enseñan matemáticas en los niveles de básica primaria con las cuales se logran reconocer necesidades frente a su conocimiento profesional [6], cuando intentan abordar la enseñanza de las matemáticas en estos niveles. Este análisis ha contribuido en la elaboración de la pregunta de investigación del presente estudio: ¿cómo construye conocimiento didáctico un profesor de básica primaria que enseña matemáticas mediante la modelación matemática?

II. ANÁLISIS DE RESULTADOS

La motivación del presente estudio surge a partir de nuestra experiencia. Por una parte, al desarrollar una investigación que abordó el análisis de una construcción de modelos lineales a partir de situaciones de los contextos sociales de los estudiantes de grado décimo, mediante un proceso de modelación [8], [9]. Uno de los aspectos relevantes de este estudio consistió en brindarles a los estudiantes, además del uso de algunos sistemas de representación y expresiones algebraicas, la oportunidad de construir argumentos que contrarrestaban las dificultades relacionadas con los asuntos de la economía familiar.

Por otra parte, la oportunidad de formar profesores de educación básica primaria en el marco del Diplomado de Matemáticas en contexto, financiado por el Departamento de Antioquia, Colombia. Este se desarrolló mediante un espacio de 11 encuentros, en los cuales se generaron relatorías a partir de las reflexiones de los profesores que permitieron la elaboración de las tareas de formación para el fortalecimiento de la modelación matemática como proceso, logrando que los profesores construyeran y publicaran una unidad didáctica en el libro de Matemáticas en contexto [10].

Para una justificación práctica del problema del presente estudio y teniendo en cuenta nuestra experiencia como formadores, consideramos analizar reflexiones de los profesores que enseñan matemáticas en educación básica primaria respecto a su práctica de enseñanza. Para este proceso se asumieron algunas ideas [11] con respecto al análisis cualitativo de datos, al generar una relación directa de reflexiones de profesores y las dimensiones del conocimiento didáctico [6], elegidas como categorías conceptuales para describir los conocimientos de los profesores.

Las reflexiones para el respectivo análisis fueron extraídas de los procesos de formación tanto del Diplomado mencionado anteriormente como de un programa del Ministerio de Educación Nacional, este último agrupó a 101 profesores de educación básica primaria de cuatro instituciones educativas de una región del departamento de Antioquia, Colombia, con el objetivo de orientar el fortalecimiento del plan de área de matemáticas. Esta formación, mediada por las TIC, se vincula a una serie de procesos de formación que se vienen desarrollando debido a la situación generada por el creciente contagio de Covid-19, que llevó a la nación a decretar el estado de emergencia y a modificar las metodologías de enseñanza.

Al inicio del proceso de formación, a través de un espacio virtual en la página web www.padlet.com, los profesores describieron sus propias dificultades a la hora de abordar la enseñanza de las matemáticas, mediante textos anónimos. Este medio virtual fue considerado por los formadores, con el fin de salvaguardar el anonimato de los profesores y generar libertad a la hora de manifestar sus propias reflexiones.

Padlet.com es una plataforma digital que ofrece la posibilidad de crear murales colaborativos, por ejemplo, cuenta con un espacio educativo que funciona como una pizarra virtual donde el profesor y estudiantes pueden trabajar al mismo tiempo, dentro de un mismo entorno. Con este recurso, los profesores compartieron sus reflexiones durante el proceso de formación.

Para este análisis, los textos redactados por los profesores fueron seleccionados como unidades de análisis y se hizo una relación directa con categorías conceptuales, para las cuales se eligieron las dimensiones del conocimiento didáctico [6]: conocimiento de las matemáticas, conocimiento del currículo, conocimiento del estudiante y su proceso de aprendizaje, y conocimiento de la práctica educativa.

A continuación, se comparte el análisis de las reflexiones de los profesores en las cuales se logran deducir algunas necesidades de conocimiento frente a la enseñanza de las matemáticas y, al final, se exponen ciertas conclusiones que describen algunas barreras que se presentan a la hora de desarrollar su práctica de enseñanza.

A. Conocimiento de Matemáticas

Se distinguen ciertas necesidades de los profesores de conectar la enseñanza de las matemáticas con contextos conocidos por sus estudiantes, a partir de las siguientes reflexiones:

- Anónimo 12: "Plantear situaciones problemáticas con su contexto".
- Anónimo 16: "Nos falta más estrategias para transferir el conocimiento y aplicación en lo cotidiano".
- Anónimo 18: "Hay que tener en cuenta el uso de la didáctica en el proceso de enseñanza de las matemáticas. Los objetos que nos rodean se relacionan con las matemáticas y cuando a los niños se les enseña en ese contexto, esos aprendizajes se vuelven significativos".

El conocimiento de matemáticas, como una de las dimensiones del conocimiento didáctico [11], es la visión que tiene el profesor de las matemáticas acerca de cómo enseñar conceptos, relaciones, propiedades y teoremas, además de identificar qué puntos considera importantes para trabajar en el aula. En este sentido, los profesores expresan la necesidad de asociar los conceptos o ideas matemáticas con los objetos que nos rodean. Esto se traduce en una necesidad de relacionar las matemáticas con elementos de los contextos conocidos por los estudiantes y por ellos mismos, considerando una posible correspondencia entre los significados de dichos contextos y las matemáticas que enseña.

Por lo anterior, y con expresiones tales como "nos faltan más estrategias", "plantear situaciones problemáticas con su contexto" y "tener en cuenta el uso de la didáctica", se evidencia en los profesores un impulso para fortalecer las maneras de enseñar matemáticas, al reconocer en su conocimiento barreras que limitan sus estrategias de enseñanza vinculadas a la didáctica de las matemáticas.

Sin embargo, expresiones tales como "cuando a los niños se les enseña en ese contexto, esos aprendizajes se vuelven significativos", indicarían la necesidad de favorecer el aprendizaje de sus estudiantes a partir de contextos particulares durante su práctica de enseñanza. Pero, el profesor, al contar con un escaso conocimiento de las matemáticas como disciplina y para su enseñanza, se limita a generar relaciones entre un contexto particular con las matemáticas que enseña.

B. Conocimiento del Currículo

Este conocimiento se centra en el orden que genera el profesor para organizar el contenido, al relacionar a los estudiantes entre sí y dicho contenido, incluyendo las formas de usar la evaluación durante sus prácticas en el aula [6]. Esto implica, para el profesor, conocer los Lineamientos Curriculares establecidos a nivel macro y micro de los sistemas educativos a los que se asocia la gestión de los contenidos matemáticos a trabajar en el aula [11]. Por tanto, el conocimiento del currículo se entendería como la necesidad de reconocer la relación entre qué enseñar, cómo enseñar y cómo evaluar el aprendizaje del estudiante en relación con los objetivos generales de un sistema educativo.

En la mirada de los profesores, el currículo se entiende como un objeto rígido el cual orienta la enseñanza de las matemáticas en el aula. Aspecto que se puede evidenciar en los siguientes comentarios:

- Anónimo 35: "En ocasiones las temáticas que se tratan en el colegio no son las necesarias para la vida práctica de los estudiantes".

- Anónimo 36: "Que se haga más flexible de acuerdo con lo que se observa en el aula, estamos direccionado por el plan de estudio y si usted se sale posee problemas".

Se aprecia, en el Anónimo 36, que el profesor reconoce el plan de estudio como un documento inflexible o dominante y que este genera temor. En este caso, entender el plan de estudio como una ruta única para alcanzar los objetivos de la asignatura de matemática en la educación básica primaria se convierte en un obstáculo, debido a que la experiencia del profesor lo impulsa a entender el plan de estudio como un documento flexible de acuerdo con lo que se observa en el aula. Por tanto, esa visión del profesor del plan de estudio limita para transformar el currículo, la cual desfavorece el aprendizaje de las matemáticas ajustadas a los contextos conocidos por sus estudiantes.

La flexibilidad, en la mirada del profesor, se podría entender en las maneras en cómo sus estudiantes pueden aprender a partir de los significados de un contexto particular. En este sentido, prevalece una fuerte inclinación en responder mediante el plan de estudio a los objetivos macro o generales del sistema educativo, desconociendo la necesidad de reconocer los objetivos micro, objetivos cercanos a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, sin perder la conexión con objetivos generales.

Con lo anterior, el profesor reconoce que, en ocasiones, las temáticas que se tratan en el colegio no son las necesarias para la vida práctica de los estudiantes. Al parecer, existe una descontextualización de la enseñanza en las matemáticas, al no identificarse una relación entre el plan de estudio con la vida cotidiana de los estudiantes. Esto puede ser complejo para ellos, al tratar de responder directamente a objetivos generales del sistema educativo, bajo contextos desconocidos.

Por lo anterior, fue posible reconocer la necesidad de los profesores de hacer uso del conocimiento del currículo, en la mirada de fortalecer el plan de estudio como un documento que integre las necesidades de aprendizaje de sus estudiantes articuladas a un contexto particular y, a la vez, con los objetivos generales del sistema educativo. Esto se debe, al parecer, porque los profesores desconocen que en los Lineamientos Curriculares están incluidos algunos procesos que posibilitan la relación entre la vida cotidiana de los estudiantes con las matemáticas que aprenden en la escuela.

C. Conocimiento de la práctica educativa

Los comentarios de los profesores se centran en la necesidad de motivar a sus estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas, así que se evidencian conceptos tales como “lúdica”, “material lúdico”, “estrategias creativas”, “ambiente en el aula”, “herramientas tecnológicas”. Esto muestra un interés por desarrollar una conexión favorable entre sus estudiantes y el aprendizaje de las matemáticas. Tales conceptos se observan en los siguientes cometarios:

- Anónimo 33: “¿Cómo mejorar las habilidades matemáticas en los niños de manera lúdica, teórica práctica?”.
- Anónimo 40: “Falta de material lúdico para hacer más agradable el proceso de enseñanza aprendizaje”.
- Anónimo 36: “Utilizar más estrategias creativas dentro y fuera del aula para motivar al estudiante a realizar actividades matemáticas”.
- Anónimo 37: “Falta de ambiente en el aula frente a las matemáticas (un rincón de las matemáticas en el aula de clase)”.
- Anónimo 19: “La utilización de herramientas tecnológicas”.

El conocimiento de la práctica educativa [6] se relaciona con las formas en las que el profesor organiza el trabajo con sus estudiantes en el aula, con respecto al plan que se piensa para cada sesión de clase, la elaboración de tareas a realizar, las formas de comunicación y evaluación del aprendizaje. A partir de los comentarios de los profesores, se observa una necesidad de fortalecer en sus estudiantes una visión favorable hacia el aprendizaje de las matemáticas; situación que se evidencia al comentar la necesidad de adoptar otras estrategias que puedan conectarlos sin generar temor o frustración hacia dicho aprendizaje.

D. Conocimiento del estudiante y su proceso de aprendizaje

El profesor, para hacer uso de este conocimiento, debe percibir a los estudiantes como personas insertadas en un contexto social, teniendo en cuenta que cada uno de ellos tiene intereses y puntos de vista diferentes y su aprendizaje está influenciado por el contexto de vida en el que se encuentran [11]. En este sentido, sería relevante que el profesor reconozca los asuntos sociales de sus estudiantes e incluirlos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, para evitar perspectivas negativas de las matemáticas por parte de ellos. Esto se evidencia a partir de los siguientes anónimos:

- Anónimo 43: "Más que dificultades en el abordaje de la enseñanza, es cómo hacer para que los niños sientan amor y menos miedo por las matemáticas. ¿Qué hacer?".
- Anónimo 41: "Falta de empatía de los estudiantes por la materia".
- Anónimo 39: "Cómo perder la apatía que sentimos los maestros por las matemáticas".
- Anónimo 38: "En muchas ocasiones los estudiantes no captan o aprenden lo que el docente quiere impartir, puesto que hay una predisposición frente al área, porque vienen con la idea de que la materia es muy difícil".
- Anónimo 32: "Porque se dificulta la solución de situaciones problemáticas".

Con expresiones tales como "los niños sientan amor y menos miedo", "falta de empatía de los estudiantes", "la apatía que sentimos los maestros", "vienen con la idea de que la materia es muy difícil"; se evidencia una visión que tienen de las matemáticas tanto profesores como estudiantes, aspecto que se puede considerar como una barrera para desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas del currículo escolar. Esto, de algún modo, genera una falta de confianza tanto para el que enseña como para el que aprende. Por tanto, se podría considerar pertinente desarrollar un proceso de formación de profesores de básica primaria que aborde una transformación de dicha visión frustrante con respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

III. CONCLUSIONES

Los profesores sienten la necesidad de adaptar las matemáticas a contextos conocidos por los estudiantes. Esto podría servir de apoyo para generar una correspondencia con los significados de dichos contextos y las mismas matemáticas, dado que los profesores tienen una limitada visión de las matemáticas para enseñar conceptos, relaciones, propiedades y teoremas, además, para identificar los puntos importantes para trabajar en el aula.

El plan de estudio de matemáticas, como un elemento del currículo escolar, es entendido por los profesores como un documento que dicta una ruta única para alcanzar los objetivos generales del sistema educativo. Esta visión se convierte en una barrera, debido a que su experiencia lo impulsa a entender el plan de estudio como un documento flexible ajustado a las necesidades de aprendizaje de sus estudiantes con relación a su práctica en el aula. Por lo tanto, el currículo de matemáticas se ve limitado en su transformación para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes de educación básica primaria.

El profesor, durante su práctica educativa, reconoce la falta de motivación de sus estudiantes al momento de abordar la enseñanza de las matemáticas en el aula. En este sentido, ve conveniente adoptar otras estrategias que puedan conectar, de manera favorable, a sus estudiantes con las actividades que se desarrollan al interior de cada sección de clase.

La asignatura de matemáticas es percibida por estudiantes y profesores bajo una perspectiva negativa, influenciada, al parecer, por la escasa visión del profesor de su campo disciplinar. Este aspecto genera una barrera para desarrollar y enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas del currículo escolar en el aula. Debido a esto, se resalta una falta de confianza y una visión borrosa en estudiantes y profesores frente a las matemáticas, que pueden ser incluidas en el currículo escolar para su enseñanza.

Por lo tanto, podría ser pertinente continuar indagando sobre el conocimiento profesional del profesor a partir de espacios de formación y desarrollo profesional, con la idea de identificar elementos que pueden fortalecer su práctica y, de algún modo, superar las barreras que obstaculizan potenciales relaciones de los contextos conocidos por sus estudiantes y que pueden vincularse con las matemáticas del currículo escolar.

REFERENCIAS

[1] S. Carreira, «Looking Deeper into Modelling Processes: Studies with a Cognitive Perspective – Overview», en *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, vol. 1, G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, y G. Stillman, Eds. Springer, Dordrecht, pp. 159-163, 2011.

[2] L. D. English, «Complex Modelling in the Primary and Middle School Years: An Interdisciplinary Approach», en *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, y J. Brown, Eds. Springer, pp. 491-505, 2013.

[3] L. D. English, «Mathematical Modeling in the Primary School: Children's Construction of a Consumer Guide», *Educ. Stud. Math.*, vol. 63, n.º 3, pp. 303-323, dic. 2006, [En línea]. Disponible en: http://www.jstor.org/stable/25472132.

[4] M. Padilla, «¿Pueden entrenarse competencias de investigación en psicología al margen de las teorías psicológicas?», *Rev. Educ. y Desarro.*, vol. 9, 2008. Accedido: ago. 18, 2020. [En línea]. Disponible en: http://www.cucs.udg.mx/revistas/edu_desarrollo/anteriores/9/009_Padilla.pdf.

[5] M. S. Biembengut y N. Hein, «Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática», *Educ. Matemática*, vol. 16, n.º 2, pp. 105-125, 2004, doi: 1665-5826.

[6] J. P. Ponte, «Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas», *Teoría, crítica y práctica la Educ. matemática*, pp. 83-98, 2012.

[7] W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, y M. Niss, *Modelling and Applications in Mathematics Education*, n.º 10, 2007.

[8] J. L. Bossio, S. M. Londoño, y C. M. Jaramillo, «Activation of Student Prior Knowledge to Build Linear Models in the Context of Modelling Pre-paid Electricity Consumption», en *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, Springer, Cham, pp. 317-326, 2015.

[9] L. J. Bossio, S. M. Londoño, y C. M. Jaramillo, «Proceso de modelación en el contexto del cultivo del plátano: una producción escolar relacionada con modelos lineales Revista», *Rev. Virtual Univ. Católica del Norte*, n.º 54, pp. 18-40, 2018.

[10] Gobernación de Antioquia, *Matemáticas en Contexto*. Medellin: Gobernación de Antioquia, 2016.

[11] E. Santana, J. P. da Ponte, y M. de L. Serrazina, «Conhecimento didático do professor de matemática à luz de um processo formativo», *Bolema Bol. Educ. Matemática*, vol. 34, n.º 66, pp. 89-109, 2020, doi: 10.1590/1980-4415v34n66a05.

AUTORES

José Luis Bossio Vélez

Actualmente estudiante de Doctorado en Educación, de la Universidad de Antioquia; Magíster en Educación, Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Educación Matemática; Profesor de la Escuela de Microbiología y la Facultad de Educación, de la Universidad de Antioquia; Integrante del Grupo de Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit). Docente Tutor del Programa Todos a Aprender, Ministerio de Educación Nacional.
Áreas de investigación: educación matemática.

Zaida Margot Santa Ramírez

Doctora y Magíster en Educación, línea de Educación Matemática, de la Universidad de Antioquia; Licenciada en Matemáticas y Física, de la Universidad de Antioquia. Docente ocasional de tiempo completo del Tecnológico de Antioquia; Integrante del grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit) y del grupo Ciencias Básicas Aplicadas Tecnológico de Antioquia.
Área de investigación: educación matemática.

Carlos Mario Jaramillo López

Doctor en Ciencias Matemáticas, de la Universidad Politécnica de Valencia, España; Profesor del Instituto de Matemáticas, de la Universidad de Antioquia. Líder del Grupo de Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit).
Áreas de investigación: educación matemática.

Lenguaje metafórico en la enseñanza de la matemática. Una revisión de literatura[1]

Metaphorical language in mathematics teaching. A review of the literature.

Perea Montoya Jesús Amado[2] y Fernández Sánchez Oscar[3]

1 Producto derivado del proyecto de investigación "Caracterización del lenguaje metafórico en la enseñanza de los números naturales a los complejos"

2 Jesús Amado Perea Montoya, Docente de la Institución Educativa Francisco José De Caldas, Risaralda y Estudiante del Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad Tecnológica de Pereira. Contacto: jesus.perea@utp.edu.co.

3 Oscar Fernández Sánchez, Docente de la Universidad Tecnológica de Pereira y Director del Grupo de Investigación en Pensamiento matemático y Comunicación. Contacto: oscarf@utp.edu.co.

RESUMEN:

Las metáforas hacen parte del lenguaje cotidiano y en especial del discurso del docente en el aula. Las metáforas, en su función cognitiva, se constituyen en un elemento didáctico que facilita la comprensión de los estudiantes de temas abstractos como los que regularmente constituyen el lenguaje matemático. Se presenta aquí una revisión de la literatura sobre la presencia de lenguaje metafórico en el aula de clase de matemáticas y en el discurso escrito de los libros de texto. Se encontró, entre los resultados de los documentos revisados, la presencia de las metáforas conceptuales sugeridas en Lakoff y Johnson (1995). Así mismo, se resalta la importancia del uso de lenguaje metafórico, como elemento auxiliar, en la enseñanza de la matemática.

Palabras clave: metáforas, matemáticas, libros de textos, discurso escolar

ABSTRACT

Metaphors are part of everyday language and especially of the teacher's discourse in the classroom. Metaphors, in their cognitive function, constitute a didactic element that facilitates students' understanding of abstract topics such as those that regularly constitute mathematical language. A review of the literature on the presence of metaphorical language in the mathematics classroom and in the written discourse of textbooks is presented here. It was found, among the results of the documents reviewed, the presence of the conceptual metaphors suggested in Lakoff and Johnson (1995). Likewise, the importance of the use of metaphorical language as an auxiliary element in the teaching of mathematics is highlighted.

Keywords: metaphors, mathematics, textbooks, school discourse.

I. INTRODUCCIÓN

La comunicación es fundamental en el proceso de formación. Si el lenguaje utilizado no es el adecuado puede generar dificultades en la compresión de la matemática en los estudiantes.

Desde el punto de vista del Ministerio de Educación Nacional "se involucran otros procesos que están estrechamente relacionados con la actividad matemática, como los de modelación, comunicación, entre otros" [1, p. 21]. Se resalta la importancia de la comunicación en el saber pedagógico que se da en los centros educativos.

Dentro de la comunicación está el lenguaje metafórico empleado en el discurso docente. Los expertos en el estudio de las metáforas dicen: "hemos encontrado una forma de empezar a identificar detalladamente qué son exactamente las metáforas que estructuran la manera en que percibimos, pensamos y actuamos" [2, p. 40]. Este pensamiento permite argumentar como el lenguaje metafórico hace parte de la vida diaria de estudiantes y profesores

Es de tener presente que el lenguaje que usamos está lleno de metáforas y no es de olvidar que las regiones tienen diferentes formas de expresarse, por ejemplo, los chocoanos tienen palabras o frases como "abotar, calentura, otro" que otras regiones no conocen, lo mismo pasa con otras partes del país. Quiere decir, que si no se usa el lenguaje apropiado se presentan dificultades en la comunicación, sin olvidar que las culturas o países también influyen en el lenguaje metafórico.

El discurso del profesor es esencial en la enseñanza de los contenidos matemáticos, por tanto, se quiso consultar que estudios se han realizados sobre la implementación del lenguaje metafórico en la matemática.

Diferentes investigadores han realizado importantes trabajos investigativos sobre el uso de las metáforas en la enseñanza de las matemáticas.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

Se realizó una búsqueda exhaustiva en diferentes idiomas de literaturas relacionadas con las metáforas en la enseñanza de las matemáticas, donde se encontraron las siguientes.

En [3] se expresa que el lenguaje metafórico es fundamental para que los estudiantes puedan resolver problemas con números negativos, también resalta la conveniencia que tienen las metáforas en la indagación, especialmente en el área de matemáticas. Demostró que los jóvenes las usaron más que los estudiantes universitarios.

En [4] analizaron la clase de un docente que en la enseñanza del concepto de función uso diferentes metáforas sin percibir que las estaba usando para hacer activa la clase. Los investigadores notaron que puede ser provechosa y también puede generar inconveniente en los estudiantes, una de las desventajas es que los estudiantes pueden entender la metáfora literalmente.

En [5] se expone que el uso de metáforas puede abreviar el proceso en las aulas de clase y en el pasar de los tiempos se ha convertido en un instrumento relevante en educación matemática debido a que pueden ser competentes en la resolución de problemas.

En [6] realizaron un análisis de la opinión que tienen los estudiantes sobre las matemáticas utilizando un lenguaje metafórico y los comentarios fueron muy diversos como ejemplo se tiene “las matemáticas son una herramienta”.

En [7] destacan que la lingüística es esencial en la enseñanza de la matemática y las metáforas sobresalen por llevar el conocimiento a los estudiantes. Explican que los objetos matemáticos son objetos de pensamiento y se basan en expresiones metafóricas.

En [8] se aplicó el lenguaje metafórico para la enseñanza de la recta numérica. Igual que en Colombia, en esas instituciones también convergen diferentes culturas y lenguas y para algunos de los estudiantes se puede encontrar distintas dificultades con la interpretación de las metáforas.

En [9] se dice que las metáforas posibilitan enlazar varios conceptos que los estudiantes puedan tener sobre algunos objetos matemáticos. El profesor también se valió del lenguaje metafórico en su discurso para enseñar probabilidad evidenciado que la utilización de metáforas facilita el aprendizaje de la matemática.

En [10] se sirvieron de las metáforas, una para avivar los cálculos mentales en los estudiantes y otra para instruir las ecuaciones de primer grado y trasmiten la importancia de las metáforas en la enseñanza de los objetos matemáticos.

En [11] demostraron que las metáforas también se pueden emplear para enseñar matemáticas en niños de pre-escolar y primaria, donde el lenguaje espontaneo de los estudiantes hace que las metáforas sean más apreciadas, y como dicen los autores "cuanto antes mejor".

En [12] manifiesta que el lenguaje metafórico también es importante en la enseñanza de la matemática y despierta la imaginación del profesor para dar a entender las temáticas de matemáticas. Resalta que la destreza del profesor en la comunicación de un determinado tema le permite hacerse comprender.

En [13] comparte que los estudiantes tienen apatía hacia la Matemática porque no le ven una razón. Por medio de las metáforas buscaron las cosas buenas y malas de la Matemática, le permitió conocer que los estudiantes se basaron en metáforas de la vida diaria para hablar de matemáticas.

En [14] expresa que la forma de trasmitir o cumunicar en el aula de clase una determinada temática puede favorecer o desfavores a los estudiantes en su proceso de aprendizaje. El docente no puede desligarse de la falta de motivacion de sus estudiantes que puede ser generada por diferentes circunstancias y que tambien afectan su formación académica.

En [15] son más específicos al hablar de metáforas conceptuales y su importancia para estudiar, comprender los textos escolares y el discurso del docente que ayudará a los estudiantes a captar los contenidos matemáticos.

En [16] dice que las matemáticas son complejas para los estudiantes, las metáforas son útiles e importantes para dar a entender los objetos matemáticos (números primos y compuestos), y si el lenguaje usado por el docente está relacionado con lo que el estudiante conoce de su entorno es mucho mejor su aprendizaje.

En [17] Exponen que cuando se involucran las metáforas como forma de enseñar las matemáticas, los estudiantes pueden alcanzar más fácil las competencias deseadas, pero si no se aplican las metáforas de manera deliberada pueden ocasionar dificultad en el aprendizaje.

En [18] se determinó la apreciación que tienen los estudiantes sobre las clases de matemáticas desde el punto de vista metafórico, donde categorizo las metáforas encontradas. Resalta que el profesor influye en la impresión que tienen los estudiantes de la matemática.

En [19] examinaron las metáforas que usan los estudiantes en el estudio del círculo e hicieron una categorización de las metáforas, las cuales se presentaron en gran número en el discurso de los estudiantes participantes en el estudio.

III. CONCLUSIONES

1. Se encontraron diferentes investigaciones en países como Chile, Brasil, Italia, Australia, Sudáfrica, China, Estados Unidos Turquía y Colombia, en los cuales se han realizado y se siguen haciendo análisis del discurso tanto de los profesores como de los estudiantes en búsqueda de metáforas en el discurso matemático.

2. Se identificó que las metáforas fueron utilizadas por los docentes para hacer comprender las ideas, conceptos y conectar diferentes ideas de la matemática.

3. En las diferentes investigaciones se verifica que los investigadores encontraron que la presencia de metáforas en ocasiones es ventajosa, pero también puede llegar a ser desventajosa, porque el estudiante la puede tomar de manera literal.

4. Se resalta que se desarrollaron investigaciones sobre el lenguaje metafórico con estudiantes de temprana edad obteniendo buenos resultados.

5. Se puede leer que los investigadores encontraron que las metáforas pueden ayudar a simplificar la enseñanza de las matemáticas cuando se las usa como recurso didáctico, sin embargo, también podrían dificultar la comprensión de conceptos matemáticos si no se usan apropiadamente.

REFERENCIAS

[1] MInisterio de Educación Nacional de Colombia. *Lineamientos Curriculares de matemáticas,* 1998

[2] G. Lakoff y M. Johnson, *Metáforas de la vida cotidiana. Segunda Edición ,* 1995, p. 40

[3] M. M. Chiu, Using Metaphors to Understand and Solve Arithmetic Problems: Novices and Experts Working With Negative Numbers. *Mathematical Thinking and Learning*, 2000, pp. 93–124.

[4] V. F. Moll y J. I. Nanclares, Fenómenos Relacionados Con El Uso De Metáforas En El Discurso Del Profesor. El Caso De Las Gráficas De Funciones. *Enseñanza De Las Ciencias*, 2003, pp. 405–418.

[5] J. S. Andrade, La cognición hecha cuerpo florece en metáforas…. *A. Ibañez, & D. Cosmelli, 2007*.

[6] A. Schinck, H. Neale, D. Pugalee y V. Cifarelli, Structures, Journeys, and Tools: Using Metaphors to Unpack Student Beliefs about Mathematics. Schol science and mathematics, 2008, vol. 108, núm. 7, p. 326-333.

[7] K. G. Leite, y M. F. Otte, Metáfora e Matemática. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, 2010, vol. 2, p. 87-110.

[8] C. E. Wathen, Spatial Metaphors of the Number Line. Proceedings of the 35th annual conference of the *Mathematics Education Research Group of Australasia*, 2012,

[9] G. C. Morales, Probabilidad en el camino de una hormiga: una propuesta de enseñanza con uso de metáforas. *Educación Matemática*, 2015, vol. 27, núm. 3, p. 197-210.

[10] Videla, R., Aldunate, N., Ramírez, G., Aros, M. y Muñoz, C. (2015). La función cognitiva de la metáfora virtual en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en escolares chilenos.

[11] G. L. Arriagada Y P. R. Santander, Metáforas y desarrollo del pensamiento matemático: ¡cuanto antes mejor! *Revista Científico Pedagógica Atenas, 2016, vol. 3, núm. 35, p. 15-30.*

[12] S. Sbaragli, L'importanza della metafora in matematica e nella sua didattica. *Mathematics and Mathematics Education. International Conference, University of Bologna, 2016, p. 459-464.*

[13] O. Thibodi, Metaphors for Learning Mathematics: An Interpretation Based on Learners' Responses to an Exploratory Questionnaire on Mathematics and Learning. *International Journal of Secondary Education*, Vol. 5, No. 6, 2017, pp. 70-74.

[14] A. J. Espinosa, La dinámica de la clase de matemáticas mediada por la comunicación . *Revista de Investigación Desarrollo e Innovación*, 2019, pp. 121-134.

[15] H. M. Galindo y V. F. Moll, Las problemáticas semióticas y la metáfora en las representaciones de los conjuntos infinitos, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* vol. 32, núm. 1, p. 531-540. 2019.

[16] J. B. Pradhan, Conceptual Metaphor for Teaching and Learning of Prime and Composite Numbers at Primary Grades. *The Eurasia Proceedings of Educational & Social Sciences,* vol. 14, 2019, pp. 78-88.

[17] P. A. Assis, R. R. Fernandes, R. L. Nagem y I. D. Ramos, Metáforas como uma estratégia de ensino nas aulas de Matemática. *Latin American Journal of Science Education, vol. 6, p. 22019, 2019*

[18] S. Çekirdekci, Metaphorical Perceptions of Fourth-Grade Primary Students towards Mathematics Lesson. *International Journal of Psychology and Educational Studies*, 2020, vol. 7, núm. 4, p. 114-131.

[19] E. E. Akbaş y *M, Cancan*, Metaphors Formed by 6th and 7th Grade Students Regarding the Difficulties They Experienced in the Process of Learning the Subject of Circle. *International Online Journal of Education and Teaching (IOJET)*, 2020, vol. 7, núm. 3, p. 1054-1075.

AUTORES

Jesús Amado Perea Montoya

Licenciado en matemáticas, de la Universidad Antonio Nariño; Especialista en Administración de la Informática Educativa, de la Universidad de Santander; Magíster en Enseñanza de la Matemática, de la Universidad Tecnológica de Pereira y estudiante del Doctorado en Ciencias de la Educación, de la Universidad Tecnológica de Pereira

Áreas de investigación: Teoría cognitiva de la Matemática

Oscar Fernández Sánchez

Licenciado en Educación en la Especialidad Matemáticas, Universidad del Cauca. Magister en Ciencias Matemáticas, Universidad de Valle, Cali. Doctor en Ciencias de la Educación, RUDECOLOMBIA-UTP, Pereira. Profesor Titular de planta del Departamento de Matemáticas en la Universidad Tecnológica de Pereira. Director del Grupo de Investigación en Pensamiento Matemático y Comunicación - GIPEMAC.

Áreas de investigación: Etnomatemática, Teoría Cognitiva de la Matemática, Modelación Matemática en el aula y Didáctica de la Matemática

Literatura y matemáticas: una relación fundamental en la formación integral[1]

Literature and mathematics: a fundamental relationship in integral education

Castaño-Uribe, Gabriel Jaime[2]

1 Este artículo surge a partir de la necesidad de relacionar las áreas de lengua castellana y matemáticas como áreas transversales en la formación y desarrollo integral de los individuos.

2 Institución Educativa San Nicolás; Contacto: gabojatkd@gmail.com.

Resumen

La propuesta fue desarrollada inicialmente con maestros en los espacios de formación del centro de innovación del maestro (MOVA) con docentes de varias instituciones educativas de la ciudad de Medellín, los cuales a su vez tienen la intención de replicarla en sus instituciones.

El objetivo fundamental de este trabajo fue poder relacionar la literatura y las matemáticas en pro de la formación integral de los individuos, además se exponen algunos casos en los que las falencias mostradas en el saber disciplinar en una u otra área dificultan la realización correcta de los problemas propuestos, además, desde los mismos imaginarios docentes se disocian o desintegran los saberes impidiendo ser vistos en conjunto y aplicados de forma unificada.

Un hallazgo importante fue ver cómo se logró reflexionar sobre las relaciones directas que emergen a la hora de resolver un problema, comprenderlo y ejecutar un plan para solucionarlo, justo en estos aspectos es que la literatura y la lectura crítico-intertextual hacen su aporte con relación a la formación ciudadana que la sociedad demanda.

La metodología empleada utilizó como principal herramienta el trabajo colaborativo, la creación de textos narrativos por medio de los dados creadores de textos, los cuentos tradicionales y al final estas producciones pasaron por la revisión grupal, tanto de lo semántico como de lo sintáctico, claro está sin olvidar los conceptos y procedimientos matemáticos exigidos.

Palabras clave: literatura, didáctica, matemáticas, lenguaje, formación.

Abstract

The proposal was initially developed with teachers in the training spaces of the teacher innovation center (MOVA) with teachers from several educational institutions in the city of Medellín, which in turn intend to replicate it in their institutions.

The fundamental objective of this work was to be able to relate literature and mathematics in favor of the integral formation of individuals, in addition, some cases are presented in which the shortcomings shown in the disciplinary knowledge in one area or another hinder the correct implementation of the proposed problems, In addition, from the same teaching imaginaries, knowledge is dissociated or disintegrates, preventing it from being viewed as a whole and applied in a unified way.

An important finding was to see how it was possible to reflect on the direct relationships that emerge when it comes to solving a problem, understanding it and implementing a plan to solve it, Precisely in these aspects is that literature and critical intertextual reading make their contribution in relation to the civic formation that society demands.

The methodology used as the main tool was collaborative work, the creation of narrative texts through the dice creators of texts, traditional stories and in the end these productions go through the group review, both the semantic and the syntactic, of course without forgetting the mathematical concepts and procedures required

Keywords: literature, didactics, mathematics, language, education.

I. INTRODUCCIÓN

En el campo de la educación y más aún desde los programas académicos, sin importar el nivel educativo, se propende por una formación integral de los alumnos y se pone gran énfasis en áreas del saber cómo son el lenguaje y las ciencias básicas. Partiendo de este supuesto es que el artículo busca crear una relación mucho más atractiva y diferente de abordar problemas matemáticos desde un enfoque literario, mostrando así que la integración de áreas del saber es posible y no es necesario seguirlas viendo de manera fragmentada.

Con base en lo anterior, se desarrolló un taller con maestros de diferentes instituciones de la ciudad de Medellín en el centro de innovación del maestro (MOVA) en el que se evidenciaron algunas falencias desde lo disciplinar, principalmente en el área de las matemáticas, más que en la de lenguaje.

Ahora bien, el presente trabajo es importante puesto que en él se presentan hallazgos que dan cuenta de esas dificultades que de una u otra forma se convierten en obstáculos para los procesos de enseñanza y de aprendizaje, impidiendo a los estudiantes una formación integral en la que las ciencias y las humanidades se conjugan para afrontar la complejidad del mundo actual.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

A la hora de hablar de formación integral, es inevitable mencionar áreas del saber cómo lenguaje y matemáticas, en este sentido se busca una relación directa entre ambas, ya que muchas de las quejas de los maestros radican en supuestos que van desde frases como:

“Los estudiantes no comprenden lo que leen…”.

“Lenguaje es solo para los de español…”. “Las matemáticas son aburridas…”.

Las frases anteriores son solo una muestra de lo que se escucha a voces en los diferentes centros educativos. Teniendo esto presente, el texto muestra opciones para abordar las áreas mencionadas, partiendo primero de la creación de los dados generadores de texto en los que aparecen personajes, lugares y tiempos como posibles alternativas, después de este proceso creativo se procede a la elaboración de un texto de corte narrativo[3] en el que se pueden dar o no datos matemáticos, como se podrá ver más adelante, en el paso a paso del taller y las variaciones que se han dado en su desarrollo con el fin último de hacerlo más diverso y variado implicando a la literatura y así propendiendo por la reivindicación de los cuentos tradicionales.

Acto seguido, se crearon las preguntas que bien pueden responder a los diferentes niveles como las literales, las inferenciales y las crítico-intertextuales; siendo estos dos últimos los esperados y en los que los modelos, heurísticas y demás elementos matemáticos como operaciones, argumentos y procesos emergen para dar solución a los interrogantes propuestos.

A continuación, se presenta el paso a paso del taller, en el cual el trabajo colaborativo fue de gran valor, tanto pedagógico y didáctico como social. Este paso a paso es descrito mediante fotografías e imágenes del material usado, además de algunos apartados de uno de los textos base con los que se desarrolló la propuesta didáctica.

1) Los dados generadores de texto

Esta sección del trabajo presenta el momento en el que los asistentes recibieron el material luego de haberse conformados los grupos de tres (3) integrantes, el objetivo era que cada uno de ellos pudiera colorear, recortar y armar el dado de su preferencia, de ser posible, o simplemente el que el grupo le asignara.

3 Principalmente un cuento dada la familiaridad con este, no quiere decir que no se pueda construir otro tipo de texto del mismo género.

Imagen 1. Entrega del material de trabajo; coloreado, recorte y armado.

- **Comentarios:** los elementos matemáticos que surgen en este primer ejercicio, tienen que ver con los geométricos, particularmente los poliedros (hexágono regular – cubo-)

y desde allí surgió la excusa para hablar de sus características o propiedades como lados, vértices, aristas y caras. Además, el trabajo grupal se visualiza en la medida que cada uno aporta al desarrollo de la actividad, por otro lado los consensos o disposiciones tomadas en el grupo se respetan, es decir, quién asume cada dado.

2) Construcción del texto narrativo

Momento en el cual los asistentes empiezan a lanzar los dados, eligiendo tres (3) personajes y tres (3) lugares, y ya con estos elementos mínimos dan paso al acto creador de darles vida gracias a la escritura y lo que ella implica (lo semántico, lo sintáctico y lo pragmático).

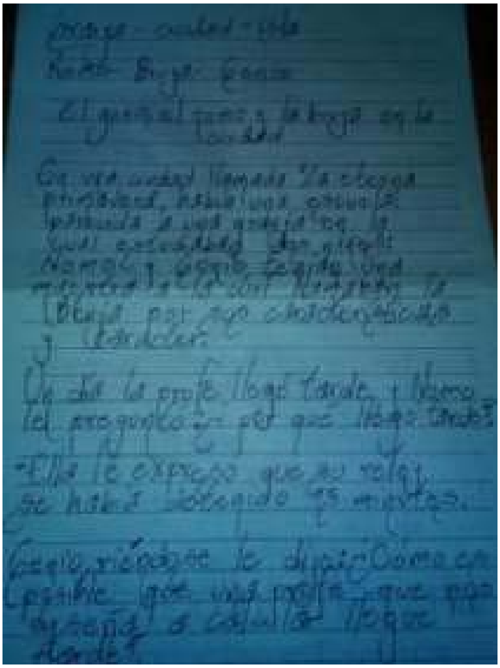
Imagen 2. Lanzamiento y construcción del texto narrativo.

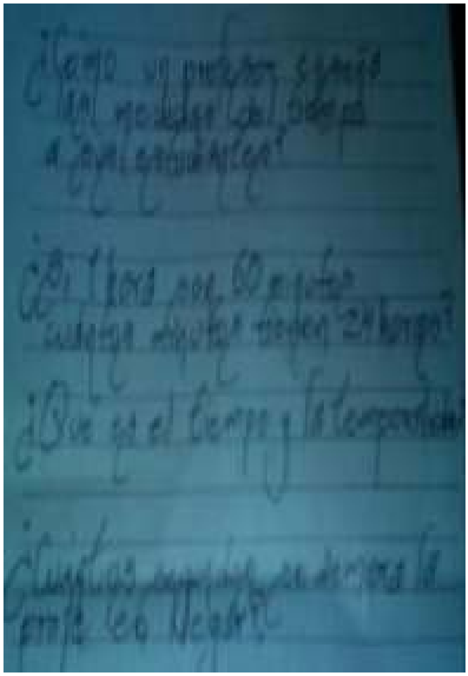
- **Comentarios:** durante la construcción del texto se pudo evidenciar cómo los integrantes del grupo iban aportando en la narrativa, dicho de otro modo, fue un texto hecho a tres manos, tres voces y tres experiencias.

3) Problematización

Aquí vino el primer reto de la actividad y era problematizar el texto, es decir, con base en él plantear preguntas de orden literal, inferencial, crítico-intertextual y sobre todo matemáticas, estas últimas fueron las más difíciles, ya que la mayoría de los asistentes eran docentes del área de lenguaje o del nivel de la básica primaria.

Imagen 3. Texto escrito y preguntas.





- **Comentarios:** en este ejemplo se nota la incursión de datos de orden matemático como son las unidades de tiempo, además las preguntas planteadas son de diferente orden, es decir, literales, crítico-intertextuales y procedimentales. También se dio el caso en el que las preguntas fueron todas del orden de lo literal, lo cual fue puesto en discusión en el grupo al momento de evaluar la actividad.

4) Variaciones

Con la idea de acercar la literatura y la reivindicación de algunos cuentos tradicionales (Caperucita roja, Cenicienta, Hansel y Gretel…), se agregó una tarea más y era la de resolver las preguntas o cuestiones que aparecen en los textos base, además logran vincularse otras áreas del saber como la tecnología y las artes, ya que uno de los textos en cuestión se generó a partir de su ilustración, siendo un ejemplo de ello la imagen de Hansel y Gretel.

Imagen 4. Caperucita roja en el bosque.

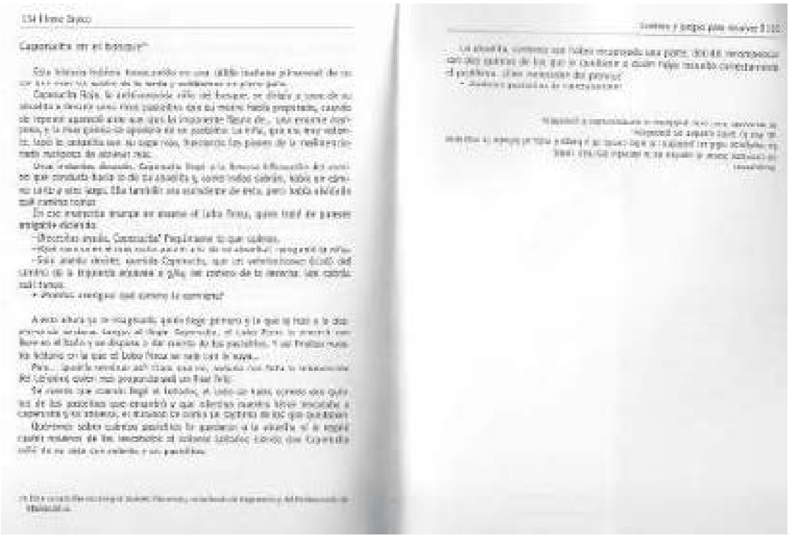
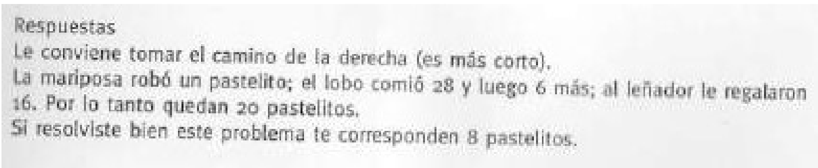


Imagen 4.1. Respuestas a los interrogantes planteados en el texto.



Respuestas
Le conviene tomar el camino de la derecha (es más corto).
La mariposa robó un pastelito; el lobo comió 28 y luego 6 más; al leñador le regalaron 16. Por lo tanto quedan 20 pastelitos.
Si resolviste bien este problema te corresponden 8 pastelitos.

Imagen 4.2. Ilustración del cuento Hansel y Gretel.

Imagen 4.3. Preguntas hechas basadas en el texto de Hansel y Gretel, conocido por gran parte de los asistentes.

- **Comentarios:** la parte de las variaciones proporcionó elementos importantes como fue la vinculación de otras áreas del saber, en este caso las artes y la tecnología, ya que como puede apreciarse en la imagen 4.2 esta fácilmente se construye con ayuda de un software de dibujo como Power Point u otro similar, valor agregado es que también se puede hacer a mano alzada o con objetos, ya queda a libertad del escritor, en este caso ilustrador, la técnica y herramientas que va a usar.

Además se evidencia en la imagen 4.3 que las preguntas planteadas cubren varios pensamientos matemáticos como son el métrico y el variacional.

5) Evaluación

A la hora de evaluar el trabajo, las opiniones y argumentos de los asistentes giraron en torno a las dificultades y fortalezas que se presentaron, entre las dificultades se habló de la falta de saber disciplinar en el caso de las matemáticas, ya que los mismos docentes expresaron no reconocer algunos conceptos matemáticos o procedimientos como en el caso de Caperucita en el bosque en el cual es fundamental reconocer los fraccionarios y sus elementos (numerador y denominador) para dar solución a las preguntas.

Otra dificultad manifiesta estuvo a la hora de proponer las preguntas o problematizar el texto construido, ya que muchas de las preguntas poco o nada incluían elementos de orden matemático y solo se aludía a lo literal, nivel básico en la comprensión de un texto.

Hablando de las fortalezas de la actividad, se rescató la multiplicidad de aspectos que pueden emerger en su desarrollo, ya que por medio de la construcción de un texto a través de los dados se pueden tratar temas como los polígonos regulares (tetraedro, icosaedro, entre otros), siendo estos los dados generadores y que bien pueden ser usados para abordar diferentes áreas del saber en las que se indiquen preguntas, conceptos, números y otros, dando pie al desarrollo de la creatividad. Un elemento más para resaltar fue el de la reivindicación de los cuentos clásicos como excusa para hablar en términos matemáticos y generar preguntas en ese ámbito.

IV. CONCLUSIONES

La actividad mostró la posibilidad de vincular diferentes áreas del saber, en este caso las ciencias, las artes y las humanidades por medio de diferentes tareas, además se logró reconocer que existen falencias en el saber disciplinar de las matemáticas y hasta en el del lenguaje, ya que competencias como la semántica, sintáctica y pragmáticas expresadas en los lineamientos curriculares del área de lengua castellana son desconocidas o no hay apropiación de estas por parte de los maestros.

Cabe agregar que habilidades sociales como el trabajo en equipo permitieron la toma de decisiones basadas en acuerdos grupales que fueron respetados, además de propiciar varias maneras de ver un fenómeno, en este caso el texto construido; y como reflexión final está la de la formación integral, ya que se requiere de individuos competentes básicamente en las áreas de ciencias básicas, lenguaje, tecnología y artes, todas ellas en pro de la comprensión de un mundo cuya complejidad se acrecienta con el paso del tiempo.

REFERENCIAS

[1] MEN, *Serie Lineamientos Curriculares Matemáticas*, Bogotá, 1998.

[2] I. Zapico, *Cuentos y juegos para resolver*, Buenos Aires: Lugar Editorial, 2009.

[3] MEN, *Lineamientos curriculares de lengua castellana*, Bogotá: Magisterio, 1998.

AUTOR

Gabriel Jaime Castaño Uribe

Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín; Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia y Normalista superior con énfasis en Lengua Castellana; Coordinador del Nodo de Lenguaje de Antioquia, miembro de la red Nacional y Latinoamericana para la transformación docente en lenguaje e integrante del colectivo de la Red de Gestión Curricular del municipio de Medellín (REM – Red de educadores MOVA-).

Áreas de investigación: planeación curricular, evaluación de los aprendizajes y el currículo, pedagogía y didáctica en las áreas de lenguaje y matemáticas.

El desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos: estrategias metodológicas en estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Encimadas.

The development of spatial thinking and geometric systems: methological strategies in seventh graders from the Encimadas educational institution.

Londoño Castañeda, Juan Sebastian[1]

1 Magíster en enseñanza de las ciencias exactas y naturales, de la Universidad Nacional de Colombia, Contacto: julondonoc@unal.edu.co

Resumen:

Este trabajo es una propuesta de investigación que tiene como propósito contribuir con un conjunto de herramientas metodológicas que permitan el desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de grado séptimo, basada en referentes teóricos como: Modelo de razonamiento de Van Hiele, la Papiroflexia, herramientas digitales en la enseñanza de la geometría y teoría constructivista de Jean Piaget. El alcance de esta investigación es de tipo mixto, de tal manera que pueda llegar a contribuir a futuras investigaciones que conduzcan a obtener alcances correlacionales. Para este ejercicio de desarrollo del pensamiento espacial se deben fortalecer los procesos cognitivos generales que se encuentran descritos de acuerdo al Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) y los Estándares Curriculares para el área de Matemáticas como: La comunicación, el razonamiento, la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos; el planteamiento y resolución de problemas, tomando como eje de aprendizaje los derechos básicos de aprendizaje (DBA) para orientar el diseño y formulación de guías de aprendizaje que contribuyan al desarrollo del pensamiento espacial. De acuerdo a los resultados, la media de notas se encuentra aproximadamente en 3,36 ± 1,10; es decir, hay una tendencia de los estudiantes aprobar, sin embargo, la desviación indica la presencia de datos extremos (calificaciones muy altas y muy bajas).

Palabras clave: Pensamiento espacial, sistemas geométricos, estándares curriculares y derechos básicos de aprendizaje.

Abstract:

This work has as its main contribu of this research is to propose a set of methodological tools that allow the development of spatial thinking in high school students, based on theoretical references such as: Van Hiele levels model, Papiroplexia, digital tools in the teaching of geometry and the constructivist theory of Jean Piaget. Thus, the aim of this presentation is theoretical argumentative, so that it can contribute to future researches that can reach correlational scopes. In the development of spatial thinking should be strengthen the general cognitive processes that are described according to the Colombian Institute for the Evaluation of Education (ICFES) and the Curricular Standards for the Mathematics area as: the Communication, reasoning, formulation, comparison and exercise of procedures and the approach and resolution of problems. Taking as a learning axis the Basic Learning Rights (DBA) to guide the design and formulation of the learning guides that contribute to the development of spatial thinking. According to the results, the average grade is approxibately 3,36 ± 1,10; that is, there is a trend of the approved students, however the deviation indicates the presence of extreme data (very high and very low grades)

Keywords: Spatial thinking, geometric systems and basic learning rights

I. INTRODUCCIÓN

Con frecuencia se escucha hablar como las matemáticas se tornan un dolor de cabeza para los niños, adolescentes y adultos. Parece difícil dar un diagnóstico acertado en donde comienza este tormentoso camino y en dónde acabará. Estas falencias pueden llegar a ser vistas por el docente como falta de interés, dificultades diagnosticadas y no diagnosticadas, falencias básicas, errores de lectura e interpretación, entorno social y familiar; por otro lado, el alumno ve su rendimiento afectado por el interés, problemas sociales, falta de atención entre otros. Estas dificultades son en realidad cotidianas, pero no se ha determinado su relación [15].

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha identificado estas falencias, y desde su óptica a tratado de mejorar el sistema educativo a través programas como la jornada única y mayor preparación de los docentes, que es cada vez es mejor y más estricta. Pero hay que mencionar que no está diseñada para un contexto como el colombiano donde el nivel de infraestructura e interconectividad no es el adecuado, donde los adolescentes siguen viendo las repercusiones del conflicto, el estereotipo del narcotráfico y la falta de recursos educativos. Las evaluaciones nacionales (pruebas saber tercero, quinto y noveno) como internacionales (pruebas Pisa 2012) han dado un derrotero para mejorar el sistema académico. Por lo anterior, se debe "desarrollar una visión del sistema educativo como un continuo con expectativas claras de aprendizaje en cada etapa, reducir las desigualdades socioeconómicas y regionales, mejorar las practicas docentes" entre otras [11, p. 7].

Las principales falencias que tienen los estudiantes se muestran para operar con los conceptos y procedimientos relacionados con el espacio (formas y figuras en el plano) y con las magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, masa) [10]. En ese sentido, el objetivo de este estudio es: Contribuir en estrategias metodológicas y analizar los posibles resultados que permitan el avance procesos asociados al desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos en estudiantes de grado séptimo.

En aras de cumplir con este propósito se definirá el contexto en el cual se desempeñan los estudiantes, analizar los referentes históricos y metodológicos en la enseñanza de la geometría; para la construcción de las guías basado en referentes teóricos como Jean Piaget [12], Van Hiele [15,16], Irma Saiz [13], Bishop [1], entre otros; a través del modelo escuela nueva y evaluar su mejora de acuerdo los Procesos asociados al desarrollo del pensamiento matemático de acuerdo al SABER 11 y los Procesos generales de la actividad matemática de acuerdo a los lineamientos curriculares

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

Metodología

Se establecen métodos para el desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos. Se trazan detalles alusivos al contexto y a los objetivos trazados, se establecen criterios de medición basados en afirmaciones dadas por el ICFES y el ministerio de educación Nacional [9], se realiza una caracterización de la población, se describe un juicio de análisis e interpretación de los resultados con base en diferentes indicadores de las pruebas saber noveno y las preguntas liberadas por el ICFES que establecen un dictamen en el desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos.

Está investigación es de tipo cualitativo-descriptivo basado en diferentes referentes teóricos como: el modelo constructivista de Jean Piaget, los nieves de razonamiento propuestos por Van Hiele, la papiroflexia, el uso de herramientas digitales y plataformas virtuales, etc usando como medio el modelo de escuela nueva; con el propósito contribuir en estrategias metodológicas y analizar los posibles resultados que permitan el avance procesos asociados al desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos en estudiantes de grado séptimo, de acuerdo a los procesos generales de la actividad matemática y los procesos asociados al desarrollo del pensamiento matemático de acuerdo al ICFES.

La información que permitiría describir los resultados obtenidos en el presente trabajo, proviene de las siguientes fuentes:

El desarrollo de las diferentes metodologías de acuerdo a las diversas teorías que se encuentran descritas en las guías, como la interacción y la comunicación entre estudiante – docente y estudiante – estudiante, las observaciones directas en el aula por el docente, el pre test y el pos test.

Cada test (pre test y pos test) cuenta con tres preguntas abiertas en las cuales se evaluará la apropiación en conceptos como rotación, traslación y reflexión; además cuenta con diecisiete preguntas tipo ICFES divididas de la siguiente manera: razonamiento (9 preguntas), comunicación (4 preguntas), modelación (3 preguntas) y resolución de problemas (1 pregunta), de acuerdo a esto se evaluará la mejora en dichos procesos en los nueve estudiantes como grupo, estableciendo una relación porcentual entre las preguntas acertadas y el total de las preguntas.

Se realizaron tres intervenciones programadas para doce horas, las cuales se prorrogaron en una hora adicional. Las intervenciones se vieron siempre acompañadas de diferentes grados, esto debido a que en la institución educativa tiene aulas multigradas, para este caso los estudiantes de sexto y de séptimo comparten un mismo espacio.

Resultados

Las problemáticas encontradas destacan el manejo de herramientas informáticas, manejo de utensilios propios de la geometría (principalmente reglas), falencias en el reconocimiento de figuras geométricas básicas, y confusión en conceptos como la lateralidad, verticalidad y horizontalidad, es decir, tiene confusiones en cuanto al uso de sistemas de referencia para localizar o describir la posición de objetos y figuras; en identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica [7].

El uso del software GeoGebra se realizó por fases, propuesta presentes en estudios como el de Sarrín [14] y las tesis propuestas por Godino [5, 6], Cantoral [2,3] y Dávila [4], basado en el modelo de razonamiento de Van Hiele: una fase de información, en la cual se indaga sobre conocimientos previos; donde los estudiantes mostraron problemas en el manejo de herramientas informáticas, conocimiento sobre figuras planas y polígonos, esta situación fue identificada en el pre test, donde mostraron dificultades al momento de usar sistemas de referencia para localizar o describir posición de objetos y figuras. Para atacar esta problemática persistente se realizó un acercamiento usando figuras de madera, software Polyedron Ar (en su versión gratuita) y la papiroflexia que permitió dar una percepción del espacio y del plano, para dar claridad a la confusión entre figuras bidimensionales y tridimensionales.

Esto de acuerdo a Bishop [1] ayuda a que los alumnos realicen distinciones entre las imágenes que son tangibles y aquellas que puedan ser representaciones mentales de objetos que puedan ser manipulados en una actividad donde intervenga la abstracción (vista como visualización), esto en conjunto con la papiroflexia permite que los estudiantes lleguen a sus propias conclusiones, muestren gran inquietud y motivación, al momento de realizar las diferentes actividades.

En la fase de orientación dirigida los alumnos se mostraron receptivos en el manejo de software (Khan Academy y GeoGebra), donde su principal falencia radico en conceptos propios de las temáticas que se estaban desarrollando, adjudicando desconocimiento de palabras como rotación, traslación, homotecia (conceptos evaluados en los test) entre otras, por ende, argumentar formal e informalmente sobre propiedades y relaciones con figuras planas y sólidos. En la fase de explicitación se realizó un dialogo con los estudiantes a fin de dar claridad sobre los diferentes procesos de aprendizaje con respecto al manejo básico del software y el uso de símbolos lingüísticos propios de la matemática y particularmente de la geometría. La fase cuatro y cinco estaba orientada a la solución de los problemas expuestos en las guías y la socialización de los mismos.

En conclusión, se observó que en las diferentes guías e intervenciones planteadas permitieron resultados favorables, seis de los nueve estudiantes (el 66,66%) alcanzaron desempeños superiores y básicos, sin embargo, los desempeños básicos y bajos mostraron que el lenguaje utilizado y las diferentes herramientas no eran asimilados de manera oportuna en los tiempos esperados, no comprendían los enunciados de algunas de las actividades expuestas en test, lo que desmotiva al estudiante, haciéndoles perder el interés por comprender las diferentes temáticas. Tampoco son ajenos los problemas socioculturales que allí se presentan, familias disfuncionales o carentes de figuras, inasistencia y las características intrínsecas del estudiante, todos estos factores interfieren en el aprendizaje oportuno, dificultades que se encuentran mencionados en estudios como los de Sarrín [14] y no se pueden obviar.

En cuanto a razonamiento se presentó una mejora sustancial, dos de cada tres preguntas (el 66,67%) fueron resueltas de manera satisfactoria, lo cual implica un aumento del 27,78% de aciertos con respecto al pre test, esto se ve expuesto en una mejora en cómo se abordaban los problemas y como justificaban sus procedimientos. En este sentido, el uso de argumentos válidos, mostrándose recursivos en la solución de problemas y la conciencia de sus propios errores, hicieron que se generara una acción sobre el pensamiento espacial y los sistemas geométricos. Sin embargo, sus argumentaciones desde el punto de vista de matemático no fueron sólidos, pero si lo suficientemente compresibles.

La mejora en el razonamiento lógico permitió que los estudiantes pudieran percibir algunas regularidades y relaciones, algunos de ellos pudieron hacer predicciones y sacar sus propias conjeturas con respecto a preguntas planteadas, dando explicaciones coherentes, proponiendo posibles interpretaciones, adaptarlas o rechazarlas. Pese a estas dinámicas no siempre las razones y argumentos puestos en práctica eran matemática objetivos, es decir, dominaban algunos procedimientos y reglas, pero la matemática no se resume memorización de reglas y algoritmos, debe tener sentido.

Se mostró una mejora en comunicación, diecinueve de cada veintisiete preguntas fueron acertadas (70,37%), con una mejora del 34,57%, aumentando en veintiocho preguntas resueltas con respecto al pre test. Esto quedó demostrado en una mejor manera de expresarse, exponiendo sus ideas con mayor claridad y fluidez, ya se sea en forma oral o en forma escrita, siempre buscando el argumento más sólido para hacer sus ideas más convincentes con respecto al grupo. Sin embargo, se debe resaltar la escasez de vocabulario que tiene los estudiantes, lo cual hizo que este proceso se entorpeciera de manera frecuente, la argumentación lógica fue un problema recurrente. A pesar de ello siempre se mantuvieron optimistas y las actividades siempre propusieron la participación activa de los estudiantes.

La compresión de modelación aumentó, el grupo pudo responder veinte de las veintisiete preguntas puestas en el pos test (el 74,07%), aumentando en siete el número de preguntas acertadas (el 22,22%) con respecto al pre test. Donde el entendimiento de gráficas y tablas como fenómenos de recopilación de datos jugó un papel determinante al igual representaciones verbales, sin embargo, al momento de hablar de ecuaciones que puedan llegar a describir un fenómeno simple los estudiantes parecieron confundidos.

La modelación a pesar de que presentó un aumento como todos los ítems, es el que cuenta con mayor dificultad para los estudiantes. Hablar de la descripción de fenómenos naturales usando la matemática como herramienta, parece confuso y poco compresible para el estudiante. Plantear fenómenos algebraicos que puedan ser vistos como modelos (no son propiamente modelos), hace que los estudiantes se muestren reacios esto debido al poco entendimiento que tienen sobre las ecuaciones y como estas puedan llegar a representar los diferentes fenómenos.

La resolución de problemas fue uno de los ítems con menor número de preguntas. Dentro de las preguntas elaboradas por el ICFES apenas se encontró una de estas, en total al grupo se le realizaron nueve preguntas de las cuales respondieron de manera satisfactoria dos (22,22%), una más con respecto al pre test. Lo cual quiere decir que este es uno de los parámetros con mayor dificultad para los alumnos. Las actividades de resolución de problemas hacen que los alumnos se vean inmersos en la compresión, el análisis y la orientación hacia una posible solución de problemas; los estudiantes a pesar de que mejoraron de manera notable en la mayoría de las competencias, mostraron dificultades para tener compresión de algunos de los problemas debido al poco acercamiento que habían tenido a un lenguaje matemático, a pesar de que dominaban algunos algoritmos, operaciones básicas, no tenían un horizonte claro con respecto al uso de diferentes herramientas, esto en definitiva muestra que acostumbraban a realizar operaciones y problemas de forma memorística sin preguntarse o indagar sobre la solución.

III. CONCLUSIONES

Los estudios que sirvieron como fuente de información fueron aplicados en estudiantes de básica primaria teniendo resultados positivos, y en este se replicaron algunos de los procedimientos realizados en dichos estudios, obteniendo resultados que pueden ser replicables y reproducibles, es decir, el aprendizaje del espacio, el desarrollo del pensamiento espacial tiene procesos que son homologables en estudiantes que se encuentren en diferentes etapas de acuerdo a la teoría de desarrollo cognitivo de Piaget [12], lo cual permite contribuir a los diferentes procesos asociados al desarrollo del pensamiento espacial (comunicación, modelación, razonamiento y resolución de problemas).

Con respecto a la identificación de estrategias metodológicas, las actividades expuestas en conjunto provocan en gran medida que los estudiantes participen de las actividades, relacionando conceptos espaciales y la compresión de representaciones geométricas, el efecto sinérgico contribuyo de manera significativa para lograr un avance importante, sin embargo, de acuerdo a los trabajos realizador por Sarrín [14] los niveles de razonamiento de Van Hiele por si solos pueden tener un efecto similar, en contraste con el presente trabajo se puede mostrar como la apatía desaparece con actividades lúdicas y didácticas que contribuyen al desarrollo del pensamiento espacial, actividades como aprendizaje acerca del de Bichop [1] la Ubicación espacial de Saiz (1998), y el origami como recurso didáctico de Mejía [8] que contribuyen de manera importante a identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica; sin dejar de lado el uso sistemas de referencia para localizar o describir posición de objetos y figuras.

La herramienta de geométrica dinámica (GeoGebra) en el uso de los niveles de razonamiento de Van Hiele permite analizar el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos, identificar falencias comunicativas en definiciones como rotación, homotecia, línea, plano, etc. Mostrar la importancia de comprender los conceptos permite al estudiante no solo aplicar si no transmitir sus ideas de manera más eficiente y así mismo comprender de forma asertiva. La secuencialidad, la progresividad y la lingüística presentes en modelo permiten a los alumnos llegar a conjeturas, construir definiciones desde su entendimiento, reconocer, analizar y entablar relaciones. A pesar de esto, algunos de los estudiantes no lograron comprender algunas de las propiedades, llegar a deducir otras ni un razonamiento lógico matemático profundo, esto se evidencia en prácticas memorísticas. En este momento, pueden identificar los elementos que componen una rotación, visualizar el punto de rotación, es decir, identificar y describir efectos de transformaciones aplicadas a figuras planas, predecir y explicar los efectos de las transformaciones rígidas sobre figuras bidimensionales; de manera concluyente se puede decir que los estudiantes no lograron niveles de clasificación y deducción formal, en este sentido, no pueden argumentar formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.

Con respecto al objetivo general: *"Contribuir en estrategias metodológicas y analizar los posibles resultados que permitan el avance procesos asociados al desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos en estudiantes de grado séptimo"* este trabajo permitió identificar diferentes estrategias que contribuyen al entendimiento y análisis del espacio, mejorar la compresión de las actividades que se realizan dentro del aula y el propósito de las mismas, en este sentido, se puede afirmar de acuerdo a lo que se encuentra expuesto se logró el objetivo trazado para este estudio. Se logró, no solo proponer y analizar diferentes estrategias, sino también contribuir a una transformación en la mentalidad de los alumnos sobre la complejidad de las matemáticas y como están se encuentran presentan dentro de nuestra cotidianidad.

REFERENCIAS

[1] Bishop. A. J. Cultural conflicts in mathematics education: developing a research agenda. For the Learning of Mathematics, 14(2), 15-18. 1994

[2] Cantoral, R. y Farfán, R.M.. Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Épsilon, 42 (14–3), 353–369. (1998)

[3] Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. Socioepistemología, matemáticas y realidad. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(3), 91-116. (2014).

[4] Dávila. Desarrollo de Pensamiento Variacional en Estudiantes de Secundaria , mediado por GeoGebra. (2018). Retrieved from http://www.bdigital.unal.edu.co/

[5] Godino, J. D. Didáctica de las matemáticas para maestros. Granada, España: GAMI, S. L. Fotocopias.

[6] Godino, J.D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (12): 127-135. (2002).

[7] Jaime, A.¿Por qué los estudiantes no comprenden la geometría? En A. Gutiérrez y A. Jaime (Eds.), Geometría y algunos aspectos generales de la Educación Matemática (pp. 23 – 43). Bogotá: Una empresa docente. (1998).

[8] Mejía, Heberto de la Torre; Prada, Adalberto El origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría. Taller realizado en 9° Encuentro Colombiano de *M*atemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia. Encuentro Colombiano de *M*atemática Educativa (2008).

[9] Ministerio de Educación Nacional (MEN), Lineamientos Curriculares de Matemática. Serie lineamientos curriculares, Bogotá – Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio. 1998.

[10] Ministerio de Educación Nacional (MEN), Revisión de políticas Nacionales de Educación en Colombia, Bogotá – Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio. 2006.

[11] Organización para la Cooperación y el desarrollo económicos (OCDE) 2012, 2016. Reporte de Educación en Colombia. Colombia, Bogotá – Colombia: Editorial Ministerio de Educación Nacional de Colombia. 2012, 2016.

[12] Piaget, J. La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo. Madrid: Siglo XXI. (1978).

[13] Saiz, I. E. La ubicación espacial en los primeros años de escolaridad. Educación Matemática, 10(Brousseau 1986), 77–87. (1998).

[14] Sarrín. Rotaciones y niveles de razonamiento, según el modelo de Van Hiele : resultados de una experiencia. 128 Educación XXVIII, 54(54), 127–158. (2019).

[15] Usiskin, Z. Van Hiele Levels and achievement in secondary school geometry. Chicago: University of Chicago. (1982).

[16] Van Hiele, P.M.: El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tesis doctoral no publicada. Universidad Real de Utrecht: Utrecht, Holanda. (1957) Disponible: http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

AUTOR

Juan Sebastián Londoño Castañeda

Magíster en enseñanza de las ciencias exactas y naturales, de la Universidad Nacional de Colombia, Ingeniero de Alimentos, de la Universidad de Caldas, Docente de matemáticas del magisterio nacional de Colombia, en el municipio de Samaná, Caldas; en las Institución Educativa Encimadas.

Áreas de investigación: Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Desarrollo del pensamiento estadístico en docentes: un espacio de cualificación a partir de los enfoques didácticos contemporáneos[1]

Developing statistical literacy in teachers: a qualification study based on contemporary didactic approaches.

Cardona, Mateo[2], Figueroa, Jaider[3]

1 Trabajo presentado para optar al título de Magíster en la enseñanza de ciencias exactas y naturales.

2 Universidad Nacional de Colombia sede Manizales; 0000-0003-1175-4855.
Contacto: macardonama@unal.edu.co.

3 Universidad Nacional de Colombia sede Manizales; 0000-0002-7408-6017.
Contacto: jafigueroaf@unal.edu.co

Resumen

El presente trabajo pretende generar espacios de cualificación docente, frente al pensamiento estadístico y las nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje, con docentes de básica primaria. El trabajo se enmarca en el paradigma cualitativo y es de carácter descriptivo; se desarrolla en cuatro etapas: diagnóstica, cualificación y discusión docente, diseño y construcción de actividades de clase y análisis de las actividades propuestas. Se espera que los docentes reconozcan y relacionen las ideas fundamentales inmersas en el pensamiento estadístico, presenten actividades que faciliten el desarrollo de la estadística de manera holística, simulando un entorno de investigación, diseñen situaciones apoyándose en los diferentes enfoques didácticos presentes en las matemáticas y utilicen los lineamientos nacionales e internacionales en estadística, para crear clases y problemas orientados hacia la generación de pensamiento estadístico.

Palabras clave: pensamiento estadístico, cualificación del docente, aprendizaje basado en proyectos, ideas fundamentales.

Abstract

This work aims to generate spaces for teacher qualification, in the face of statistical thinking and new teaching and learning strategies, with elementary school teachers. The work is framed in the qualitative paradigm and is descriptive, it is developed in four stages: Diagnosis, teacher qualification and discussion, design and construction of class activities and analysis of the proposed activities. Teachers are expected to recognize and relate the fundamental ideas embedded in statistical thinking; present activities that facilitate the development of statistics in a holistic way, simulating a research environment; design situations based on the different didactic approaches present in mathematics and use national and international guidelines in statistics to create classes and problems oriented towards the generation of statistical thinking.

Keywords: statistical literacy, teacher qualification, project-based learning, fundamental ideas.

I. INTRODUCCIÓN

En el marco de la educación del siglo XXI la estadística cobra un punto preferencial por encima de otras disciplinas, según Carmen Batanero [1], en una sociedad como la actual es imprescindible preparar a los jóvenes para interpretar, evaluar críticamente y comunicar información estadística presentada por diversas fuentes. De esta manera la estadística se ha convertido en parte fundamental de la cultura ya que, día a día, nos encontramos rodeados con información que debemos evaluar interpretar y valorar su contenido.

Debido a lo anterior debemos plantearnos si lo que se está enseñando sigue estás líneas de la cultura estadística o si por el contrario nos encontramos varios peldaños por debajo; vale la pena preguntarnos si aún ¿prima en la escuela lo procedimental? o con el paso de los años se ha dado mayor importancia a la interpretación; aunque nos parezca sorprendente los avances en cuanto a las estrategias de enseñanza-aprendizaje de la estadística poco o nada han avanzado, ya que, según Fishbein[2], el currículo se ha orientado exclusivamente hacia un pensamiento determinista, que poca aproximación tiene al mundo real. Pero teniendo todo esto como referente, ¿qué se puede hacer desde la escuela para sopesar todos estos pormenores?

Según Batanero[3], hay varios aspectos que se pueden mejorar, entre los cuales se encuentran:

- Promover las ideas estadísticas fundamentales.
- Educar la intuición.
- Nivel de formalización.
- La formación de profesores.

El trabajo se desenvuelve en torno a los ítems 1 y 4 y para tal propósito se requiere de un modelo que nos muestre los conocimientos que debe tener un profesor, particularmente el de matemáticas, el modelo escogido fue el MTSK (Mathematics Teachers' Specialized Knowledge) creado por la Universidad de Huelva [4], que nos presenta los siguientes conocimientos: conocimiento de los temas, conocimiento de la estructura matemática, conocimiento de la práctica matemática, conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas, conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas.

Bajo lo anterior, se consideró pertinente tomar las ideas estadísticas fundamentales presentadas por Burril y Biehler[5] como el conocimiento de los temas, ya que estas aparecen en todos los contextos estadísticos y pueden presentar diversos grados de rigor, estas son: datos de representación, distribución y variación, probabilidad, asociación y correlación, muestreo e inferencia.

Para el conocimiento de la estructura matemática y de la práctica se tomaron las dimensiones investigativas de Wild y Pfannckuch [6].

El conocimiento de las características de aprendizaje y el conocimiento de la enseñanza de la matemática se enmarca en la teoría de las situaciones didácticas y el aprendizaje basado en proyectos y, finalmente, para los lineamientos se tomaron proyectos como el GAISE (Guidelines for Assesment and Instruction in Statistics Education) o el NCTM (National Council of Teachers of Mathemathics), contando también con los propios de Colombia.

Con todo lo anterior, se presenta el siguiente objetivo:

Desarrollar espacios de cualificación docente, en torno al fortalecimiento del pensamiento estadístico y las nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje, con docentes de básica primaria.

Y como objetivos específicos:

- Diagnosticar el nivel inicial de apropiación que tienen los docentes en materia de pensamiento estadístico y en su enseñanza.
- Realizar actividades de discusión alrededor de los procesos asociados al pensamiento estadístico.

- Persuadir a los docentes hacia la construcción de sus propias actividades de clase.
- Realizar un análisis sobre las actividades propuestas por los docentes y las directrices dadas en el proceso de capacitación.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

El trabajo se enmarca en el paradigma cualitativo de tipo descriptivo, cualitativo porque la variable objeto de estudio (cualificación docente), tiene que ver con habilidades, procesos asociados al pensamiento estadístico y es de naturaleza cualitativa.

Descriptivo porque se pretenden describir avances o dificultades de los docentes en torno a:

- Reconoce y relaciona las ideas fundamentales inmersas en el pensamiento estadístico.
    - El docente diferencia y categoriza las diversas ideas fundamentales inmersas en el pensamiento estadístico.
    - El docente justifica y argumenta cada una de las ideas fundamentales.

- Presenta actividades que facilitan el desarrollo de la estadística de manera holística, simulando un entorno de investigación.
    - El docente reconoce la importancia de no presentar temas aislados.
    - El docente reconoce la importancia de no presentar temas aislados.
    - Presenta actividades que facilitan el desarrollo de la estadística de manera holística.
    - El docente reconoce la estadística como un potencial aliado para darle una interpretación al mundo real.
    - El docente reconoce las diferencias que presentan la estadística y la matemática.

- El docente reconoce la aparición de herramientas a problemas puntuales y no la aproximación a estas sin un contexto bien definido.

- Diseña situaciones apoyándose en los diferentes enfoques didácticos presentes en las matemáticas.
    - El docente reconoce la importancia de plantear una situación que sea del nivel y del interés de sus estudiantes.
    - El docente favorece la intuición en el planteamiento del problema
    - El docente genera una reflexión sobre su práctica docente.
    - El docente reflexiona sobre la simulación y solución a priori de la situación propuesta a los estudiantes.
    - El docente reconoce la importancia de las preguntas orientadoras que aproximan al estudiante hacia el conocimiento deseado.
    - El docente da una mayor importancia al análisis de resultados que a su parte procedimental.
    - El docente se apoya en las TIC como mediadoras del conocimiento
    - El docente motiva a sus estudiantes a plantear sus propios problemas y que estos los puedan solucionar.

- Utiliza los lineamientos nacionales e internacionales en estadística, para crear clases y problemas orientados hacia la generación de pensamiento estadístico.
    - El docente plantea objetivos claros que son consecuentes con las políticas educativas.
    - El docente reconoce en los lineamientos un aliado indispensable para su planeación.

El proceso se llevó a cabo mediante cuatro etapas: la primera diagnóstica que evaluaba sus conocimientos disciplinares, creencias frente al pensamiento estadístico y una propuesta de clase frente al pensamiento estadístico; la segunda de cualificación que se enfoca en fortalecer las competencias anteriormente citadas; la tercera de construcción de actividades que persuadía a los docentes para la construcción de sus propias actividades, basado en las competencias anteriormente expuestas y; finalmente, la cuarta de análisis de resultados, donde se presentan los avances y mejoras de cara a la primer planeación.

Frente a las anteriores competencias, se obtuvieron los siguientes resultados:

Se generaron mejoras sustanciales frente a reflexión de la práctica docente, al planteamiento de objetivos claros y al reconocimiento de los lineamientos como un aliado indispensable. Hubo grandes mejoras frente a la diferencia y categorización de las ideas fundamentales, al reconocimiento de no presentar temas aislados, favorecer la intuición en el planteamiento del problema, privilegiar las preguntas orientadoras y al análisis de resultados sobre cálculos procedimentales.

No hubo cambios significativos frente a reconocer la diferencia que presentan la matemática y la estadística, debe reflexionar sobre la simulación a priori de la situación propuesta a los estudiantes.

Para un futuro trabajo se deben focalizar las TIC como mediadoras de conocimiento, motivar a los estudiantes para que generen sus propios problemas[4].

III. CONCLUSIONES

- A través del espacio de cualificación docente se logra contribuir al fortalecimiento del pensamiento estadístico y de sus prácticas pedagógicas, específicamente esto se logró mediante el reconocimiento de las ideas estadísticas fundamentales, el razonamiento estadístico y el aprendizaje basado en proyectos, todo mediado por la teoría de las situaciones didácticas.

4 Para mayor información consultar trabajo presentado para Tesis maestría.

- Los docentes logran identificar a través del proceso de cualificación procesos propios del pensamiento estadístico que, posteriormente, se ven reflejados en sus planeaciones.
- Al diagnosticar el nivel inicial de los docentes se evidencia una carencia en sus componentes disciplinares, que posteriormente se ven reflejadas en sus planeaciones, de allí la importancia de generar espacios de cualificación.
- Generar espacios de discusión se hace indispensable y constructivo ya que, invita a los docentes a evaluar sus prácticas pedagógicas y a difundir entre sus compañeros, experiencias significativas.

REFERENCIAS

[1] Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL, 1, 27-36.

[2] Ajzen, I., & Fishbein, M. (1975). A Bayesian analysis of attribution processes. Psychological bulletin, 82(2), 261.

[3] Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL, 1, 27-36.

[4] Aguilar González, Á., Carreño, E., Carrillo Yáñez, J., Climent Rodríguez, N., Contreras González, L. C., Escudero, D. I., ... & Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK

[5] Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education (pp. 57-69). Springer, Dordrecht.

[6] Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). “Statistical thinking in empirical enquiry”. International statistical review, 67(3), 223-248.

[7] Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico/Didactic to Algebra Study (Vol. 7). Libros del Zorzal

[8] Batanero, C., & Godino, J. D. (2002). Estocástica y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

[9] Behar Gutiérrez, R., & Grima Cintas, P. (2010). 55 respuestas a dudas típicas de estadística. Ediciones Díaz de Santos.

AUTORES:

Mateo Cardona Marín

Nació en Manizales, Colombia, el 27 de diciembre de 1991. Se graduó de bachiller del Liceo Arquidiocesano de Nuestra Señora, como Ingeniero Electrónico de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales y actualmente cursa la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Se desempeña como docente en la Institución Educativa Partidas desde el año 2018.

Áreas de investigación: investigación en educación matemática en las líneas de pensamiento estadístico, formulación de problemas e implementación de tecnologías como mediadoras del conocimiento.

Jaider Figueroa Flórez

Nació en Sucre, Colombia, el 06 de junio de 1980. Se graduó de bachiller en la Institución Educativa Liceo Carmelo Percy Vergara de Corozal, como Licenciado en Matemáticas en la Universidad de Sucre, y Magíster en Matemática Aplicada en la Universidad Nacional de Colombia - Manizales. Se ha desempeñado como docente de matemáticas y directivo docente en Instituciones Educativas de básica secundaria y media (2002-2015), catedrático de la Universidad de Sucre (2004-2015) y de la Universidad de Caldas. Actualmente docente de planta de la Universidad Nacional de Colombia – sede Manizales, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística y desde 2019 director de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Áreas de investigación: investigación en modelamiento matemático y educación matemática en las líneas pensamiento matemático y resolución de problemas, y construcción de ambientes de aprendizaje con tecnologías.

Estimativo de la variedad estable e inestable de un punto de silla para un modelo del Microscopio de Fuerza Atómica (AFM)[1]

Estimate of the stable and unstable manifold of a saddle point for atomic force microscope (AFM) model

Chaves-Tobar, José[2], Gutiérrez, Alexander[3]

1 Resultados parciales del proyecto "Cuencas de atracción y estimativos de monotonía de la función periodo para modelos AFM". Vicerrectoría de Investigaciones, Innovación y Extensión, Universidad Tecnológica de Pereira, código E3-21-1, año 2021.

2 Universidad Tecnológica de Pereira; código ORCID 0000-0003-0075-1624.
Contacto: jose.chaves@utp.edu.co

3 Universidad Tecnológica de Pereira; código ORCID 0000-0003-2888-3960.
Contacto: alexguti@utp.edu.co.

Resumen

El microscopio de fuerza atómica AFM es un instrumento científico de medición, ampliamente utilizado en diversas áreas del conocimiento, su precisión atómica lo ha posicionado como una herramienta para caracterizar propiedades de diferentes materiales relacionadas con interacciones intermoleculares. El estudio de la dinámica de un sistema AFM, modelado por una ecuación diferencial con singularidades y en presencia de un amortiguamiento no lineal, sirve de referencia para entender el funcionamiento y operación de estos instrumentos de medición de precisión atómica, usados ampliamente en la industria, ciencia e ingeniería, fundamentalmente por la descripción de los términos no lineales.

En este trabajo se realiza el estudio de la dinámica de un sistema AFM, alrededor de una de las soluciones de equilibrio (punto de silla), que se presenta bajo ciertos parámetros del modelo, solución que persiste en presencia de un amortiguamiento no lineal, mediante el estimativo analítico de las variedades estable e inestable. Posteriormente, se realiza la comparación de las variedades con respecto a los vectores propios asociados al punto de silla, estableciendo la diferencia entre las variedades y su aproximación lineal, el resultado proporciona la posibilidad de tener resultados teóricos, los cuales pueden coadyuvar en el diseño de nuevos modelos de AFM, técnicas o métodos de medición de alta precisión y protocolos de laboratorio que aumenten la eficiencia de estos instrumentos científicos.

Palabras clave: modelos AFM, soluciones de equilibrio, punto de silla, variedad estable. variedad inestable.

Abstract

The AFM (atomic force microscope) is a scientific measuring instrument, used in various areas of knowledge, its atomic precision has positioned it as a tool to characterize properties of different materials related to intermolecular interactions. The study of the dynamics of an AFM system, modeled by a differential equation with singularities and in the presence of a non-linear damping, serves as a reference to understand the functioning and operation of these atomic precision measuring instruments, widely used in the industry, science and engineering, mainly due to the description of non-linear terms.

In this work the study of the dynamics of an AFM system is carried out, around one of the equilibrium solutions (saddle point), which is presented under the parameters of the model, a solution that persists in the presence of a non-linear damping, by means of the analytical estimate of the stable and unstable manifolds. Subsequently, the comparison of the varieties with respect to the eigenvectors associated to the saddle point is carried out, establishing the difference between the mainfolds and their linear approximation, the result provides the possibility of having theoretical results, which can contribute to the design of new AFM models, high-precision measurement techniques or methods, and laboratory protocols that increase the efficiency of these scientific instruments.

Keywords: AFM models, equilibrium solutions, saddle point, stable manifold. unstable manifold.

I. INTRODUCCIÓN

El microscopio AFM es un instrumento científico de precisión atómica, puede realizar dos tipos de medidas: imagen y fuerza. Para el desarrollo del trabajo, se va a considerar la operación y funcionamiento del AFM en el modo de imagen, donde la superficie de la muestra que se pretende analizar es barrida en el plano de la superficie por la punta (cantiléver).

Durante el barrido, la fuerza interatómica entre los átomos de la punta y la superficie de la muestra provoca una deflexión del cantiléver, lo cual es registrado por un fotodetector, la señal obtenida se introduce en un circuito o lazo de realimentación. Este último controla un actuador piezoeléctrico que determina la altura de la punta sobre la muestra, de forma que la flexión del cantiléver se mantenga a un nivel constante.

La fuerza interatómica se puede detectar cuando la punta está muy próxima a la superficie de la muestra, en medidas de fuerza la punta se hace oscilar verticalmente mientras se registra la flexión del cantiléver.

Las medidas de fuerza son útiles en estudios de fuerzas de adhesión, permiten estudiar a nivel de una sola molécula interacciones específicas entre moléculas (ejemplo: interacción antígeno-anticuerpo, interacción entre hebras complementarias de ADN), o interacciones estructurales de las biomoléculas (plegado de proteínas). Al igual que caracterizar la elasticidad de polímeros [1], [2].

Figura 1. Modelo Asociado a un AFM.

El AFM presenta una dinámica altamente no-lineal, por esta razón se deben determinar las regiones donde se puede tener control sobre el movimiento del cantiléver, con el propósito de mejorar la sensibilidad del instrumento, disminuir errores aleatorios e indirectamente mejorar la calidad de las medidas.

La dinámica del AFM se modela considerando las interacciones no lineales, debido a la fricción entre el cantiléver y la muestra, como también la relación de las fuerzas de repulsión y atracción atómica que se relacionan por medio del potencial de Lennard-Jones.

El efecto de la fricción en el sistema se considera no lineal tipo Squeeze-film-damping, dado que es la causante principal de la pérdida de energía, en sistemas micro-electro-mecánicos como el AFM.

En el desarrollo de esta investigación, para seguir conociendo la dinámica del sistema AFM, se realiza la clasificación de las soluciones de equilibrio del modelo matemático para el caso conservativo y el caso disipativo, además de hacer un estimativo de las variedades estable e inestable de los puntos de silla de los modelos AFM.

Marco teórico y estado del arte

El Microscopio de Fuerza Atómica (AFM), se ha convertido en un instrumento científico muy utilizado para realizar mediciones directas de fuerzas intermoleculares y caracterización de diferentes propiedades de materiales con precisión atómica. Su aplicación es el análisis de semiconductores, fabricación de materiales poliméricos, estudio de nanosuperficies de metales, análisis de muestras biológicas y biomateriales [3].

El principio de funcionamiento del AFM se basa en la medición de la desviación del microcantiléver en cuyo extremo libre está montada la punta que desempeña el papel de sonda. Las deflexiones analizadas durante la exploración son causadas por fuerzas que actúan entre la punta y la muestra. Estas fuerzas actúan en distancias del orden de 100 **ángstroms**, como ejemplos de estas fuerzas tenemos las atractivas de Van der Waals, las fuerzas magnéticas y las fuerzas de Coulomb [4].

Existe una gran diversidad de modelos que describen la interacción entre un brazo y una muestra para un Microscopio de Fuerza Atómica (AFM) [5], [6].

Algunos autores realizan la deducción del modelo de un AFM mediante la interacción tipo contacto con fuerza de L-J (Lennard-Jones), donde se parte de que el modelo se puede representar como un sistema masa-resorte-amortiguador [5], [7], [8].

Para el análisis de las fuerzas de corto alcance que intervienen en tal proceso, se tienen modelos basados en la interacción molecular, los cuales tienen en cuenta el efecto de exclusión de Pauli y las fuerzas de repulsión entre los átomos iónicos de la punta y la muestra (Fuerzas de Van der Walls), como el potencial de Morse [8], los potenciales de Lennard-Jones (L-J) y los potenciales de Stillinger-Weber [9].

Con el objetivo de aumentar la eficiencia de los AFM y mejorar el censado de forma tal que la distancia entre la punta y la muestra se reduzca y el área de acción (punta-muestra) sea maximizada, se adiciona en el modelo un amortiguamiento de película de compresión *squeeze-film-damping*. Considerar este tipo de amortiguamiento es de gran utilidad para el estudio de muestras líquidas, ya que tiene aplicación en el sector de la biología y la fotónica, mejorando el análisis que se realiza con un microscopio óptico o electrónico convencional [5].

Por otra parte, se tienen los resultados de publicaciones científicas, donde se estudia la existencia y multiplicidad de soluciones periódicas, para el modelo no disipativo asociado al AFM, se hace la clasificación y caracterización de las soluciones de equilibrio en el caso conservativo [10], se realizan estudios de ecuaciones diferenciales con singularidades no lineales y coeficientes periódicos que permiten modelar fenómenos e interacciones intermoleculares [11], y se describe la dinámica de sistemas lineales usando propiedades del polinomio característico asociado a matrices con determinante cero.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

En este apartado del documento, se presenta una breve referencia teórica que fundamenta el desarrollo de la investigación, además de los cálculos, consideraciones, conjeturas y resultados del proceso investigativo.

Clasificación de soluciones de equilibrio modelo AFM – caso conservativo

La dinámica del modelo AFM está dada por la EDO no lineal, dada por:

$$\ddot{x} + x + \frac{b_2}{x^2} - \frac{b_1}{x^8} - a = 0 \qquad (1)$$

Donde a, b_1 y b_2 son parámetros reales positivos.

Adicionalmente, el dominio de la función $x(t)$ esta dado por el intervalo $(0, \infty)$.

Considerando un escalamiento en los parámetros del modelo AFM, podemos asumir:

$$b_1 = 1 \qquad (2)$$

Luego, el modelo AFM está dado por:

$$\ddot{x} + x + \frac{b_2}{x^2} - \frac{1}{x^8} - a = 0 \qquad (3)$$

Para el estudio de la dinámica del modelo AFM, se construye una función $m(x)$ dada por:

$$m(x) = \frac{1}{x^8} - \frac{b_2}{x^2} - x \qquad (4)$$

El dominio de la función $m(x)$ está dado por el intervalo $(0, \infty)$.

Reescribiendo la ecuación (3) se tiene:

$$\ddot{x} = m(x) + a \qquad (5)$$

El sistema de EDO asociado al modelo AFM está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= m(x) + a \end{aligned} \qquad (6)$$

Las soluciones de equilibrio se tienen sí:

$$\dot{x} = 0 \quad \wedge \quad \dot{y} = 0 \tag{7}$$

Así, se tiene que los candidatos a puntos críticos están dados por el par ordenado de la forma $(x^*, 0)$ tal que $x^* \in \mathcal{G}(x)$.

$$\mathcal{G}(x) := \{x \in (0, \infty) : m(x) + a = 0\} \tag{8}$$

Por otra parte, la matriz jacobiana asociada al sistema esta dada por:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m'(x) & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Los valores propios son de la forma:

$$\lambda = \pm\sqrt{m'(x)} \tag{10}$$

Las soluciones de equilibrio del modelo AFM dependen de la función $m(x)$ y del parámetro, para determinar la existencia, multiplicidad y dinámica local, se debe estudiar la ecuación:

$$m(x) + a = 0 \tag{11}$$

El comportamiento matemático de la ecuación (11) depende del signo de la derivada de la función $m(x)$

Sea $z = x^3$ un cambio de variable biyectivo en $m(x)$

$$m(z) = \frac{1 - b_2 z^2 - z^3}{(z)^{\frac{8}{3}}} \tag{12}$$

El dominio de la función racional $m(z)$ es el intervalo $(0, \infty)$ y la derivada esta dada por:

$$m'(z) = \frac{-z^3 + 2b_2z^2 - 8}{3(z)^{\frac{11}{3}}} \tag{13}$$

Sea:

$$p(z) = -z^3 + 2\,b_2z^2 - 8 \tag{14}$$

Entonces:

$$m'(z) = \frac{p(z)}{3(z)^{\frac{11}{3}}} \tag{15}$$

El signo de $m'(z)$ depende del polinomio $p(z)$, los puntos críticos se tienen cuando $p'(z) = 0$, luego:

$$p'(z_c) = -3{z_c}^2 + 4b_2z_c = 0 \tag{16}$$

$$z_c = \frac{4}{3}b_2 \tag{17}$$

Por otra parte,

$$\lim_{z\to\infty} p(z) = -\infty \tag{18}$$

$$\lim_{z\to 0} p(z) = -8 \tag{19}$$

Proposición 1

- Si $Z \in (0, Z_c)$ entonces $p(Z)$ es una función monótona creciente.
- Si $Z \in (0, Z_c)$ entonces $p(Z)$ es una función monótona decreciente.

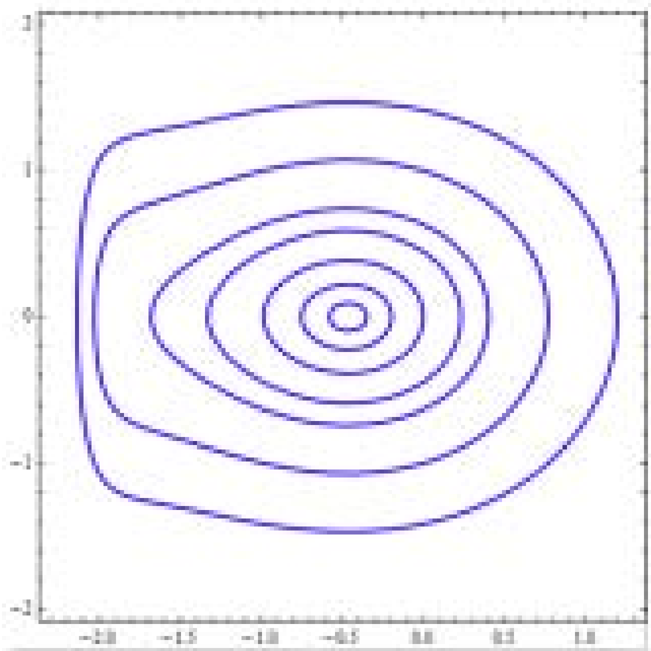
Adicionalmente, el punto de inflexión tiene tres posibilidades:

i) $p(Z) > 0$

En este caso, el sistema tiene una única solución de equilibrio y corresponde a un centro.

Un ejemplo numérico permite visualizar el diagrama de fase.

Figura 2. Diagrama de fase para un ejemplo numérico, que muestra un centro asociado al modelo AFM conservativo.

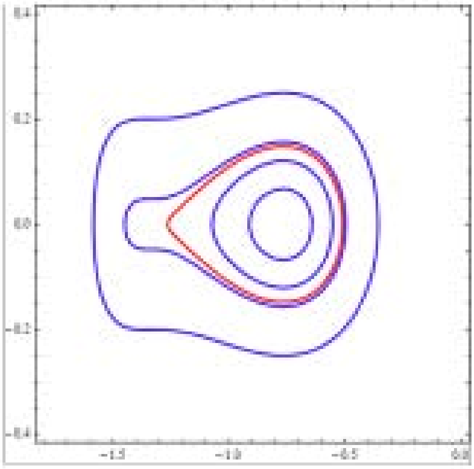


ii) $p(Z) = 0$

En este caso, el sistema tiene una nueva clasificación donde, dependiendo de la relación de los parámetros del sistema, se puede tener una única solución, que corresponde a un centro o dos soluciones de equilibrio, un centro y una solución degenerada.

Un ejemplo numérico permite visualizar un caso particular del diagrama de fase.

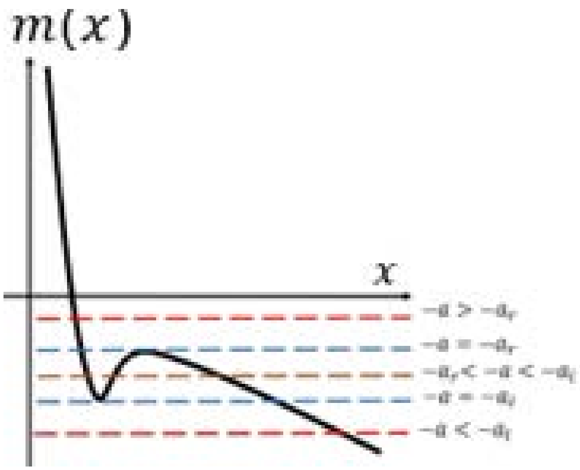
Figura 3. Diagrama de fase para un ejemplo numérico, que muestra un centro y una curva homoclina asociados al modelo AFM conservativo.



iii) $p(Z) < 0$

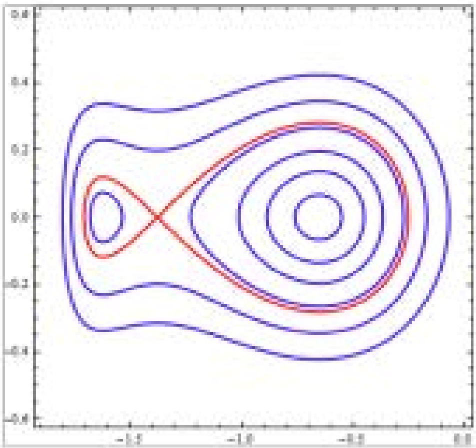
En este caso, el sistema tiene una nueva clasificación, donde dependiendo de la relación de los parámetros del sistema, se puede tener una única solución, que corresponde a un centro, dos soluciones de equilibrio, un centro y una homoclina, o tres soluciones de equilibrio, dos centros y un punto de silla, la gráfica de la función $m(x)$ permite visualizar de manera mas precisa la bifurcación del sistema.

Figura 4. Relación del parámetro a y la función $m(x)$.



Además, un ejemplo numérico permite visualizar, un caso particular del diagrama de fase, donde se visualiza el punto de silla, solución de equilibrio de interés particular en este estudio.

Figura 5. Diagrama de fase para un ejemplo numérico, que muestra dos centros y un punto de silla asociados al modelo AFM conservativo.



Variedad estable e inestable de un punto de silla para el modelo AFM – caso conservativo

El sistema dinámico asociado al modelo AFM está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= m(x) + a \end{aligned} \qquad (20)$$

Sin embargo, la aplicación del teorema 9.29 del libro *Dynamics and bifurcations* [12] tiene como una de sus hipótesis que el sistema dinámico esté en su forma normal, donde el punto fijo sobre el cual se hace el estudio está en el origen.

Luego, se hace una traslación de los puntos fijos al origen:

$$\hat{x} = x + x* \qquad (21)$$

Así se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= m(\hat{x}) + a \end{aligned} \qquad (22)$$

Haciendo una expansión en serie de Taylor alrededor del origen[4], se tiene el sistema dinámico dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= m^{(1)}(\hat{x})x + \cdots + m^{(n)}(\hat{x})\frac{x^n}{n!} \end{aligned} \qquad (23)$$

Reescribiendo el sistema en términos de operadores matemáticos, se tiene:

$$\dot{X} = J\,X \; + \; T[X] \qquad (24)$$

Donde J es la matriz jacobiana asociada al sistema, X es un vector columna de las variables y $T[X]$ es una función multivariable.

La aproximación del sistema dinámico, no solamente considera la aproximación lineal, sino también términos de orden superior.

$$T[X] = \begin{cases} 0 \\ m^{(2)}(\hat{x})\dfrac{x^2}{2} + \cdots + m^{(n)}(\hat{x})\dfrac{x^n}{n!} \end{cases} \qquad (25)$$

Para obtener la forma normal del sistema, se introduce un nuevo cambio de variable

$$X \longrightarrow PX \qquad (26)$$

Donde P es una matriz de vectores propios.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad (27)$$

Luego,

$$P\dot{X} = J\,PX + T[PX] \tag{28}$$

$$\dot{X} = P^{-1}J\,PX + P^{-1}\,T[PX] \tag{29}$$

La forma normal del sistema dinámico, está dada por:

$$\dot{X} = \tilde{\lambda}X + G[X] \tag{30}$$

Además,

$$G[X] = G(x,y) \tag{31}$$

Donde,

$$G(0,0) = (0,0) \tag{32}$$

Por otra parte, se tiene que analizar el comportamiento de la derivada de la función en el origen.

$$DG[X] = P^{-1}\,DT[PX]P \tag{33}$$

$$DG(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

Así, se verifican las hipótesis del teorema 9.29 del libro *Dynamics and bifurcations* [12], por lo que se pueden considerar las aproximaciones locales alrededor de la solución de equilibrio (punto de silla), para hacer el estimativo de las variedades estable e inestable.

Localmente se tiene:

$$y = h_s(x) \tag{35}$$

$$\dot{y} = \frac{dh_s(x)}{dx}\dot{x} \tag{36}$$

Donde se debe verificar:

$$h_s(0) = 0 \tag{37}$$

Finalmente, con la ayuda de cálculos elementales, se obtiene que la variedad estable está dada por:

$$h_{sc}(x) = S_{C2}x^2 + \cdots + S_{Cn}x^n \tag{38}$$

Además, en la ecuación (38) se verifica la condición de la ecuación (37).

La variedad estable tiene términos de orden superior, por lo que se desvía de la aproximación lineal dada por los vectores propios asociados al sistema dinámico, los coeficientes de la forma S_{Ci} donde $2 \leq i \leq n$ dependen de las derivadas de la función $m(x)$ evaluadas en el punto $\hat{x}$.

Por otra parte, localmente se tiene:

$$x = h_u(y) \tag{39}$$

$$\dot{x} = \frac{dh_u(y)}{dy}\dot{y} \tag{40}$$

Donde se debe verificar:

$$h_u(0) = 0 \tag{41}$$

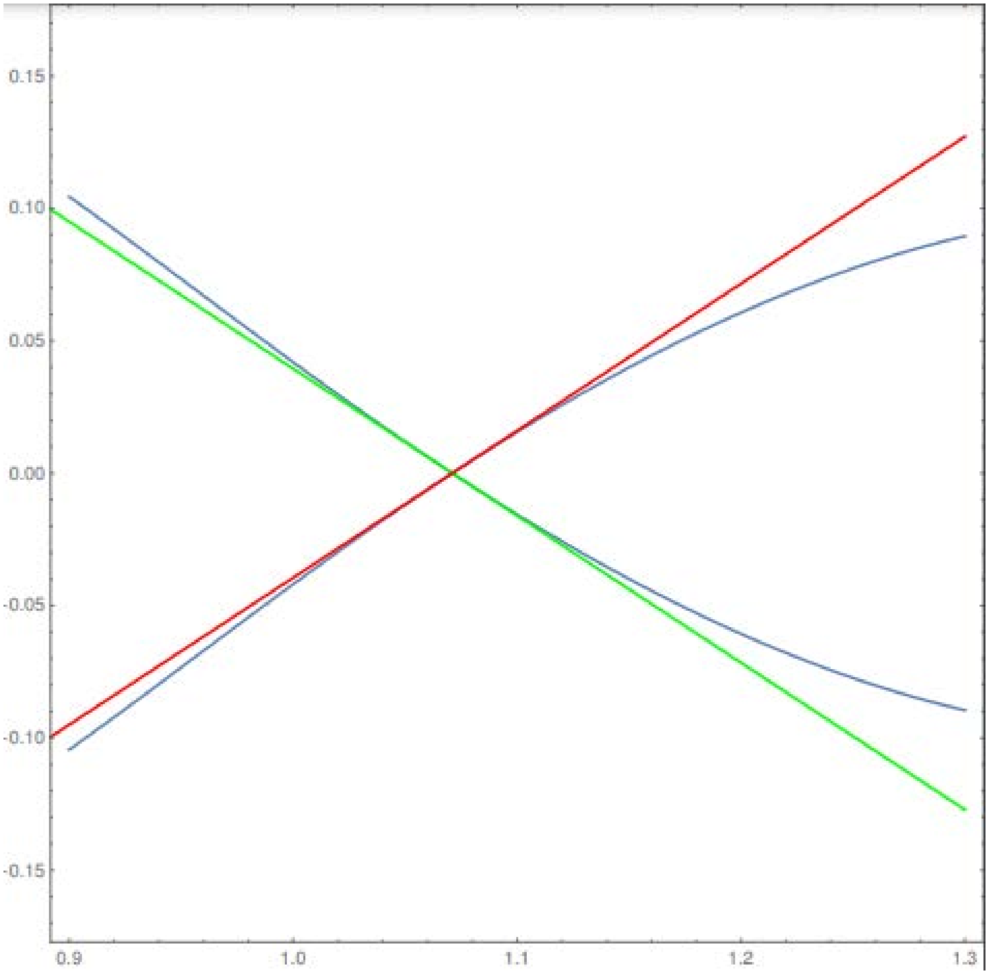
Finalmente, con la ayuda de cálculos elementales, se obtiene que la variedad inestable está dada por:

$$h_{uc}(x) = u_{C2}x^2 + \cdots + u_{Cn}x^n \tag{42}$$

Además, en la ecuación (42) se verifica la condición de la ecuación (41).

La variedad inestable tiene términos de orden superior, por lo que se desvía de la aproximación lineal dada por los vectores propios asociados al sistema dinámico, los coeficientes de la forma u_{Ci} donde $2 \leq i \leq n$ dependen de las derivadas de la función $m(x)$ evaluadas en el punto $\hat{x}$ adicionalmente la variedad inestable corresponde a una rotación de $\frac{\pi}{2}$ respecto a la variedad estable.

Figura 6. Variedades estable e inestable del punto de silla asociado al modelo AFM conservativo.



Un ejemplo numérico permite visualizar la dinámica local del punto de silla, la línea roja representa el espacio estable, la línea azul tangente a la línea roja representa la variedad estable, mientras que la línea verde representa el espacio inestable y la línea azul tangente a la línea verde representa la variedad inestable.

Clasificación de soluciones de equilibrio modelo AFM – caso disipativo

La dinámica del modelo AFM disipativo está dada por la EDO no lineal, dada por:

$$\ddot{x} - \frac{c}{x^3}\dot{x} - m(x) - a = 0 \tag{43}$$

Para el estudio de la dinámica del modelo AFM, se construye la función $\eta(x)$ dada por:

$$\eta(x) = -\frac{c}{x^3} \tag{44}$$

El dominio de la función $\eta(x)$ está dado por el intervalo $(0, \infty)$.

Luego, la EDO del modelo AFM está dada por:

$$\ddot{x} - \eta(x)\dot{x} - m(x) - a = 0 \tag{45}$$

Donde $\eta(x)\dot{x}$ representa la fricción *squeeze-film-damping* no lineal del sistema.

El sistema de EDO asociado al modelo AFM está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \eta(x)y + m(\hat{x}) + a \end{aligned} \tag{46}$$

Los puntos críticos y la cantidad de soluciones de equilibrio del modelo AFM disipativo, coinciden con los puntos críticos y la cantidad de soluciones de equilibrio del modelo AFM conservativo, sin embargo, el efecto de la fricción no lineal altera la dinámica local de las soluciones de equilibrio.

Además, la matriz jacobiana asociada al sistema esta dad por:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3c}{x^4} y + m'(x) & \eta(x) \end{pmatrix} \tag{47}$$

Los valores propios son de la forma:

$$\lambda = \frac{1}{2}\eta(\hat{x}) \mp \sqrt{(\eta(\hat{x}))^2 + 4m'(\hat{x})} \tag{48}$$

Las soluciones de equilibrio del modelo AFM dependen del comportamiento matemático de las funciones $m(x)$ y $\eta(x)$ además del parámetro a, por tanto, para determinar la existencia, multiplicidad y dinámica local, se debe estudiar la ecuación (11), teniendo como resultado la proposición 1.

Adicionalmente, el punto de inflexión tiene tres posibilidades.

i) $p(Z) > 0$

En este caso, el sistema tiene una única solución de equilibrio, donde se tiene una subclasificación que depende de la interacción entre la función $m(x)$ y la fricción del sistema $\eta(x)$.

Así, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2

- Si $4m^{(1)}(\hat{x}) > \left(\eta(x)\right)^2$ entonces se tiene un foco de atracción positiva *(* $h_s = \mathbb{R}^2, h_u = 0$ *).*

- Si $4m^{(1)}(\hat{x}) = \left(\eta(x)\right)^2$ entonces se tiene un nodo ($(h_s = \mathbb{R}, h_u = 0)$

- Si $4m^{(1)}(\hat{x}) < \left(\eta(x)\right)^2$ entonces se tiene un nodo de atracción positiva ($h_s = \mathbb{R}^2, h_u = 0$).

ii) $p(Z) = 0$

En este caso, el sistema tiene una nueva clasificación, donde dependiendo de la relación de los parámetros del sistema, se puede tener una única solución, que corresponde a la clasificación de la proposición 2, o dos soluciones de equilibrio, donde aparece una solución degenerada.

iii) $p(Z) < 0$

En este caso, el sistema tiene una nueva clasificación, donde dependiendo de la relación de los parámetros del sistema, se puede tener una única solución, que corresponde a la clasificación de la proposición 2, dos soluciones de equilibrio, donde se tiene la solución degenerada, o tres soluciones de equilibrio, donde se preserva el punto de silla.

Variedad estable e inestable de un punto de silla para el modelo AFM – caso disipativo

El estimativo de las variedades estable e inestable del punto de silla, se realiza tomando como referencia el teorema 9.29 del libro *Dynamics and bifurcations* [12], además de considerar un razonamiento análogo al utilizado para el caso conservativo.

El sistema dinámico asociado al modelo AFM en el caso disipativo, está dado por la ecuación (46).

La forma normal del sistema dinámico, tiene la estructura de la ecuación (30).

Donde se verifican las condiciones de las ecuaciones (32) y (34).

Finalmente, mediante *cálculos elementales* se obtiene que la variedad estable está dada por:

$$h_{sD}(x) = S_{D2}x^2 + \cdots + S_{Dn}x^n \tag{49}$$

Además, en la ecuación (49) se verifica la condición de la ecuación (37).

La variedad estable tiene términos de orden superior, por lo que se desvía de la aproximación lineal dada por los vectores propios asociados al sistema dinámico, los coeficientes de la forma S_{Di} donde $2 \leq i \leq n$ dependen de las derivadas de las funciones $m(x)$ y $\eta(x)$ evaluadas en el punto $\hat{x}$.

Por otra parte, se obtiene que la variedad inestable está dada por:

$$h_{uD}(x) = u_{D2}x^2 + \cdots + u_{Dn}x^n \tag{50}$$

Además, en la ecuación (50) se verifica la condición de la ecuación (41).

La variedad inestable tiene términos de orden superior, por lo que se desvía de la aproximación lineal dada por los vectores propios asociados al sistema dinámico, los coeficientes de la forma u_{Di} donde $2 \leq i \leq n$ dependen de las derivadas de las funciones $m(x)$ y $\eta(x)$ evaluadas en el punto $\hat{x}$.

Finalmente, se espera poder determinar el atractor global del sistema disipativo, para conocer la dinámica global del sistema, además de comparar los resultados con las cuencas de atracción de las soluciones de equilibrio donde se tienen focos y/o nodos hiperbólicos, ya que son las regiones del sistema donde se puede garantizar la estabilidad del sistema, por lo tanto, proporciona información sobre los parámetros y protocolos de operación de los AFM.

Figura 7. Atractor global asociado a un sistema de EDO de orden 2.

III. CONCLUSIONES

Se realiza la clasificación de soluciones de equilibrio del modelo AFM, para los casos conservativo y disipativo, obteniendo como resultado que se tienen los mismos puntos críticos e igual cantidad de soluciones de equilibrio, además se obtiene la dinámica local de estas soluciones, en términos de los parámetros del instrumento científico de medición, donde se describe el efecto de la fricción *squeeze-film-damping* del sistema y la preservación del punto de silla.

Por otra parte, se realiza en forma analítica el estimativo de las variedades estable e inestable del punto de silla del modelo AFM, para los casos conservativo y disipativo, obteniendo las curvas que describen la dinámica local del punto de silla y de las soluciones cercanas a las variedades estable e inestable, para el caso conservativo, se tiene una relación entre las variedades, evidenciando que la variedad inestable es una rotación de respecto a la variedad estable.

Finalmente, determinar el atractor global del sistema, que constituye un conjunto positivamente invariante, proporciona la dinámica del sistema en términos de sus parámetros, resultado que implícitamente da información de los parámetros óptimos de diseño de los microscopios AFM.

REFERENCIAS

[1] Ghaderi, R. and Nejat, A. "Nonlinear mathematical modeling of vibrating motion of nanomechanical cantilever active probe". 11ª ed. Latin American Journal of Solids and Structures, 2014, pp. 369 – 385.

[2] Israelachvili, J. N. "Intermolecular and surface forces". Elsevier, 2011.

[3] Jalili, N. and Laxminarayana, K. "A review of atomic force microscopy imaging systems: application to molecular metrology and biological sciences". International Journal of Mechatronics, 2004, pp. 907–945.

[4] Eisenschitz, R., & London, F. "Uber das Verhaltnis der van der Waalsschen Krafte zu den homopolaren Bindungskraften". Zeitschrift für Physik 1930, pp. 491-527.

[5] Ashhab, M., Salapaka, V., Dahleh, M. y Mezic I. "Melnikov-Based Dynamical Analysis of Microcantilevers in scanning Probe Microscopy" Vol. 20, Nonlinear Dynamics, 1999, pp. 197-229.

[6] Younis, M. I. " MEMS Linear and Momlinear Statics and Dynamics". Springer, 2011.

[7] Ashhab, M., Salapaka, V., Dahleh, M. y Mezic, I. "Control of Chaos in Atomic Force Microscopes". Proceedings of the American Control Conference, 1997, pp. 196-202.

[8] Giessibl, F. "Advances in Atomic Force Microscopy". Reviews of Modern Physic, 2003, pp. 949– 984.

[9] García, R. y Pérez, R. "Dynamic atomic force microscopy methods". Surface Science Reports, 2002, pp. 197–301.

[10] Duque, J. “Dinámica de un AFM no conservativo”. Tesis de maestría en matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira, 2019.

[11] Gutierrez A. “Soluciones Periódicas en Ecuaciones Diferenciales Singulares”. Colección de Trabajos de Investigación. Editorial UTP, 2017.

[12] Jack K. Hale, Huseyin Kocak “Dynamics and bifurcations”. Editorial Springer Verlag, 1991, pp. 295-296.

AUTORES

José Chaves Tobar

Candidato a Magíster en Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira, Ingeniero Físico de la Universidad del Cauca.

Áreas de investigación: propiedades cualitativas de ecuaciones diferenciales, ciencia de materiales, fisicoquímica, modelamiento de sistemas dinámicos.

Alexander Gutiérrez Gutiérrez

Doctor en Matemáticas, profesor del departamento de matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira.

Áreas de investigación: propiedades cualitativas de ecuaciones diferenciales.

Elaboración de recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje del pensamiento aleatorio en la básica primaria por grados de escolaridad[1]

Elaboration of didactic resources for the teaching and learning of random thinking in basic primary school by grades of schooling

Esteban-Duarte, Nubia, Guzmán-Buendía, Eddy Mackniven, López-Ramírez, María Ximena, Martínez-Aragón Aymara

1 Este artículo es resultado de la investigación titulada: Elaboración de recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje del pensamiento aleatorio en la básica primaria por grados de escolaridad.

Resumen

En la enseñanza del pensamiento aleatorio se han evidenciado falencias, a nivel de primaria, desde la falta de claridad en los contenidos y nivel de complejidad, hasta la falta de material concreto desglosado por grados de escolaridad. El presente proyecto pretende generar estrategias que faciliten la enseñanza y el aprendizaje de esta competencia por grado, teniendo presentes las capacidades de aprendizaje que poseen los estudiantes en cada uno de ellos y dándole un manejo adecuado y asertivo al pensamiento aleatorio. Se diseñarán textos para cada grado escolar de la básica primaria, con el fin de contextualizar a los docentes en las temáticas específicas que se deben abordar de acuerdo a los estándares básicos de competencia y a los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA). Los textos se trabajarán considerando los formatos y estándares utilizados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) con el objetivo de que a futuro puedan ser utilizados en todos los colegios del país. Se trabaja con la posibilidad de que se aborden las lagunas existentes tanto en contenido como en conectividad en la presente coyuntura del Covid-19 y que sirvan para trabajar a distancia con y sin tecnología. Este material pretende facilitar el aprendizaje inclusivo para niños de Manizales, con miras a extenderlo a todos los docentes del departamento de Caldas y, posteriormente, a toda Colombia. Este proyecto se desarrollará en conjunto con la Universidad Católica Manizales.

Palabras clave: didáctica, enseñanza, escolaridad, primaria, pensamiento aleatorio.

Abstract

In the teaching of random thought there have been evident shortcomings, at the primary level, from the lack of clarity in the contents and level of complexity to the lack of concrete material broken down by degrees of schooling. This project aims to generate strategies that facilitate the teaching and learning of this competence by degree, bearing in mind the learning abilities that students possess in each one, and giving an adequate

and assertive management to random thinking. Texts will be designed for each grade of elementary school, in order to contextualize teachers in the specific topics that must be addressed according to basic learning standards and basic learning rights (DBA). The texts will be considered the formats and standards used by the Ministry of National Education of Colombia (MEN) with the aim that in the future they can be used in all schools in the country. We are working with the possibility of addressing the existing gaps in both content and connectivity in the current situation of the Covid-19 and that serve to work remotely with and without technology. This material aims to facilitate inclusive learning for children in Manizales, with a view to extending it to all teachers in the department of Caldas and later throughout Colombia. This project will be developed in conjunction with the Catholic University Manizales.

Keywords: didactic, teaching, schooling, primary, random thinking.

I. INTRODUCCIÓN

En el marco del Programa Formador de Formadores, Educación Rural para la Paz de la UNAL sede Manizales, el Departamento de Matemáticas y Estadística participó en la nivelación de profesores y en la elaboración de cartillas para la enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, se evidenciaron falencias en la enseñanza del pensamiento aleatorio en básica primaria y secundaria. Actualmente, el MEN en los estándares básicos de calidad y en los DBA, plantea diferentes temáticas relacionadas al pensamiento aleatorio que deben ser orientadas en todos los grados de escolaridad, de acuerdo a los procesos de razonamiento de los estudiantes. Sin embargo, en las diferentes pruebas externas se evidencian grandes dificultades en el manejo del pensamiento aleatorio, que surge de la falta de direccionamiento específico a la hora de enseñar dicha competencia [1] Los docentes comentaron que es difícil diferenciar las temáticas correspondientes a cada uno de los grados sin caer en la repetición, ya que están mezcladas en varios grados, sin mostrar el nivel de dificultad que deben trabajar. También comentaron que no cuentan con material adecuado para su práctica docente en el área, impidiendo avances apropiados en el aprendizaje. Esto genera resistencia tanto por parte de docentes, que prefieren delegar la responsabilidad en el siguiente grado, como en los estudiantes que lo consideran repetitivo, sin despertar el interés en el área. El pensamiento aleatorio es fundamental para el desarrollo de competencias matemáticas, en la resolución de problemas, la comunicación de resultados que son generados a partir de métodos de recolección de datos, representación y análisis que ayudan a pronosticar, etc.; pero ha quedado relegado por los motivos anteriores. El problema con la enseñanza del pensamiento aleatorio parte de que el MEN lo contempla inmerso en la malla curricular articulada a Matemáticas. El material que existe está dentro de los establecidos para Matemáticas, es decir, aparece con unos pocos ejercicios en los libros, cartillas y guías fuera de ocupar la última sección, generalmente. Además, se detectó que, en general, el maestro de la básica primaria no cuenta con la suficiente preparación disciplinar, siendo necesario un material didáctico independiente para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de estadística. Uno que aborde de manera transversal el pensamiento aleatorio buscando que la estadística se vea involucrada en los procesos de formación de los estudiantes.

Un rastreo bibliográfico mostró que no se tiene material para la enseñanza del pensamiento aleatorio en Colombia, se han realizado muchas investigaciones del tema, pero no han producido material concreto. En los textos escolares de Matemáticas se abordan de manera repetitiva temáticas de la estadística descriptiva elemental y la probabilidad, y se orienta de manera sesgada. El estudiante no aprende que, a partir de unos datos recolectados, se puede inferir y dar solución a problemas de la vida cotidiana, como queda evidenciado en las pruebas nacionales e internacionales. A esto se le suman las pocas horas que tiene el docente para matemáticas, limitándose al pensamiento numérico y descuidando los restantes. Desde la óptica de los procesos evaluativos, la estadística se denota como la asignatura que transversaliza las otras áreas del saber. Un buen manejo de dicho pensamiento sería una fortaleza en las pruebas estandarizadas como las SABER y PISA, así como para la vida. En la presente coyuntura del COVID-19, se necesita material para la enseñanza tanto impreso como digital, con el objetivo de proteger el bienestar de los niños y garantizar el acceso al aprendizaje de manera innovadora. Así como dar oportunidad de aprendizaje inclusivo para todos durante este periodo y que pueda servir posteriormente para llevar el aprendizaje a zonas con dificultades. En el caso del pensamiento aleatorio, en primaria no existe material bien estructurado que permita una educación a distancia usando alta, baja o sin tecnología. Es por esto que la investigación tiene por objetivo general:

Elaborar material didáctico, que incida en la enseñanza y aprendizaje del pensamiento aleatorio en estudiantes de la básica primaria por grados de escolaridad.

Como objetivos específicos:

- Clasificar el material existente del pensamiento aleatorio en básica primaria.

- Consolidar el material didáctico que facilite los procesos de enseñanza y aprendizaje del pensamiento aleatorio en la básica primaria por grados de escolaridad.
- Diferenciación de contenidos y de complejidad por grados.
- Diseñar material didáctico para la enseñanza del pensamiento aleatorio por grados de escolaridad.
- Socializar la propuesta con profesores de la básica primaria de la región para generar procesos de apropiación social de la propuesta.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

El presente proyecto tiene un enfoque cualitativo, con un diseño de investigación-acción. La investigación-acción está orientada a lo social y a la educación, hacia el cambio educativo por medio de la obtención de resultados para mejorar una situación que está incidiendo en un sector, priorizando la reflexión de la práctica y la capacidad del profesor para introducir mejorías. En este caso, la transformación social de los contextos educativos de la básica primaria para la enseñanza del pensamiento aleatorio, generando conciencia de la importancia del mismo en el entorno y permitiendo a los docentes ser sujetos participativos de la transformación del sector educativo. Se pretende seguir la metodología *Scrum* (reuniones) para la ejecución del proyecto. Tenemos un equipo pequeño y multifuncional por lo que nos permitirá autogestionarnos con un enfoque ligero para definir roles de forma simple, *scrums* (reuniones) y herramientas para entregar lo correcto, de la manera correcta, lo más rápido posible. El trabajo se divide en fases secuenciales (iteraciones), donde cada fase dependerá de la anterior para su desarrollo, así mismo, en la fase de socialización se retroalimenta para consolidar las actividades pedagógicas del material. Al terminar cada fase se realiza una reunión para informar del progreso, recibir observaciones y decidir si pasamos a la siguiente. Teniendo en cuenta los objetivos, se propone:

- Reconocimiento y clasificación del material existente del pensamiento aleatorio empleado en la básica. En la revisión bibliográfica, se analizarán los textos usados en las aulas, la estructura y los contenidos didácticos expuestos para la enseñanza del pensamiento aleatorio. Además, establecer parámetros que apunten al cumplimiento de los lineamientos curriculares, competencias básicas definidas en los estándares de calidad, los derechos básicos del aprendizaje (DBA), entre otros. En la metodología propuesta, la clasificación del material por grados escolares se hace necesaria para la ejecución del diseño, por lo tanto, se documentará en un análisis riguroso.

- Definir los contenidos por grados de escolaridad y el nivel de complejidad para cada uno.

- Plantear una estrategia para diseñar el material didáctico. En esta etapa se requiere haber hecho el análisis de la fase anterior, pues se necesita tener sistematizada y depurada la información para tener las actividades que involucren e implementen el uso de material en concreto para hacer más enriquecedor el aprendizaje.

- Elaboración de los contenidos para el material didáctico por grados escolares. Se planteará la estructura de los módulos, teniendo en cuenta la información del diseño, incluyendo actividades que permitan al estudiante experimentar a partir de material en concreto.

- Diagramación del producto. Durante esta etapa, se pretenden desarrollar los textos didácticos, la redacción y digitación del contenido, además de la uniformidad que llevará el material que se pretende presentar en las instituciones educativas de la básica primaria.

- Socialización de la propuesta con profesores de la básica primaria de la región para generar procesos de apropiación social de la propuesta. Aquí se debe considerar la capacitación de los maestros como mediadores del proceso de enseñanza-aprendizaje, según lo expuesto en el material didáctico creado y se analizará la producción de los contenidos pensados desde los lineamientos curriculares y las técnicas para el uso del material en concreto. Esta fase es muy importante, pues la participación de los docentes sería una primera verificación del material, siendo el pilotaje para revisar posibles modificaciones.

- Consolidar el material didáctico para la enseñanza del pensamiento aleatorio en la básica primaria. Se pretende que la editorial de la UNAL realice la publicación de los recursos didácticos elaborados con coautoría de la Universidad Católica de Manizales.

III. CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta que se están presentando los avances de la investigación, se desarrollan las siguientes conclusiones:

Se realizó una búsqueda bibliográfica y se identificó que existe material didáctico para la enseñanza del pensamiento aleatorio, pero no se clasifica de acuerdo a los grados de escolaridad.

Al realizar la búsqueda bibliográfica, se encuentra que el pensamiento aleatorio se limita a la enseñanza y aprendizaje de la estadística descriptiva, provocando la ausencia de otros conceptos que hacen parte de este pensamiento.

Se logran clasificar las temáticas y su complejidad de acuerdo a los grados de escolaridad, esto teniendo en cuenta los Estándares Básicos de Competencias y los DBA.

En el margen de los avances presentados en la investigación, se consolidan los libros de los grados primero, segundo y tercero, cada uno con su respectiva temática y grado de dificultad.

REFERENCIAS

[1] S.M. Carranza & M.A Guerrero. El pensamiento aleatorio como fundamento para el desarrollo del pensamiento matemático y

sus componentes. Documento no publicado (Informe). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. (2016).

[2] C. Batanero. ¿Hacia dónde va la educación estadística? Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, batanero@goliat.ugr.es Blaix15, 2-13.(2000) .

[3] C. Batanero. ¿Hacia dónde va la educación estadística? Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, batanero@goliat.ugr.es Blaix15, 2-13.(2000).

[4] M. Castellanos. & P. Arteaga. Los gráficos estadísticos en las directrices curriculares para la educación primaria en España y Colombia. En Contreras, José Miguel; Cañadas, Gustavo; Gea, María Magdalena; Arteaga, Pedro (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 397-404).Granada, España: Departamento de Didáctica de la matemática Universidad de Granada.(2013).

[5] C.C. Ponteville. ¿Para qué enseñamos estadística? Instituto Superior del Profesorado ¿Dr. Joaquín V. González¿ Universidad de Buenos Aires Argentina chponteville@gmail.com Capítulo 1. Análisis del discurso matemático escolar. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

[6] C. Tamayo. Aprendizaje de la estadística descriptiva en contextos de vulnerabilidad: una relación entre lo socio-cultural y la matemática escolar. Memorias del X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.(2009) .

[7] L. Tauber. Alfabetización y cultura estadística de los profesores: ¿Un logro o una necesidad? En C. Cuesta (Ed.). 3ª Jornada de Educación Estadística ¿Marta Bilotti¿ (pp. 15-25), Rosario: Sociedad Argentina de Estadística.(2017).

[8] M. Tesouro. & J. Puiggalí. ¿La relación entre la docencia y la investigación según la opinión del profesorado universitario?, Procedia. Social and Behavioral Sciences, vol. 196, pp. 212-218, en: 212-218, en: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042815040173. (2015).

[9] L. Zapata-Cardona. ¿Estamos promoviendo el pensamiento estadístico en la enseñanza? 2ECEE Encuentro Colombiano de Educación Estocástica. (2016).

AUTORES

Nubia Esteban Duarte

Matemática de la Universidad de Antioquia; Magíster en Estadística de la Universidad de São Paulo, Brasil; Doctora en Estadística de la Universidad de São Paulo, Brasil y Posdoctorado del Laboratorio de Genética y Cardiología Molecular del Hospital de las Clínicas, Universidad de São Paulo, Brasil. Docente en Dedicación Exclusiva; Coordinadora de la Especialización en Estadística; Directora del grupo de Investigación Modelos Estadísticos y Directora del Semillero en Estadística de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales.

Áreas de investigación: análisis multivariado, modelos lineales generalizados, aplicaciones de modelos mixtos en el área de genética, ecuaciones estructurales, didáctica de la estadística.

Eddy Mackniven Guzmán Buendía

Matemático de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales. Actualmente cursando la maestría en Ciencias, línea Matemática Aplicada de la Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales. Docente de tiempo completo de la Universidad Católica de Manizales. Integrante del grupo de investigación EFE (Educación y Formación de Educadores) en la línea de didáctica de las ciencias naturales y las matemáticas.

Áreas de investigación: matemática aplicada, didácticas de las matemáticas y la estadística.

María Ximena López Ramírez

Licenciada en Matemáticas de la Universidad del Quindío; Magíster en Pedagogía de la Universidad Católica de Manizales. Docente de tiempo completo de la Universidad Católica de Manizales, Líder del proceso de autoevaluación de la Licenciatura en matemáticas y Física, Coordinadora de Prácticas de la Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental y la Licenciatura en Matemáticas y Física. Integrante del grupo de investigación EFE (Educación y Formación de Educadores) en la línea didáctica de las ciencias naturales y las matemáticas.

Áreas de investigación: educación, didácticas de las matemáticas y la estadística.

Aymara Martínez Aragón

Matemática de la Universidad de La Habana, Cuba; Magíster en Informática Aplicada de la Universidad de Matanzas, Cuba; Magíster en Matemática Aplicada de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales y Doctora en Bioinformática de la Universidad de São Paulo, Brasil. Docente Cátedra de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales. Directora de Investigación y extensión de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales. Integrante del grupo de Modelos Estadísticos.

Áreas de investigación: bioinformática, didáctica de las matemáticas, estadística.

Un acercamiento al sentido de los números irracionales. Una revisión de la literatura[1]

An approach to the meaning of irrational numbers. A review of the literature

Herrera-Aparicio, Julián Andrés[2] *y Fernández-Sánchez, Óscar*[3]

1 Artículo basado en el proyecto de tesis para candidato a maestría en enseñanza de las matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira.

2 Universidad Tecnológica de Pereira; https://orcid.org/0000-0002-1772-9207.
Contacto: julianandres.herrera@utp.edu.co

3 Universidad Tecnológica de Pereira; https://orcid.org/0000-0003-0804-2996.
Contacto: oscarf@utp.edu.co

Resumen

El presente artículo aborda una revisión de la literatura, en relación al sentido del concepto de número irracional, a partir de referentes teóricos como los planteamientos de Gottlob Frege, Umberto Eco y Lev Vygotsky. A través de los cuales se puede reconocer su proceso de desarrollo histórico. Sin embargo, es importante aclarar que a pesar de que estos han tenido en cuenta el contexto en el cual ha sido creado (desarrollado o hasta complementado, para llegar a su formalización), en ninguno de los trabajos encontrados se logra vislumbrar de manera explícita el sentido del concepto de numero irracional, observándose algo similar respecto a los estándares básicos y los Derechos Básicos de Aprendizaje que se plantean en Colombia para la enseñanza de las matemáticas. Esta revisión bibliográfica, como parte de la construcción del marco teórico y antecedentes de investigación, han dado luces sobre algunas estrategias para abordar los números irracionales en la educación secundaria y, aunque aquí no se tratan directamente, es un primer paso hacia el estudio del sentido de los números irracionales. Planteando finalmente una postura crítica frente a la enseñanza de este concepto en la educación secundaria en el sistema de educación colombiano.

Palabras clave: número irracional, sentido de número, desarrollo histórico epistemológico, enseñanza.

Abstract

This article reviews the literature on the meaning of the concept of irrational number, based on theoretical references such as the approaches of Gottlob Frege, Umberto Eco and Lev Vygotsky. Through which its historical development process can be recognized. However, it is important to clarify that although these have taken into account the context in which it has been created (developed or even complemented, to reach its formalization), in none of the works found is it possible to explicitly glimpse the meaning of the concept of irrational number, observing something similar with respect to the basic standards and learning rights that are proposed in Colombia for the teaching of mathematics. This literature review, as part of the construction of the theoretical framework and research background, has shed light on some strategies to address irrational numbers in secondary education, and although they are not directly addressed here, it is a first step towards the study of the meaning of irrational numbers. Finally, we propose a critical stance towards the teaching of this concept in secondary education in the Colombian education system.

Keywords: irrational number, sense of number, historical epistemological development, teaching.

I. INTRODUCCIÓN

Actualmente, en el sistema de educación colombiano, el concepto de número irracional es abordado en el grado octavo de educación básica secundaria, conforme a los estándares básicos de competencias (EBC) en matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), los cuales son referentes de calidad del sistema educativo. Este hecho ha llamado la atención de diversos investigadores que en definitiva han puesto su mirada sobre el proceso de desarrollo histórico de tal concepto, lo cual permite develar algunos obstáculos epistemológicos que subyacen frente a la enseñanza de los mismos y al tiempo intentar proponer estrategias que ayuden a disminuir su posible influencia en el proceso de aprendizaje. Generando una reflexión en torno a la posibilidad de encontrar alguna forma de enseñar los números irracionales. De hecho, la enseñanza de este tipo de números se ha limitado a mostrar un producto ya terminado, derivado del resultado de muchos años de construcción histórica del concepto de número irracional.

La enseñanza de este objeto matemático es realmente un proceso complejo, primero porque el producto (objeto) da la sensación de ser un objeto inalcanzable, en virtud de su carácter abstracto, aunado al poco conocimiento que se tiene de su presencia y usos en la vida cotidiana.

Sin embargo, la historia muestra que la mayoría de autores dedicados al estudio de los números irracionales concuerdan en que su origen data de la antigua Grecia, y que su surgimiento se atribuye a la escuela pitagórica, al intentar determinar la conmensurabilidad entre la diagonal del cuadrado y su lado, es decir, es un proceso netamente geométrico que representó en su época una gran utilidad, es más, en cada una de las épocas ha surgido la necesidad de su utilización y esto es lo que ha llevado a la formalización de los números reales dada por Cantor y Dedekind en el siglo XIX [1, p.33].

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

Convivir en el mundo de los números irracionales no debe ser fácil, ¡pero no imposible!, por ello la revisión documental sobre el desarrollo histórico-epistemológico del número irracional plantea varios interrogantes, que al final ayudan a navegar en este universo del saber matemático.

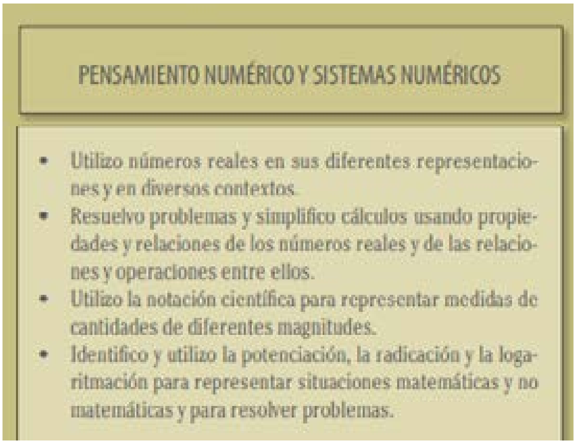
Uno de estos interrogantes está asociado con encontrar sentido al concepto de número irracional a través de la historia, donde en algunas épocas diversos autores han aportado a su formalización, sin dejar de lado que este fue un proceso paralelo a los números reales, que también los involucran.

Actualmente, el proceso de enseñanza de los números irracionales está ligado a un constructo teórico en relación a la construcción del conjunto de los números reales, observándose que en los EBC [2, p. 86] no se hace referencia explícita sobre el número irracional (figura 1), mientras que en los DBA sí se hace de forma explícita, aunque se utiliza una definición ligada a la idea de no ser racional, expresando en sus dos primeros numerales lo siguiente:

1. Reconoce la existencia de los números irracionales como números no racionales y los describe de acuerdo con sus características y propiedades.

2. Construye representaciones, argumentos y ejemplos de propiedades de los números racionales y no racionales [3, p.59].

Figura 1. Estándares Básicos de Competencia grado octavo, pensamiento numérico.



PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
- Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes.
- Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.

Fuente: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Observándose de forma inherente, y hasta por cuestiones de tiempo, que en el currículo de enseñanza los números irracionales, generalmente, suelen ser dejados de lado o pasan a un segundo plano y como su complejidad puede influir en el desarrollo de las clases dedicadas a este tema, evidenciando una pequeña representación de los obstáculos que se pueden presentar, pues como se dijo anteriormente se está mostrando un producto terminado, que en muchos casos carece de sentido y aplicación.

Entonces, ¿Cómo dar respuesta a ese interrogante acerca de convivir con los números irracionales?

No se pretende mostrar la propuesta como una panacea, pero sí crear conciencia de la importancia que este objeto tiene en el pensamiento matemático, a la hora de determinar formas de sobrepasar los obstáculos epistemológicamente asociados a la enseñanza de este concepto, siendo necesario resaltar que se da una mirada desde el sentido de número irracional, por ello la revisión documental está enfocada en encontrar artículos, tesis u otros medios que involucren el concepto de sentido y número irracional.

En referencia al sentido

Para dar claridad a la noción de sentido de número irracional, es necesario recurrir a la definición de sentido, para ello se retoman apartes de diversos autores que tratan dicho tema, cuyas teorías apuntan a pensar en la relación existente entre objeto, significado, significante y sentido.

Frege (1982) en su estudio sobre semántica llega a concluir que un signo puede tener un mismo sentido aun cuando existan diversas representaciones de este mismo objeto, en todo caso la representación depende del conjunto de conocimientos y experiencias de un sujeto, pues es mediante estas que se construye una imagen del objeto en cuestión, mientras que el sentido da cuenta del modo en que se da el objeto. Así, entender el concepto de número, por ejemplo, depende de la representación (que puede ser mental) que el sujeto tenga de dicho concepto, aun cuando la referencia y el sentido lleve a pensar sobre un mismo objeto de estudio. El mismo Frege da cuenta que:

De la referencia y del sentido de un signo hay que distinguir la representación a él asociada. Si la referencia de un signo es un objeto sensiblemente perceptible, la representación que yo tengo de él es entonces una imagen interna formada a partir de recuerdos de impresiones sensibles que he tenido, y de actividades que he practicado, tanto internas como externas[3]. Esa imagen está frecuentemente impregnada de sentimientos; la claridad de cada una de sus partes es diversa y vacilante. No siempre, ni siquiera en la misma persona, está unida la misma representación al mismo sentido. [4, p. 56]Del mismo modo, se puede evidenciar la noción de referencia, entendida como un nombre propio y/o signo, en este sentido Frege lo expresa de la siguiente manera: un nombre propio (palabra, signo, fila de signos o expresión) expresa su sentido, se refiere a su referencia o la designa. Con un signo expresamos su sentido y designamos su referencia. Así pues, número (en particular número irracional) hace parte del universo de estudio de esta investigación, pues se convierte en la referencia.

Eco (1986) al igual que otros autores ya mencionados, menciona que el sentido está ligado a la subjetividad, en sus propias palabras sostiene que "al introducir el hombre hemos pasado al universo del sentido" [4, p. 52], desde este punto de vista es el sujeto quien brinda un proceso de significación donde el objeto se llena de significado, sin embargo, explicar tal concepto es un proceso complejo, que conlleva a explicar sobre la connotación y denotación que tiene un objeto/mensaje.

Lo expuesto por Eco queda de forma más clara cuando hace referencia a un código de ejemplo, que llamará *ABC*, y que en un contexto determinado significa *nivel 0*, en este sentido, una persona puede "tener" en su consciente que este código denota peligro, en este caso se habla del código denotativo, el cual se convierte en un código base; sin embargo, a partir de ese código se pueden construir nuevos códigos, como por ejemplo, saltar de…, gira la dirección hacia…, aplicar todos los sistemas de frenos, en este caso esos códigos son un poco más específicos, y se les llama connotativos. En palabras de Eco, nos señala que "podemos establecer que existe un código denotativo básico sobre el cual se construyen otros códigos menores, con frecuencia opcionales (y que hemos llamado connotativos)" [5, p. 54].

Esta idea planteada por Eco es de gran importancia, pues no solo se hace el estudio involucrando el contexto, sino que también permite, en su sentido más amplio, encontrar relaciones de posibles códigos generados por el estudio de los números irracionales y de este modo acercarnos al sentido de número irracional.

Vygotsky (1934) afirma que "Una palabra adquiere un sentido del contexto que la contiene, cambia su sentido en diferentes contextos." [6, p. 109]. Es decir, el sentido de una palabra (o en este caso de un objeto matemático) está intrínsecamente ligado al contexto donde se promueve dicho objeto, desde este punto de vista es interesante observar el desarrollo histórico de los números irracionales, pues a través de este estudio se pueden evidenciar épocas históricas para el desarrollo del concepto de número irracional y de esta forma encontrar el sentido, que permita crear una propuesta de enseñanza de tal objeto matemático.

Vigotsky también plantea una distinción entre significado y sentido, para él el significado hace parte de ese cúmulo de conocimientos que dan sentido a una palabra, en sus propias palabras indica que "El significado "de diccionario" de una palabra no es más que una piedra en el edificio del sentido"[6, p. 109], mientras que el sentido va más allá, es variable, y precisamente depende de esos significados (que construyen un conocimiento) que circulan en la mente de un sujeto, por lo que lo define como "la suma de todos los sucesos psicológicos que la palabra provoca en nuestra conciencia" [6, p. 108].

Desde el punto de vista del autor, para encontrar el sentido de un objeto, no basta con solo observar el objeto, sino que también se debe analizar la asociación de este frente a otros y el contexto en el que se produce, por lo que en la investigación se realiza un acercamiento a diversos conceptos de número, particularmente de número racional.

El proceso de construcción de número irracional en la educación secundaria es un eslabón en la cadena educativa, es por esto que no se puede dejar de lado el estudio del número irracional, sin embargo, el desarrollo histórico de este concepto da cuenta de los múltiples obstáculos presentados para la formalización dentro de la matemática, por lo que los aportes brindados por estos autores muestran un panorama alentador para el desarrollo de una propuesta que permita reconocer la importancia del sentido de número irracional y generar, a partir de este aspecto semántico de dicho concepto, una estrategia didáctica para su abordaje en clase de matemáticas.

Acerca del concepto de número irracional

El proceso de construcción del número irracional se fue dilucidando poco a poco a través del tiempo y tardó un poco más de 25 siglos en formalizarse. En sus inicios, con los pitagóricos, no se consideraba el estudio de este concepto como relaciones entre magnitudes, solo hasta el siglo XIX por medio de Dedekind y Cantor se estructuran los números irracionales, como un conjunto numérico que hace parte de los números reales.

Para el desarrollo del concepto de número irracional, se puede recurrir a fuentes históricas que permitan recopilar información de cómo fue propuesto en determinadas épocas, al respecto Sánchez nos indica que: "Entre los hallazgos encontramos cuatro esquemas conceptuales en su acepción epistemológica: el irracional asociado a una aproximación entre razones, asociado a lo aritmético, a una aproximación de un número racional cercano y el irracional asociado a un número" [1, p. 31]. De este modo, el mismo Sánchez expresa una clasificación del concepto de número irracional en 4 etapas:

> Edad Antigua, Edad Media, Renacimiento, Edad Moderna y Contemporánea. Esta aproximación se hace desde la aparición intuitiva del número irracional mediante el estudio entre segmento inconmensurable (Edad Antigua), hasta su reconocimiento como número en el siglo XIX en virtud de la aritmetización del Análisis (Edad Contemporánea). [1, p. 35]

Por su parte, los investigadores que apuntan a distinguir un carácter epistemológico del concepto de número irracional datan que este concepto tiene sus inicios en la escuela pitagórica y la imposibilidad de relacionar dichas cantidades con las magnitudes y sus inicios se dan en el entendimiento de establecer relaciones entre dos magnitudes para expresar raíz de dos. Recalde establece que "las raíces históricas de los números irracionales podemos localizarlas en el problema de la inconmensurabilidad y en la imposibilidad de establecer la raíz cuadrada de dos como razón entre dos números enteros" [7, p. 51]. En el mismo sentido, Sánchez [1] cita a Boyer [8, p. 33] y a Jiménez [9, p. 33] quienes afirman que:

> El origen del número irracional está estrechamente relacionado con el descubrimiento de los segmentos inconmensurables (segmentos

que no poseen una unidad común). Posteriormente, el estudio de las razones de segmentos conmensurables, o de segmentos inconmensurables pasan a ser cocientes y las proporciones se convirtieron en igualdades numéricas. Más aún, las razones entre segmentos conmensurables sufrieron la metamorfosis que las llevó a números racionales y aquellas razones entre inconmensurables pasaron a ser números irracionales.

Las aplicaciones de números irracionales a través de las épocas se hacen cada vez más frecuentes en la música, en el estudio de la circunferencia, la economía y la biología y un sinfín de áreas se han encargado de evidenciar el uso de este objeto. Macías afirma que durante la época de los pitagóricos ya se conoce el número π y el número de oro. De esta forma indica que:

> Hay tres números irracionales cuyas aplicaciones, tanto en matemáticas como en otras disciplinas, son tan numerosas e importantes que podríamos denominarlos como los números irracionales más famosos. Son los números π, e y Φ llamados número pi, número e y número de oro, respectivamente. Dos de ellos, π y Φ, ya eran conocidos por los griegos, varios siglos a. C.; el número e es ampliamente utilizado desde el siglo XVIII. [10, p. 3]

III. CONCLUSIONES

En relación al concepto de número irracional, se observa según el contexto histórico que los números irracionales surgen de las necesidades de una sociedad, de hecho en cada época han surgido algunos problemas que permiten el desarrollo del concepto y por tanto es posible rastrear algunas de estas aplicaciones, pues es mediante ellas que se pueden estudiar los obstáculos epistemológicos asociados al concepto llevado al aula de clase, es un objeto que lleva un tiempo considerable en su proceso de construcción y formalización, por lo que es importante reconocer aspectos que permitan el fortalecimiento de las actividades didácticas.

De acuerdo a los autores mencionados, es evidente que para encontrar el sentido de los números irracionales es necesario escarbar en los contextos culturales, es mediante estos estudios que el objeto número irracional cobra un gran valor, pues mediante ellos surgen nuevas ideas que permiten desarrollar el concepto de una mejor manera y, de este modo, se evita mostrar un producto terminado.

En Colombia, se observa respecto al concepto de número irracional que se pueden implementar otras metodologías, esto de acuerdo a los DBA, lo cual hace necesario plantear reflexiones sobre la forma en la que se enseña este concepto y de seguro se obtendrán nuevas formas de abordar el concepto teniendo en cuenta el sentido que se le puede dar al número irracional.

REFERENCIAS

[1] J. Sánchez, C. Valdivé, "El Número irracional: un punto de vista epistemológico con interés didáctico". *Teorías, enfoque y aplicaciones en las ciencias sociales*. Vol. 4, pp.31-45. Diciembre 2011. Disponible en: https://revistas.uclave.org/index.php/teacs/article/view/1695

[2] MEN, *Estándares Básicos De Competencias en Matemáticas.* Bogotá, 2006. Disponible en: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

[3] MEN, *Derechos básicos de aprendizaje.* Bogotá, 2016. Disponible en: https:// http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf

[4] G. Frege, *Estudios sobre semántica.* Editorial Orbis S.A., 1984. Disponible en: https://lenguajeyconocimiento.files.wordpress.com/2012/01/frege-sobre-sentido-y-referencia.pdf

[5] U. Eco, *La estructura ausente. Introducción a la semiótica.* Editorial Lumen, 1986. Disponible en: http://www.maraserrano.com/MS/articulos/eco_estructura_ausente_OCT_11.pdf

[6] L. Vigotsky, *Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas.* Ediciones Fausto, 1995. Disponible en: https://abacoenred.com/wp-content/uploads/2015/10/Pensamiento-y-Lenguaje-Vigotsky-Lev.pdf

[7] L. Recalde, *Lecturas de historia de las matemáticas.* Santiago de Cali: Editorial Universidad del Valle, 2018.

[8] C. Boyer, *Historia de la Matemática*. Editorial Alianza: Madrid, 2003.

[9] D. Jiménez, *¿Qué carrizo era un irracional para un matemático griego antiguo?* (2004). Mimeo

[10] F. Macías, "De la impotencia a la seguridad. Los irracionales". Facultad de Ciencias Físico Matemáticas Universidad Autónoma de Puebla. Disponible en: https://skat.ihmc.us/rid=1K3MQPYQC-1N0D7J2-1H01/Mac%C3%ADas%20Romero%20biblioteca%20clase%203.pdf

AUTORES

Julián Andrés Herrera Aparicio

Investigador candidato a magíster en enseñanza de las matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira; Licenciado en matemáticas y física de la Universidad del Valle; tutor del Programa Todos a Aprender, en la ciudad de Palmira, Valle del Cauca.

Áreas de investigación: educación matemática.

Oscar Fernández Sánchez

Licenciado en Educación en la Especialidad Matemáticas, Universidad del Cauca. Magíster en Ciencias Matemáticas, Universidad de Valle, Cali. Doctor en Ciencias de la Educación, RUDECOLOMBIA-UTP, Pereira. Profesor Titular de planta del Departamento de Matemáticas en la Universidad Tecnológica de Pereira. Director del Grupo de Investigación en Pensamiento Matemático y Comunicación - GIPEMAC.

Áreas de investigación: etnomatemática, teoría cognitiva de la matemática, modelación matemática en el aula y didáctica de la matemática.