



ALGORITMOS CUÁNTICOS: BUSCADOR DE GROVER Y AUTÓMATAS FINITOS

Quantum Algorithms: Grover's Search and Finite Automata

*Franco Escudero, Emily Andrea¹, Osorio Bolaños,
María Alejandra² y Cárdenas Montoya, Paulo César³*

-
- 1 Universidad Autónoma de Chiapas.
Contacto: emily.franco48@unach.mx.
 - 2 Universidad Autónoma de Manizales.
Contacto: maria.osoriob@autonoma.edu.co.
 - 3 Universidad Autónoma de Manizales.
Contacto: pcardenasm@autonoma.edu.co.

Resumen

En este trabajo se presenta la simulación de dos algoritmos cuánticos: el buscador de Grover y Autómatas Cuánticos Finitos de múltiples mediciones (MM-QFA), para un lenguaje formado únicamente por dos letras (ab). En el documento se introducen los registros (estados cuánticos) y operaciones lógicas (operadores cuánticos) útiles para la programación. Los algoritmos fueron implementados usando diferentes herramientas de software tales como: *Qiskit*, y en el caso del algoritmo de búsqueda se usó adicionalmente el *Toolbox QuTiP* de *Python* que permite hacer el seguimiento matricial.

Palabras clave: Algoritmos Cuánticos, Algoritmo de Grover, Autómatas Cuánticos, Cúbit, *Qiskit*, *QuTiP*.

Abstract

We present the simulation of two quantum algorithms: Grover search algorithm and multiple measurement quantum finite algorithm for a two-letter language (ab). Along the document we introduce the registers (quantum states) and logical operations (quantum operators) that are useful to perform quantum code. Algorithms were implemented using different software tools such as: *qiskit* and for the case of the search algorithm we also used *QuTiP* that allows us to follow the matricial representation.

Keywords: Quantum Algorithms, Grover Algorithm, Quantum Automata, Qbit, *Qiskit*, *QuTiP*.

I. INTRODUCCIÓN

La computación cuántica es un paradigma informático, que emplea las ideas de la mecánica cuántica para realizar cálculos, predicciones o algoritmos [1]. Muchos de los éxitos que ha tenido la computación cuántica se deben a que a partir de estructuras de la computación clásica, se pueden adicionar elementos y estructuras que operan según reglas de la mecánica cuántica; tal es el caso de la transformada rápida de Fourier cuya implementación, usando algoritmos cuánticos, muestra una ventaja en el uso de tiempo computacional al compararse con el algoritmo convencional [1]. Este nuevo paradigma computacional se proyecta como una herramienta útil en la solución de problemas complejos que manejan una gran cantidad de datos como: finanzas, aprendizaje de máquina, seguridad informática, etc.

Sin embargo, manipular estados cuánticos requiere técnicas especiales de control, principalmente porque el estado cuántico se acopla fácilmente con entornos térmicos, en consecuencia, propiedades importantes como las coherencias o el entrelazamiento se pierden rápidamente. Por estas razones, los computadores cuánticos aún no tienen usos comerciales, sin embargo, *IBM* presta algunos servicios con sus propios computadores [6]. Por otro lado, una alternativa para explorar algoritmos cuánticos es usar un computador clásico de forma que en la programación del algoritmo se cumplan las reglas y la lógica de la mecánica cuántica.

En este documento, usando diferentes *Toolbox* que permiten incorporar de forma sencilla tanto registros cuánticos como compuertas cuánticas básicas, se presenta la simulación de dos algoritmos cuánticos. El primero es llamado el buscador de Grover para tres cúbits, para el cual se siguió la propuesta de implementación sugerida en [4]; el segundo replica la existencia de los autómatas cuánticos centrándonos en Autómatas finitos cuánticos de muchas mediciones por sus siglas en inglés *MM-QFA* siguiendo la propuesta de Ambainis and Freivalds [7].

II. MARCO TEÓRICO

La unidad mínima de información se conoce con el acrónimo de *bit*, el cual puede tomar solo uno de dos valores posibles: cero o uno. En computación cuántica también se puede tener esta estructura, sin embargo, la unidad mínima de información cuántica, conocida como *qubit* o *cúbit* puede ser más general, el *cúbit* se puede representar en la llamada base computacional por medio de dos estados $|0\rangle$ o $|1\rangle$ de la siguiente forma [1, 3]:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Los cuales pueden asociarse con el bit. Sin embargo, la forma más general de representar el *cúbit* es por medio de una superposición de los estados de la base computacional de la siguiente manera:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2)$$

Siendo α y β amplitudes complejas, el módulo cuadrado de las amplitudes complejas representa una probabilidad, por ejemplo, según (2) el estado se encuentra en $|0\rangle$ con probabilidad $|\alpha|^2$ de igual forma se dice que el sistema se encuentra con probabilidad $|\beta|^2$ en el estado $|1\rangle$ [3]. El estado del *cúbit* sugiere que este puede contener más información que el bit; esta superposición de estados es relevante en la definición de un registro cuántico como se verá más adelante.

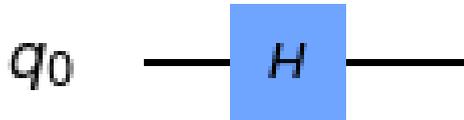
A continuación se presentan, de manera general, algunas de las compuertas cuánticas más comunes, considerando que los circuitos cuánticos son bloques funcionales que permiten implementar algoritmos cuánticos que tienen por objetivo resolver problemas de alta complejidad [5]. Estas compuertas corresponden a operadores hermíticos en el sentido cuántico, los cuales admiten representación matricial tal que para un espacio de dimensión n el tamaño de estas matrices es $2^n \times 2^n$ números

complejos; adicionalmente, para representar el estado de n cúbits se 2^n requieren números complejos.

Compuerta Hadamard

Simbolizada por una caja con la letra H , actúa sobre un cúbit de entrada en la base computacional, transformándolo a una superposición de la forma (2) con $\alpha = \beta = 1/2$.

Figura 1. Compuerta Hadamard en forma circuital.



Fuente: simulación en *Qiskit*.

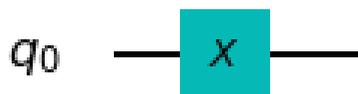
Se define matricialmente de la siguiente manera (3):

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Compuerta X

Simbolizada por una caja con la letra X (ver figura 2), actúa sobre el sistema, invirtiendo su estado, es decir, si está en $|0\rangle$ pasa a ser $|1\rangle$ y viceversa.

Figura 2. Compuerta X en forma circuital.



Fuente: simulación en *Qiskit*.

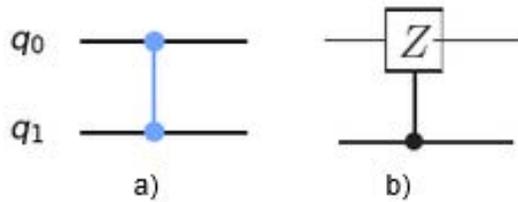
Se define matricialmente de la siguiente manera (4):

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Control Z (CZ)

Simbolizada por una caja con la letra Z o la unión de dos puntos (ver figura 3), esta compuerta actúa para dos *qubits*, se debe determinar el cúbit control y el objetivo, sobre este último actúa una suma binaria.

Figura 3. Compuerta CZ en forma circuital.



Fuente: a) Simulación en Qiskit. b) Obtenido de [1].

Se define matricialmente de la siguiente manera (5):

$$CZ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|q_0\rangle|q_1\rangle \rightarrow |q_1\rangle|q_1 \oplus q_0\rangle \quad (5)$$

Doble Control Z(CCZ)

Simbolizada por una caja con la letra Z (ver figura 4), esta compuerta actúa para tres cúbits. Se debe determinar dos cúbits de control y uno de objetivo.

Figura 4. Compuerta CCZ en forma circuital.



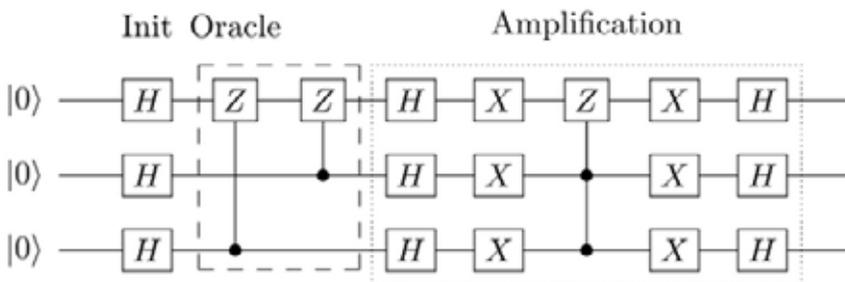
Fuente: tomado de [4].

a. Algoritmo de Grover

Supongamos que se tiene una lista de números de un tamaño determinado sin ningún conocimiento de la estructura de los datos. Se requiere encontrar un valor específico con una estructura conocida. El algoritmo clásico comienza dividiendo la lista por la mitad y contrastando los valores con la propiedad exigida hasta encontrarlo, en el mejor de los casos estaría justamente en $\frac{N}{2}$ o en el peor, recorrería todo el registro de datos. Sin embargo, usando un algoritmo de propiedades cuánticas, como es el caso del Grover, se logra resolver este mismo problema aproximadamente con \sqrt{N} pasos [2], [4].

El algoritmo de Grover se puede descomponer en tres partes (ver Figura 5):

Figura 5. Circuito cuántico del algoritmo de Grover para tres cúbits.



Fuente: ver [4].

1. Arranca en un estado inicial, consideramos aquí el caso de cúbits representado de la siguiente forma: $|000\rangle$ (se puede realizar para registros de N cúbits), este estado se transforma en un estado de superposición al pasar por las compuertas *Hadamard*, generando la misma amplitud de probabilidad para todos los estados posibles, en este caso: $\frac{1}{\sqrt{8}} = 0.35$ para cada uno de los ocho estados formados. Esto se puede visualizar en la parte *init* (inicio en español) de la figura 5.
2. En la segunda etapa se encuentra una estructura llamada *Oracle* (Oráculo en español) definido como U_ω , siendo ω el dato conocido o el patrón a buscar. Para este caso son dos números a encontrar, los cuales se definen por medio de la compuerta CZ. Esta parte tiene como objetivo encontrar los dos números agregando una fase negativa, es decir, si $x = \omega$ siendo x el número actual, entonces el estado se vuelve negativo $-|x\rangle$, en caso contrario queda el estado de x intacto, como se indica en la ecuación 6 [4].

$$U_\omega|x\rangle = \begin{cases} |x\rangle & \text{if } x \neq \omega \\ -|x\rangle & \text{if } x = \omega \end{cases} \quad (6)$$

3. Por último, pasa por la etapa de la amplificación, que aumenta la amplitud de probabilidad de los números obtenidos, como en este caso son dos soluciones, cada una tiene la mitad de probabilidad, como se muestra en la ecuación (7):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7 \rightarrow 0,7^2 = 0.5 \quad (7)$$

Nótese que este algoritmo hace uso de compuertas como la Hadamard al inicio y final, la X se repite dos veces y CCZ una sola vez.

b. Autómatas

Los autómatas finitos son reconocedores, sólo dicen “sí” o “no” en relación con una posible cadena de entrada. Existen dos tipos de autómatas finitos: deterministas y no deterministas, tanto los autómatas

finitos deterministas como los no deterministas son capaces de reconocer los mismos lenguajes, conocidos como lenguajes regulares que describen expresiones regulares [8].

Un autómata finito es una 5-tupla $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ donde:

Q es un conjunto finito de estados, Σ es un alfabeto finito, $q_0 \in Q$ es el estado inicial, δ es una función de transición y $F \subseteq Q$ corresponde a los estados finales o de aceptación.

En el comienzo del proceso de reconocimiento de una cadena de entrada, el autómata finito, se encuentra en el estado inicial q_0 y a medida que procesa cada símbolo de la cadena va cambiando de estado de acuerdo a lo determinado por la función de transición δ . Cuando se ha procesado el último de los símbolos de la cadena de entrada, el autómata se detiene en el estado final del proceso. Si el estado final en el que se detuvo es un estado de aceptación, entonces la cadena pertenece al lenguaje reconocido por el autómata; en caso contrario, la cadena no pertenece al lenguaje previamente definido.

Un autómata cuántico QA, es un modelo teórico que se compone de un espacio de estados de entrada, un alfabeto, un vector de norma, uno como estado inicial, un subespacio de aceptación, un operador de aceptación, así como una matriz (unitaria) de transición por cada símbolo del alfabeto. En este contexto se define el lenguaje cuántico, el cual es una función que recibe como parámetro una palabra y devuelve una probabilidad entre 0 y 1; si tal probabilidad es mayor a $1/2$ entonces se acepta, en caso contrario se rechaza [9].

Un Autómata finito cuántico de medición múltiple (MM-QFA) es una 6-tupla $A = (Q, \Sigma, q_I, Q_{acc}, Q_{rej}, \{U_\sigma\}_{\sigma \in \Gamma})$, donde: $Q_{rej} \subseteq Q$ son estados de rechazo, Q_{acc} son estados de aceptación, Q_{non} son estados neutrales y U_σ son las matrices de transición [10]. Los estados de rechazo o aceptación se construyen a partir de operadores proyectivos.

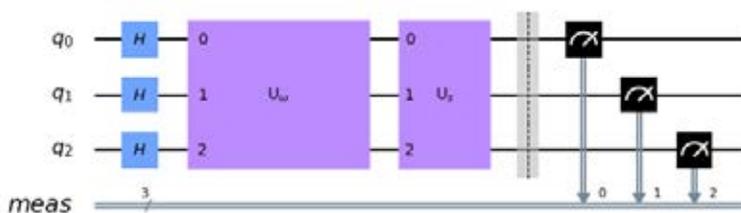
III. RESULTADOS

IIIa. Algoritmo de Grover para tres cúbits

Se simuló el algoritmo de búsqueda de Grover para tres *qubits* usando dos herramientas (*software*), la primera es *Qiskit*, un kit de desarrollo de software (SDK) de IBM [6], que se obtuvo en el circuito cuántico como se puede ver en la figura 6. En el segundo caso se empleó el *Tolboox QuTiP* del lenguaje de programación en *Python* [11], en el que se obtuvo la solución matricial como se puede ver en la figura 9.

Los dos estados marcados son $|101\rangle$ y $|110\rangle$, definidos en la compuerta *Oracle*. Después de pasar por las compuertas Hadamard, el estado actual está en un estado de superposición. El *Oracle* U_ω agrega una fase negativa a los estados marcados, $-|101\rangle$ y $-|110\rangle$. La última compuerta U_s , tiene como objetivo amplificar la amplitud de probabilidad de los dos estados marcados. Por último, se realiza la medida.

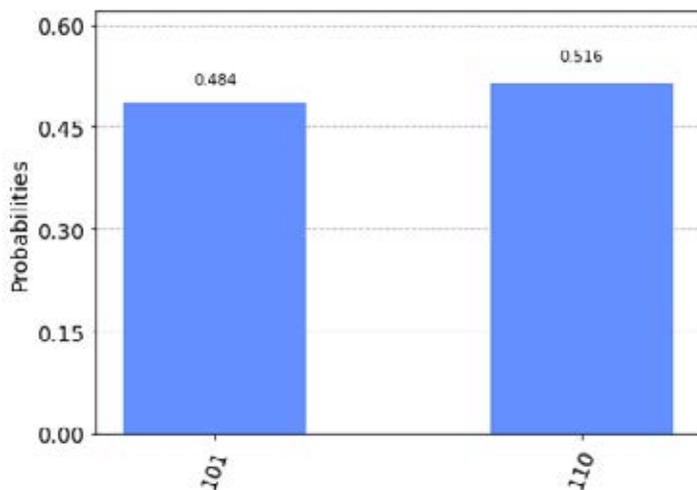
Figura 6. Circuito cuántico del algoritmo de Grover.



Fuente: simulación en *Qiskit*.

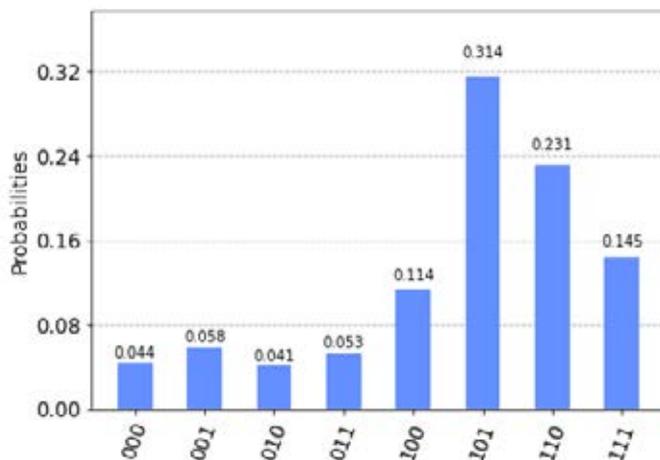
Como resultado, se obtuvieron dos histogramas que muestran la probabilidad de los dos estados marcados en comparación con los demás. El de la figura 7 es dado localmente por el software *Qiskit* y se puede observar que tiene casi la misma probabilidad, en comparación con el de la figura 8, simulado desde el computador de *IBM*, posee un mayor valor de probabilidad en el estado $|101\rangle$ que el de $|110\rangle$, los demás resultados son errores de cálculos cuánticos [4].

Figura 7. Histograma del resultado final del algoritmo de Grover.



Fuente: simulación en Qiskit.

Figura 8. Histograma del resultado final del algoritmo de Grover, simulado en un dispositivo de IBM.



Fuente: simulación en Qiskit.

En *QuTiP* se realiza el mismo algoritmo empleando las mismas compuertas, obteniendo como resultado su forma matricial en cada etapa, como se puede observar en la figura 9.

Como se está empleando tres cúbits, las matrices de las compuertas y los estados posee un tamaño de 2^3 , es decir, de 8×8 y 8×1 .

Figura 9. a) Estados marcados. b) Los estados al pasar en cada etapa, b.1) Estado inicial , b.2) Estado en Superposición, b.3) Estado después del Oracle , b.4) Estado después del amplificador y resultado final.

$$\begin{array}{c}
 |101\rangle = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad |110\rangle = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \\
 \text{a)} \\
 \begin{array}{cccc}
 \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.354 \\ 0.354 \\ 0.354 \\ 0.354 \\ 0.354 \\ 0.354 \\ 0.354 \\ 0.354 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.354 \\ 0.354 \\ 0.354 \\ 0.354 \\ -0.354 \\ -0.354 \\ 0.354 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -0.707 \\ -0.707 \\ 0.0 \end{pmatrix} \\
 \text{b.1)} & \text{b.2)} & \text{b.3)} & \text{b.4)}
 \end{array}
 \end{array}$$

Fuente: simulación en *QuTiP*.

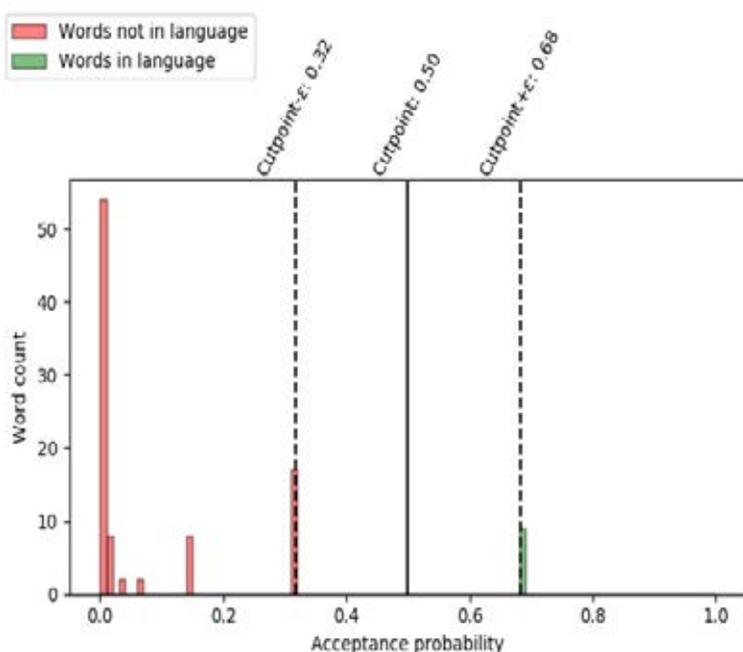
III b. Autómata Finitos

Se simuló un MM-QFA. Este autómata fue propuesto por Ambainis y Freivalds [7] como parte de la prueba de que existe un QFA unidireccional, que reconoce lenguaje $a|b$ con probabilidad $p=0.68$, donde p es la raíz real de la ecuación:

$$p^3 + p = 1 \tag{8}$$

El autómata se escribió utilizando el lenguaje de programación *Python* [11], para el código se utilizaron las siguientes librerías: *Language Generator*, *Language Checker* y *Plotter* [12].

Figura 10. Histograma resultado del análisis del autómata (MM-QFA).



Fuente: simulación en *Jupyter notebook* [15] utilizando las librerías [12].

Se ingresaron un total de 60 palabras, en la figura 10 se observa un histograma donde se muestra la probabilidad de aceptación de la palabra analizada por el autómata, recordando que la probabilidad debe ser mayor a $\frac{1}{2}$ para ser aceptada por el autómata, las palabras aceptadas terminaron en *ab* ya que esta era nuestra condición del lenguaje, como por ejemplo *aaab*, *abab*, etc.

IV. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se logró implementar diferentes algoritmos cuánticos usando el Toolbox *Qiskit* y *QuTiP*, se verificó que para el caso de pocos cúbits, el algoritmo de Grover reproduce lo que se espera ya que para tres cúbits se

encontró en una iteración las dos soluciones de las 8 posibilidades. No obstante, se buscará construir el algoritmo con un registro de más de tres cúbits. Además, se logra contrastar los dos resultados entregados por los dos softwares, verificando coherencia entre la forma del circuito usando *qiskit* y matricial usando *QuTiP*.

Para el caso de los autómatas finitos, se logró definir un código para simular un autómata finito cuántico de múltiples mediciones (MM-QFA), se quiere aumentar el tamaño del lenguaje a más de dos letras.

REFERENCIAS

- [1] A. Nielsen y L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, United States: Cambridge University Press, 2010.
- [2] D. Candela, “Undergraduate computational physics projects on quantum computing”, *American Journal of Physics*, vol. 83, no. 8, pp. 688-702, 2015. [En Línea]. Disponible en: <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.4922296>
- [3] B. Schumacher y M. Westmoreland, *Quantum Processes, Systems, and Information*, United States: Cambridge University Press, 2010.
- [4] “Grover’s Algorithm”, Qiskit, [En Línea]. Disponible en: <https://qiskit.org/textbook/ch-algorithms/grover.html#>
- [5] E. Duarte y V. Medina, “Emulación en hardware de circuitos cuánticos basados en compuertas Toffoli”, *Fac. Ing. Univ. Antioquia*, no. 71, pp. 25-36, 2014 [En Línea]. Disponible en: http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S0120-62302014000200004&script=sci_abstract&tlng=es
- [6] Qiskit, [En Línea]. Disponible en: <https://qiskit.org/metal>

- [7] Ambainis, A., Freivalds, R.: 1-way quantum nite automata: Strengths, weaknesses and generalizations. In: 39th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS'98. pp. 332{341 (1998). <https://doi.org/10.1109/SFCS.1998.743469>
- [8] Aho, A., Lam, M., Sethi, R. y Ullman, J. (2 008). *Compiladores principios, técnicas y herramientas* (2ª ed.). Pearson Educación.
- [9] Cristopher Moore and James P. Crutchfield. Quantum automata and quantum grammars. *Theor. Comput. Sci.*, 237(1):275–306, apr. 2000.
- [10] Kondacs, A., Watrous, J.: On the power of quantum nite state automata. In: 38th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS'97, Miami Beach, Florida, USA, October 19-22, 1997. pp. 66{75. IEEE Computer Society (1997)
- [11] Qutip, 2013, [En Línea]. Disponible en: <https://qutip.org/>
- [12] Lippa G., Makiela K., Kuta M. (2020) Simulations of Quantum Finite Automata. En: Krzhizhanovskaya V. et al. (eds) Computational Science – ICCS 2020. ICCS 2020. Lecture Notes in Computer Science, vol 12142. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-50433-5_34
- [13] Andris Ambainis and Rusins Freivalds. 1-way quantum nite automata: strengths, weaknesses and generalizations. In FOCS'98, pages 332{341, 1998. (<http://arxiv.org/abs/quant-ph/9802062>).
- [14] Qiu, D., Li, L., Mateus, P., Gruska, J.: Quantum nite automata. In: Wang, J. (ed.) *Handbook of Finite State Based Models and Applications*, pp. 113{144 (2012).
- [15] /jupyter notebook, 2014, [En Línea]. Disponible en: <https://jupyter.org/>

AUTORES

Emily Andrea Franco Escudero

Es estudiante de pregrado de quinto semestre de Licenciatura en física y sexto semestre de Ingeniería en desarrollo y tecnologías de software, de la Universidad Autónoma de Chiapas en México.

Áreas de investigación: astropartículas, enseñanza de la física.

María Alejandra Osorio Bolaños

Estudiante de pregrado de noveno semestre de Ingeniería Electrónica y de quinto semestre de Ingeniería de Sistemas, de la Universidad Autónoma de Manizales.

Áreas de investigación: computación cuántica.

Paulo César Cárdenas Montoya

Profesor Vocacional Docente de la Universidad Haaga-Helia de Finlandia, Doctor en Física de la Universidade Federal do ABC de Brasil, Magíster en Física de la Universidad de Antioquia e Ingeniero Físico de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales. Actualmente se desempeña como Coordinador del Departamento de Física y Matemáticas de la Universidad Autónoma de Manizales, profesor en el mismo departamento e Investigador.

Áreas de investigación: enseñanza de la Física en cualquier nivel de formación. Física General, Mecánica Cuántica de Sistemas abiertos, Información cuántica y Termodinámica Cuántica.



APRENDIZAJE BASADO EN
PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA
DE CONCEPTOS FÍSICOS:
TRABAJO Y ENERGÍA¹

Problem-based learning
for teaching physical concepts:
work and energy

Vásquez, John Alexander², Jiménez, Francly Nelly³

1 Proyecto de maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales: Aprendizaje basado en problemas para la enseñanza de conceptos físicos: trabajo y energía. Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales

2 Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, 0000-0002-9505-8832.
Contacto: javasquezn@unal.edu.co.

3 Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, Universidad Autónoma de Manizales, 0000-0003-1546-8426. Contacto: fnjimenezg@unal.edu.co.

Resumen

En este trabajo se implementó la estrategia ABP utilizando la metodología PREST para la enseñanza de la física, en los temas de trabajo y energía con estudiantes de grado undécimo de la jornada de la tarde del Instituto Universitario de Caldas. Para el desarrollo de la estrategia se utilizaron dos grupos experimentales (GE1 y GE2) y dos grupos controles (GC1 y GC2) cuya selección se realizó de forma aleatoria. Se diseñaron dos problemas: el primero con la finalidad de abordar las temáticas de trabajo y potencia; y el segundo para involucrar conceptos de energía mecánica y su conservación. Se aplicó un cuestionario de entrada que permitió la identificación de los obstáculos de aprendizaje de los estudiantes, y uno de salida mediante el cual fue posible determinar la evolución conceptual y las diferencias entre cada grupo. Se observó que los grupos GC1 y GC2 tuvieron estadísticamente comportamientos similares en las respuestas, tanto a la entrada como a la salida; mientras los grupos GE1 y GE2 presentaron diferencias significativas a la salida. Los análisis permitieron evidenciar que uno de los GE mostró mejores resultados en la parte del tema que se desarrolló en presencialidad, mientras en la que se llevó a cabo en forma remota, debido a la pandemia por Covid-19, mostró iguales resultados al GC.

Palabras clave: ABP, enseñanza, PREST, trabajo y energía.

Abstract

In this work, the PBL strategy was implemented using the PREST methodology for the teaching of physics, in the topics of work and energy with eleventh grade students of the afternoon session of the Instituto Universitario de Caldas. Two experimental groups (GE1 and GE2) and two control groups (GC1 and GC2) were randomly selected for the development of the strategy. Two problems were designed: the first was designed to address the topics of work and power; and the second to involve concepts of mechanical energy and its conservation. An input questionnaire was applied to identify the students' learning obstacles, and an output questionnaire was used to determine the conceptual evolution



and differences between each group. It was observed that groups GC1 and GC2 had statistically similar behaviors in the responses both at entry and exit, while groups GE1 and GE2 presented significant differences at exit. The analyses showed that one of the GEs showed better results in the part of the subject that was carried out in person, while in the part that was carried out remotely, due to the Covid-19 pandemic, showed the same results as the GC.

Keywords: ABP, teaching, PREST, work and energy.

I. INTRODUCCIÓN

En la actualidad la educación necesita cambios que permitan al individuo ocupar un papel dentro de la sociedad. Por tal motivo, es importante desarrollar competencias en los estudiantes que les permita la resolución de problemas contextualizados en los cuales se empleen los conceptos científicos.

Colombia en las pruebas PISA 2018 ocupó el puesto 58 de 78 países que participaron en las pruebas realizadas por la OCDE. Los resultados muestran un alto índice de estudiantes con bajo desempeño en las competencias evaluadas, las cuales se enfocan en la resolución de problemas. Es por tanto necesario diseñar nuevas metodologías que permitan a los estudiantes desarrollar competencias que les posibilite usarlas en la dinámica de la sociedad.

En este proyecto se indaga sobre el impacto del aprendizaje basado en problemas (ABP) mediante el empleo de la metodología del PREST (Programa para la enseñanza de la ciencia y la tecnología) como una técnica didáctica para la enseñanza de la física, particularmente de los conceptos físicos de trabajo y energía, en estudiantes de grado 11 del Instituto Universitario de Caldas (IUC).

II. METODOLOGÍA

Esta investigación se realizó con estudiantes de grado once de la jornada de la tarde (sección II) del Instituto Universitario de Caldas (IUC) durante el 2020, la cual contaba con 5 grupos en este grado. Dos grupos se fusionan para las materias básicas y se dividen para las profundizaciones. Por ende, para la investigación se emplearon los 4 grupos de la jornada de la tarde y se seleccionaron al azar dos grupos para que hicieran parte del grupo control (GC1 con 24 y GC2 con 38 estudiantes) y otros dos grupos para que hicieran parte del grupo experimental (GE1 con 33 y GE2 con 25 estudiantes).

Fases de la investigación

Se llevaron a cabo tres fases o etapas para el desarrollo de la investigación:

Fase 1: construcción de los problemas

Para la construcción de los problemas se revisó el currículo del plan de estudios de grado once de la asignatura de física, en particular los subtemas de trabajo y energía, con el fin de establecer los conceptos al nivel de la media vocacional que se debían abordar. Los problemas tuvieron características como la contextualización y transversalización para abordar otras áreas del conocimiento, se estructuraron de forma tal que las posibles soluciones fueran variadas para cada estudiante o grupo de estudio.

El primer problema se trabajó de manera grupal, y abordó los conceptos de trabajo y potencia. Para la construcción de la situación problema se optó por el funcionamiento de un cable aéreo [1], ya que la ciudad de Manizales cuenta con uno. Cada grupo debía presentar la solución para argumentar por qué no se podían subir 10 personas a las góndolas de dicho transporte y tener en cuenta que ellos podían elegir qué compañeros del grupo podía acompañarlos en el viaje.

El Segundo problema se construyó para realizar un trabajo individual, en el cual se relacionaron los conceptos de energía mecánica y su transformación con las características de las atracciones mecánicas del Parque del Café. Para la solución debían tener en cuenta las masas de las personas de la familia con las que iban a abordar los juegos y la cantidad de veces que iban a montar en cada atracción, con el fin de encontrar variabilidad en la resolución del problema.

Fase 2: desarrollo de la metodología PREST

La metodología PREST es una herramienta útil que se empleó para la resolución de los problemas estructurados. Dicho método ubica al estudiante como protagonista de su propio aprendizaje, a través de un problema que implica la estructuración de conceptos. Los pasos seguidos en el aula fueron:

- Aplicación del cuestionario de entrada.
- Presentación de los problemas con su respectiva explicación. Se identificaron los elementos conocidos, elementos desconocidos y temáticas de la física que era necesario abordar para resolverlos.
- Desarrollo de los centros de aprendizaje: consiste en el desarrollo de los temas (dinámica y estática, trabajo, potencia y energía), las actividades de ejercitación y las prácticas de laboratorio diseñadas para lograr el aprendizaje y aportar elementos para la solución del problema.
- Memoria colectiva: es el momento de cierre en el cual los grupos identificaban, con ayuda del esquema inicial, que parte del problema ya se podía solucionar.
- Solución de los problemas: esta solución se dio en tres momentos. En el momento 1, cada estudiante realizó un primer intento para la solución del problema. En el momento 2, se desarrolló la marcha silenciosa en la cual cada estudiante pudo caminar por el aula y mirar el trabajo que estaban desarrollando sus compañeros sin hacer ningún comentario. En el momento 3, los estudiantes realizaron un último intento para dar solución al problema. Al final, se discutieron las soluciones dadas a los problemas y los inconvenientes que se presentaron en el proceso.
- Aplicación del cuestionario de salida: el cual estuvo conformado por 20 preguntas. Las primeras 10 fueron las mismas preguntas del cuestionario de entrada y los restantes fueron ejercicios en los cuales los estudiantes aplicaron los conceptos de trabajo, potencia y energía.

También se aplicó un cuestionario con escala tipo Likert, el cual estuvo conformado por 8 preguntas, para conocer la apreciación de los estudiantes frente a esta metodología.

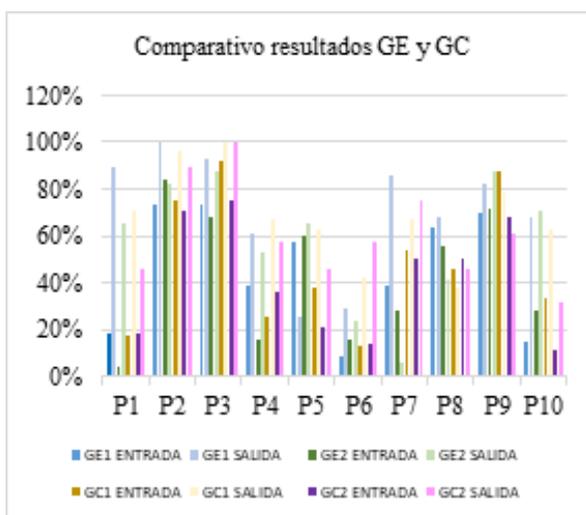
Fase 3: evaluación del Impacto

Se analizaron los datos obtenidos de la aplicación del cuestionario, tanto a la entrada como a la salida, considerando análisis cualitativos y cuantitativos. En el cuestionario de entrada se identificaron los obstáculos de aprendizaje a partir de las ideas previas de los estudiantes. Mediante la prueba estadística Shapiro-Wilk se determinó la normalidad en la distribución de los resultados numéricos de las pruebas y con una prueba del T-test se estudiaron las diferencias entre los grupos.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Test de Entrada: en esta sección analizamos los resultados del cuestionario de entrada, el cual se dividió en 3 categorías de acuerdo con los conceptos que fueron estudiados. La primera categoría corresponde a las preguntas P1, P2, P3 y P4, las cuales abordan los conceptos de trabajo y potencia. La segunda categoría está conformada por las preguntas P5, P6 y P8, y corresponden al concepto de energía. Por último, la tercera categoría corresponde a las preguntas P7, P9 y P10, y describen las ideas previas de conservación y transformación de la energía. En la figura 1 se presentan los resultados obtenidos antes y después de la aplicación del test.

Figura 1. Comparativo de los resultados entre los grupos control y experimental.



Fuente: Los autores

Se identificaron algunos obstáculos de aprendizaje para abordar estas temáticas, los cuales se listan a continuación:

- Asocian el trabajo y la energía de los seres vivos, característica identificada por Domenech (2001) en su artículo sobre la enseñanza de la energía en secundaria [2].
- Confunden el concepto de trabajo científico con el de trabajo cotidiano.
- Los estudiantes reconocen la existencia de la energía, pero no la asocian con el concepto de trabajo.
- No reconocen la transformación de la energía, más bien consideran que esta puede aumentar o perderse sin razón aparente. Esta misma situación es identificada en otras investigaciones sobre conservación de la energía [3].
- Asocian la potencia con la intensidad o fuerza, hecho que ha sido reportado en otros trabajos [4].
- Los estudiantes asocian el concepto de trabajo tan solo a la aplicación de una fuerza, mas no al desplazamiento del cuerpo.

Test de salida: para entender estos resultados es necesario aclarar que la segunda parte de la implementación se realizó en la virtualidad debido a la pandemia.

Se observa que el GE2 presenta los desempeños más bajos, lo cual puede deberse a que este grupo, en términos generales, presenta deficiencias en sus procesos lógico-matemáticos, tienen poca dedicación en las actividades académicas y asumen con menos seriedad y compromiso las actividades propuestas por los docentes. De otra parte, en la mayoría de las respuestas del grupo GE1 se muestra una mayor evolución respecto a ambos grupos control. También es importante mencionar que se presenta mayor evolución de los grupos experimentales en las preguntas de la categoría trabajo y potencia que en las relacionadas con energía y conservación, consecuencia del desarrollo de este centro de aprendizaje de forma virtual debido a la pandemia.

Se realizaron pruebas de normalidad en la distribución de los datos y la prueba estadística T-Test para comparar los grupos.

Mediante una prueba de Shapiro Wilk se encontró que las respuestas de todos los grupos, tanto a la entrada como a la salida, siguen una distribución normal con un nivel de significancia *alpha* de 0.05. Si bien no puede asegurarse que los grupos son independientes debido a la no posibilidad de aleatoriedad en los integrantes, se considera que los estudiantes no tuvieron interacción entre ellos y se toman como si fueran muestras independientes para aplicar el T-Test. A continuación, se aplicó la prueba estadística T-Test que puede usarse para grupos independientes, con distribución de datos normal, con el fin de establecer comparaciones entre las respuestas dadas por los grupos tanto a la entrada como a la salida.

A continuación, se mencionan los aspectos más importantes de esta comparación, los cuáles se sustentan en los p-valor que se indican en la **tabla 1**.

Tabla 1. Indicadores Prueba T-test.

Grupos	Entrada (p-valor)	Salida (p-valor)
GC1 vs GC2	1,0	0,74
GE1 vs GE2	0,22	0,018
GE1* vs GC2	0,82	0,69

Fuente: Los autores

-Comparación entre GC1 y GC2: mediante la prueba del T-Test los grupos GC1 y GC2 son iguales tanto a la entrada como a la salida, como lo corroboran los p-valor que se muestran en la **tabla 1**. No se observan diferencias significativas entre ambos grupos.

- Comparación entrada GE1 y GE2 a la entrada: se encuentra que a la entrada los grupos son iguales, sin embargo, el p-valor en este caso es más pequeño, lo cual implica que, aunque hay similitud entre los grupos, GE1 presenta mejores resultados respecto al GE2.
- Comparación salida GE1 y GE2 a la salida: la prueba indica que los grupos experimentales son diferentes a la salida con un p-valor pequeño, es decir, el impacto de la metodología es diferente en ambos grupos experimentales. Este resultado valida lo observado durante la aplicación de la metodología, donde el GE2 presenta dificultades conceptuales y en sus procesos lógico-matemáticos y la mayoría de los estudiantes no son disciplinados en su proceso académico y les cuesta asumir con responsabilidad las actividades propuestas por los docentes.

Ya que el cuestionario de salida fue aplicado en plataforma virtual, y que algunos estudiantes de los grupos experimentales (GE1: 15 %, GE2: 32 %) no pudieron contestar el cuestionario debido a la falta de conectividad, se decide tomar un GE1* que incluyera solo los estudiantes que participaron en toda la estrategia y contestaron la prueba tanto a la entrada como a la salida, es decir, 28 estudiantes. El propósito de tomar este grupo es el de poder compararlo estadísticamente con el GC2, debido a que este último tiene la misma cantidad de estudiantes.

Como complemento, el test de salida contenía no solo las preguntas del test de entrada que se analizaron en la sección anterior, sino 10 preguntas más de las cuales 2 hacían referencia al concepto de energía cinética y otras 8 estaban relacionadas con ejercicios numéricos sobre los conceptos estudiados. Se encontró que se presenta mayor evolución en 6 preguntas, lo que al parecer confirma que la resolución de problemas que involucran el modelo matemático del fenómeno muestra mejores resultados en el grupo en el cual se aplicó la metodología PREST. Los estudiantes a los que se les aplicó la metodología ABP mejoraron la capacidad para resolver problemas numéricos como lo afirma una investigación relacionada con la capacidad de resolución de problemas de una enseñanza-aprendizaje de la física con una estructura problematizada [5].

Finalmente, se realizó una comparación estadística entre los grupos GE1* y GC2, en la que se incluyeron todas las respuestas a las preguntas del cuestionario de salida. Se encontró que, primero, las respuestas de ambos grupos siguen una distribución normal; segundo, la aplicación del T-Test arroja que no hay diferencias significativas entre ambos grupos.

Aunque se esperarían diferencias estadísticas significativas entre ambos grupos para corroborar que la estrategia influye de manera positiva, debe anotarse que se presentaron inconvenientes en el transcurso de la implementación de la metodología, especialmente debido a la virtualidad que fue necesario adoptar a mitad del proceso. Es de anotar que Loyens menciona que los estudiantes expuestos a la estrategia ABP mostraron cambios conceptuales significativos respecto a los demás grupos participantes en su investigación [6].

Finalmente, de la aplicación del test de apreciación con escala Likert se encontró que el 90 % estuvo de acuerdo en que la estrategia fue motivadora y les gustaría usarla en otros temas de física. La percepción de los estudiantes referente a si los problemas propuestos les permitieron relacionarlos con otras áreas y si desarrollaron otras habilidades en la solución de problemas fue del 90 % para cada una. También los estudiantes de los grupos experimentales estuvieron de acuerdo con que la metodología y las actividades propuestas les ayudaron a mejorar el desempeño con un 75 %. Y, por último, un 71 % estuvo de acuerdo con el tiempo asignado para las actividades propuestas de la estrategia ABP.

IV. CONCLUSIONES

Se estructuraron problemas en contexto que involucraron conceptos de trabajo y energía. Las características que predominaron en el diseño de los problemas del cable aéreo y el Parque del Café fueron la complejidad en la solución, la variabilidad en los datos para cada grupo, la transversalización con otras áreas del conocimiento y la contextualización a situaciones cercanas a la realidad que fueran observables.

En algunas sesiones se pudo observar la falta de compromiso de algunos estudiantes para desarrollar las actividades propuestas, especialmente del grupo GE2. También se evidenció resistencia a la estrategia implementada, debido a que esta implica un trabajo autónomo por parte del estudiante, es decir, la escuela tradicional no está adaptada a este tipo de metodologías. El desarrollo de la metodología para el segundo problema (Parque del Café) se implementó bajo la virtualidad, se pudo evidenciar de forma más acentuada la resistencia al trabajo autónomo y al cambio de la metodología.

La metodología del ABP reflejó evolución en las ideas previas que venían manejando los estudiantes y se presentaron mejores resultados y argumentos mucho más claros en el primer problema que se estudió de forma presencial.

En los análisis estadísticos se encontró que no hay diferencias significativas entre los grupos a la entrada, lo cual establece un punto igual de partida para todos. A la salida, se observaron diferencias entre los grupos experimentales, lo cual corrobora lo que el docente detectó durante el proceso respecto a este grupo. Se encontró, además, que no hay diferencias significativas entre el grupo control y el experimental a la salida, debido posiblemente al cambio abrupto a la virtualidad durante el proceso.

REFERENCIAS

- [1] A. F. M. Vargas, “Diseño y construcción de un sistema de transporte de carga por medio de cables para topografía de gran pendiente,” *Journal of Controlled Release*, vol. 156, pp. 315-322, 2011.
- [2] Doménech, “La enseñanza de la energía en la educación secundaria. un análisis crítico,” *Revista Enseñanza de la Física*, vol 14, no 1. pp. 45–60. 2001.
- [3] T. Solbes, “Algunas dificultades en torno a la conservación de la energía,” *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, vol. 16, no. 3, pp. 387-398, 1998.

- [4] Doménech, “4E La Enseñanza De La Energía,” *Analysis*, pp. 285-311, 2003.
- [5] Becerra, Gras, and Martínez, “Efectos sobre la capacidad de resolución de problemas de ‘lápiz y papel’ de una enseñanza-aprendizaje de la física con una estructura problematizada,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 32, no. 2, pp. 1-11, 2010, doi: 10.1590/s1806-11172010000200010.
- [6] S. M. M. Loyens, “Problem-based learning as a facilitator of conceptual change,” *Learning and Instruction*, vol. 38, pp. 34-42, 2015, doi: 10.1016/j.learninstruc.2015.03.002.

AUTORES

John Alexander Vásquez Naranjo

Matemático, magíster en enseñanza de las ciencias exactas y naturales. Docente titular de la Institución Educativa San Jorge adscrita a la Secretaría de Educación Municipal de Manizales.

Áreas de investigación: didáctica de las ciencias exactas y naturales.

Francy Nelly Jiménez García

Ingeniera Química, especialista en computación para docencia, especialista en educación vocacional, magíster en ciencias física y doctora en ingeniería. Docente titular de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales y de la Universidad Autónoma de Manizales; Coordinadora Doctorado en Ingeniería de la Universidad Autónoma de Manizales.

Áreas de investigación: didáctica de las ciencias exactas y naturales, energías renovables, obtención y caracterización de materiales.



EL PENSAMIENTO FÍSICO-
MATEMÁTICO Y LA RESOLUCIÓN
DE PROBLEMAS EN EL ESTUDIO
DE FENÓMENOS DE LA
MECÁNICA CLÁSICA¹

Physical mathematical thinking and problem
solving in the study of classical mechanics
phenomena

Díaz, Carlos² y Figueroa, Jaider³

-
- 1 Producto derivado del Trabajo Final de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales.
 - 2 Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales – Grupo de Investigación EDUCEN; 0000-0003-4210-7271. Contacto: cfdiaz@unal.edu.co.
 - 3 Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales – Grupo de Investigación EDUCEN; 0000-0002-7408-6017. Contacto: jafigueroaf@unal.edu.co.

Resumen

En el presente trabajo se busca potenciar los procesos asociados al pensamiento físico-matemático en estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Municipal Nacional de Pitalito, Huila. Para tal fin, se implementa el enfoque de formulación y resolución de problemas en el contexto de la mecánica clásica. La investigación se enmarca en el paradigma cualitativo y es de carácter descriptivo. La secuencia didáctica propuesta se compone de actividades de experimentación, resolución y formulación de problemas. Los instrumentos metodológicos usados se dividen en cuatro fases: prueba diagnóstica, módulo de caída libre, módulo de lanzamiento vertical y prueba final. Los resultados presentan la descripción del desempeño mostrado por los estudiantes en cada uno de los procesos, de estos se pueden destacar en primer lugar el avance en la identificación de variables, la formulación de hipótesis y algunos diseños experimentales. En segundo lugar, se logra fortalecer la descripción del comportamiento de las variables en varios registros semióticos, especialmente en el cartesiano y verbal. Y en tercer lugar, los estudiantes logran clasificar y explicar los movimientos verticales a partir del comportamiento de las variables.

Palabras clave: experimentación, formulación de problemas, pensamiento físico matemático, pensamiento variacional, resolución de problemas.

Abstract

The purpose of this work is to develop the processes associated to physical mathematical thinking in tenth year students of Institución Educativa Municipal Nacional from Pitalito, Huila. To this end, the problem posing and problem solving approach is implemented in the classical mechanics context. The research belongs to the qualitative paradigm and it is descriptive in nature. The proposed didactic sequence is composed by activities of experimentation, problem solving and problem posing. The methodological instruments are divided in four phases: diagnostic test, free fall module, vertical throw module and final test. The results present the description of student performance in every process, whereby can be



highlighted in first place the improvement in the variables recognition, the hypothesis formulation and some experimental designs. In the second place, the description of variables behavior by several registers of semiotic representations have been built up, especially the Cartesian and verbal registers. In the third place, the students manage to classify and explain the vertical motions based on concepts and the variables behavior.

Keywords: experimentation, problem posing, physical mathematical thinking, variational thinking, problem solving.

I. INTRODUCCIÓN

La formación en ciencias naturales es el espacio en que los estudiantes proponen explicaciones de los fenómenos naturales, partiendo de unas concepciones alternativas y apropiándose de metodologías que les permitan construir el conocimiento [1]. No obstante, el proceso de enseñanza aprendizaje de la física en el grado décimo de la Institución Educativa Municipal Nacional de Pitalito Huila dista, en ciertos aspectos, de esta concepción y, por tanto, los estudiantes perciben la asignatura como la transmisión de conceptos y ecuaciones sin relación aparente. Entre esos aspectos se pueden destacar tres: en primer lugar la programación a partir de temas aparentemente aislados. En segundo lugar el rol de herramienta dado a las matemáticas [2], pues se usan como un conjunto de ejercicios algorítmicos que los estudiantes deben mecanizar. Y en tercer lugar, la experimentación no es una actividad frecuente debido a la poca importancia que se le atribuye.

A partir de la situación expuesta, este trabajo se orienta hacia el desarrollo de habilidades de pensamiento que le permitan al estudiante construir sus propias explicaciones de los fenómenos físicos presentes en su entorno. Entre estas habilidades se resaltan comparar, describir, analizar, sintetizar, abstraer, modelar, entre otras; las cuales se enmarcan en lo que se ha denominado como pensamiento físico-matemático [3]. Este pensamiento se fundamenta en la relación entre física y matemática, presente en la construcción de los conceptos científicos donde se hacen abstracciones de ciertas propiedades de la naturaleza y son descritas desde un lenguaje matemático [4]. Entendiendo este último como el uso de múltiples registros de representación (verbal, algebraica, gráfica, tabular y fenomenológica) [2].

A nivel de la educación media, las habilidades que se han considerado necesarias para explicar los fenómenos de la mecánica clásica desde un lenguaje matemático, se han delimitado dentro de tres grandes procesos asociados al pensamiento físico-matemático, en los cuales se han especificado un conjunto de subprocesos que detallan las tareas que un

estudiante debería realizar para que se evidencie el desarrollo en cada proceso. Es importante resaltar que estos procesos y subprocesos guardan total coherencia con los Lineamientos Curriculares de Ciencias Naturales y Educación Ambiental [5], los Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Naturales [1], los Derechos Básicos de Aprendizaje en Ciencias Naturales [6] y las tres competencias de Ciencias Naturales establecidas por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [7].

El objetivo de este trabajo es potenciar el desarrollo de procesos asociados al pensamiento físico-matemático en los estudiantes del grado décimo a partir del enfoque de la resolución de problemas en el contexto de la mecánica clásica. Para tal fin, se propone la implementación de una secuencia didáctica basada en problemas. La concepción de problema que fundamenta el diseño de las actividades es el de una situación que hace evidente la ausencia de conocimiento [8], exigiéndole al estudiante un esfuerzo mental en el que debe proponer algo nuevo y modificar sus concepciones sobre la naturaleza [9].

El fenómeno físico a estudiar es la caída libre, donde los estudiantes desarrollan actividades que les permita explorar las particularidades de este movimiento y transversalmente desarrollar los procesos asociados al pensamiento físico matemático. Por tanto, el impacto de la metodología propuesta se analiza desde los avances mostrados en cada uno de los procesos, donde se describe el desempeño de los estudiantes a lo largo de las diferentes fases de la intervención.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

2.1. Metodología

El presente trabajo de investigación tiene una metodología cualitativa de tipo descriptiva, donde se pretende hacer una exploración entre las diferentes formas en que los estudiantes manifiestan el desarrollo del pensamiento físico-matemático y describir los avances logrados a lo largo de la intervención.

La población se compone de 71 estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Municipal Nacional de Pitalito, Huila.

2.1.1. Secuencia didáctica

La secuencia didáctica propuesta se orienta hacia el desarrollo del pensamiento físico-matemático. Cada una de las actividades se ha diseñado tomando como base los problemas, generando así tres tipos de actividades: la primera es la experimentación a partir de una situación problema, donde los estudiantes formulan sus hipótesis y usan el laboratorio para verificarlas [1]. La segunda es la resolución de problemas, la cual requiere el uso de conceptos y diferentes representaciones semióticas para llegar a una solución [2]. Y la tercera es la formulación de problemas, donde el estudiante plantea problemas a partir de ciertas situaciones [10].

Fase 1: prueba diagnóstica

En esta primera fase, se busca determinar el nivel de desarrollo de los procesos asociados al pensamiento físico-matemático, previo a la intervención. Consiste en una prueba escrita, donde cada pregunta puede ser transversal a uno o varios procesos. El fenómeno físico a analizar es el movimiento rectilíneo, el cual corresponde a los contenidos vistos en las clases anteriores.

Fase 2: módulo de caída libre

En esta fase se pretende familiarizar al estudiante con el fenómeno del movimiento vertical. Se compone de dos actividades grupales, la primera consiste en la formulación de hipótesis y diseño de un experimento para comprobarla. En la segunda actividad los estudiantes reciben una representación numérico-variacional del fenómeno y deben realizar la representación cartesiana. Tras cada actividad se realiza una sesión de socialización.

Fase 3: módulo de lanzamiento vertical

En esta fase se realizan tres actividades orientadas a profundizar el análisis del movimiento vertical. La primera es experimental y se desarrolla en forma similar a la mostrada en la fase 2, pero mediante un simulador. En la segunda se proponen problemas que requieren el uso de varias representaciones y la clasificación de los movimientos. Y en la tercera los estudiantes formulan problemas, especificando las habilidades que ellos consideran necesarias para resolverlos.

Fase 4: prueba final

En esta última fase, se pretende valorar el nivel de desarrollo alcanzado por los estudiantes en cada proceso tras la aplicación de la secuencia didáctica. La prueba es similar a la diagnóstica, pero se diferencia en el fenómeno físico analizado, en este caso se plantea acerca del movimiento vertical.

2.1.2. Análisis de resultados

La fuente de información que permite valorar los resultados es la producción escrita de los estudiantes. Es de resaltar, que en cada una de las actividades se ha usado el tipo de pregunta abierta con la finalidad de identificar la mayor cantidad de recursos usados.

La información obtenida es utilizada para determinar el desarrollo del pensamiento físico-matemático demostrado por los estudiantes. Para lograrlo, se han establecido tres procesos asociados, donde concurren las principales habilidades de pensamiento que se espera desarrollar en la física del grado décimo. Y para cada uno de estos, se especifican algunos desempeños que el estudiante debe cumplir, los cuales se han denominado subprocesos. A continuación se muestran los tres procesos con sus respectivos subprocesos, ordenados de acuerdo al nivel de complejidad:

Proceso 1: identificación de variables en un sistema físico y la forma en que se relacionan, a partir de la observación y experimentación

- a) Reconoce las variables involucradas en un fenómeno físico y posibles dependencias entre ellas.
- b) Formula preguntas a partir de la observación de un fenómeno, propone hipótesis e idea métodos experimentales para verificarlas.
- c) Diseña experimentos que le permitan identificar la relación entre variables, eligiendo instrumentos adecuados y registrando la información pertinente.

Proceso 2: construcción de modelos en múltiples sistemas de representación semiótica que permitan la descripción y predicción de fenómenos físicos

- a) Muestra la variación de las magnitudes físicas en diferentes sistemas de representación (gráfica, esquema, algebraica, tabular y fenomenológica) y comunica hipótesis o resultados a partir de estas representaciones.
- b) Identifica las estructuras matemáticas adecuadas para solucionar un problema, argumentando su pertinencia a partir del comportamiento de las variables. Y realiza los tratamientos necesarios dentro de un mismo registro semiótico.
- c) Construye modelos gráficos o algebraicos que le permitan realizar predicciones sobre un fenómeno físico.

Proceso 3: explicación de fenómenos naturales a partir del comportamiento de las variables.

- a) Clasifica los fenómenos naturales de acuerdo al comportamiento de sus variables.
- b) Construye explicaciones de los fenómenos naturales desde un lenguaje matemático, relacionando el comportamiento de las variables con los conceptos y leyes físicas.

2.2. Resultados

2.2.1. Desarrollo del proceso 1

En la prueba diagnóstica se evidencia un nivel básico, en el que se logra un reconocimiento de variables cinemáticas, pero es escaso el uso del método científico. La hipótesis es omitida por la mayoría de los estudiantes y el diseño de experimentos es poco satisfactorio.

La fase 2 inicia con una actividad experimental, donde los estudiantes son orientados en las distintas etapas del trabajo científico. Esto permite que empiecen a realizar las primeras formulaciones de hipótesis y diseños de experimentos.

En la fase 3 los estudiantes realizan un trabajo más autónomo y de mayor calidad. Y aunque el trabajo experimental es virtual, los estudiantes procuran la elaboración de hipótesis acerca del comportamiento de la velocidad y sus respectivos experimentos. Notándose, sin embargo, algunas fallas recurrentes en la especificación de instrumentos y descripción del proceso.

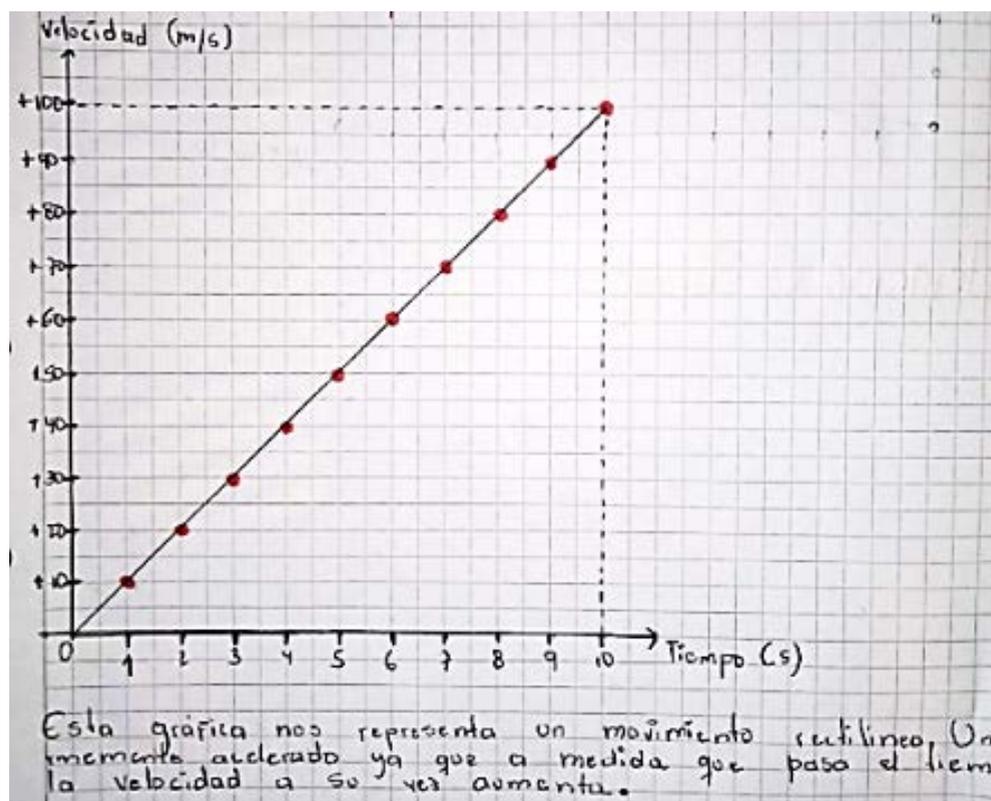
Finalmente, en la última prueba el desempeño disminuye notablemente. Esto se puede explicar desde tres perspectivas: en primera instancia, el instrumento de evaluación pudo haber sido inadecuado. En segunda instancia, en la secuencia didáctica las actividades requerían específicamente cada etapa del trabajo científico, en cambio en la prueba final el estudiante debía proponer estas etapas, lo cual indica que se requiere mayor aprehensión del método científico. En tercera instancia, es posible que algunas habilidades sean muy complejas para medirse solo en un examen escrito.

2.2.2. Desarrollo del proceso 2

Este proceso muestra importantes avances a lo largo de toda la intervención, de manera que los estudiantes logran cada vez mejores representaciones del movimiento rectilíneo.

En primer lugar, la prueba diagnóstica indicaba que la mayor parte de los estudiantes lograban mínimamente representar en uno de los registros semióticos el movimiento. No obstante, era evidente la dificultad en el uso de variadas conversiones. Además, registros como el pictórico o tabular, no eran incluidos entre las representaciones. Ante este diagnóstico, una de las actividades propuestas en la fase 2 fue la resolución de problemas, donde los estudiantes debían convertir un registro numérico variacional a uno cartesiano y tratar de justificar la pertinencia de este último. En la Figura 1 se muestra la solución propuesta por uno de los grupos. En esta misma fase se pidió a los estudiantes que organizaran los resultados de la actividad experimental en diferentes registros semióticos. Estas actividades permitieron fortalecer la representación cartesiana y explorar otros registros.

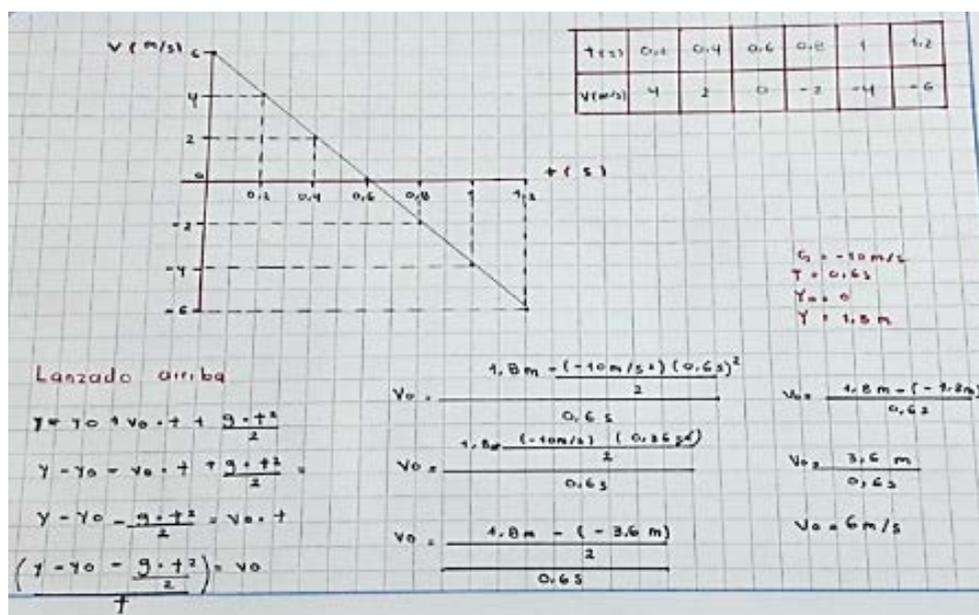
Figura 1. Utilización de registro cartesiano y su justificación fase 2.



Fuente: elaboración de estudiantes.

En segundo lugar, la actividad de resolución de problemas propuesta en la fase 3, permitió el fortalecimiento de los registros cartesiano y algebraico usados para construir modelos predictivos, clasificar movimientos y solucionar problemas. En la Figura 2 se muestra la representación realizada por uno de los grupos. No obstante, se observaron dificultades en el tratamiento dentro del registro algebraico y poco uso del tabular.

Figura 2. Utilización de registros cartesiano, tabular y algebraico en fase 3.



Fuente: elaboración de estudiantes.

Finalmente, la actividad de formulación de problemas permitió que los estudiantes se hicieran más conscientes del tipo de registro utilizado y fortalecieran su aplicación.

2.2.3. Desarrollo del proceso 3

El nivel de desempeño del tercer proceso es notablemente bueno al inicio de la intervención. Lo anterior, debido a que la prueba diagnóstica fue alrededor de temáticas que ya habían sido estudiadas, de manera que la identificación de conceptos y clasificación de los movimientos fue sencilla

para la mayoría de los estudiantes. No obstante, en la explicación de los fenómenos falló un gran número de estudiantes.

La fase 2 permitió familiarizar a los estudiantes con el fenómeno y un gran porcentaje logró identificar la aceleración y otros factores en la caída libre. Para la fase 3, se amplió la cantidad de movimientos analizados y se buscó que los estudiantes los diferenciaron de acuerdo al comportamiento de la velocidad. Adicionalmente, se propuso como situación problema la identificación de los movimientos. En la Figura 3 los estudiantes usan el registro algebraico para verificar que el objeto se dejó caer.

Figura 3. Clasificación de movimiento vertical fase 3.

- Para justificar lo grafico se puede con estas formulas:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot (y - y_0)}{g}}$$

$$t = \frac{2 \cdot (0 - 6m)}{-10m/s^2} \quad t = 1,095s.$$

Si miramos el tiempo del resultado, coincide con lo grafico en su tiempo final.

Fuente: elaboración de estudiantes.

En la prueba final, la mayoría de los estudiantes lograban reconocer la diferencia entre los tipos de lanzamiento. No obstante, se notó cierta dificultad para relacionar los conceptos con los cambios observados en variables como la velocidad.

III. CONCLUSIONES

La intervención ha permitido alcanzar las metas comúnmente propuestas en la educación tradicional, identificar los conceptos, clasificar los tipos de movimiento y solucionar ejercicios algebraicos. Pero adicionalmente, se ha logrado el desarrollo de los tres procesos asociados al pensamiento físico-matemático, dentro de los cuales que se destacan habilidades como la representación en múltiples registros, la construcción del conocimiento a partir del método científico, la clasificación y explicación de fenómenos naturales a partir del comportamiento de las variables.

REFERENCIAS

- [1] Ministerio de Educación Nacional (MEN), “Estándares Básicos en Competencias en Ciencias Sociales y Ciencias Naturales”, Bogotá, Colombia, 2006. [En línea]. Disponible en: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-81033_archivo_pdf.pdf%0A%0A.
- [2] R. A. S. Karam y M. Pietracola, “Habilidades Técnicas Versus Habilidades Estructurantes: Resolução de Problemas e o Papel da Matemática como Estruturante do Pensamento Físico”, *ALEXANDRIA Rev. Educ. em Ciência e Tecnol.*, vol. 2, núm. 2, pp. 181-205, 2009.
- [3] P. A. Aragón, Marín, y C. Santamaría, “El pensamiento físico-matemático como un objeto de estudio de la didáctica de la física”, Congreso Iberoamericano de Educación Metas 2021, Buenos Aires, 2010.
- [4] D. F. Vizcaino y E. A. Terrazzan, “Diferencias trascendentales entre matematización de la física y matematización para la enseñanza de la física”, *Tecné, Episteme y Didaxis TED*, vol. 1, núm. 38, pp. 95-111, 2015, doi: 10.17227/01213814.38ted95.111.

- [5] Ministerio de Educación Nacional (MEN), “Lineamientos Curriculares. Ciencias Naturales y Educación Ambiental”, Bogotá, Colombia, 1998.
- [6] “Derechos Básicos de Aprendizaje - Ciencias Naturales”, 2016.
- [7] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES), “Marco de referencia de la prueba de ciencias naturales Saber 11.º”, 2019.
- [8] J. Muñoz León, “Enseñanza basada en resolución de problemas: distancia entre conocimiento teórico y saber común.”, Universidad Autónoma de Barcelona, 2015.
- [9] Ministerio de Educación Nacional (MEN), “Lineamientos Curriculares de Matemáticas”, Bogotá, Colombia, Colombia, 1998.
- [10] U. Malaspina y E. Vallejo, “Creación de problemas en la docencia y la investigación”, *Reflexiones y Propuestas en Educ. Matemática*, pp. 7-54, 2014.

AUTORES

Carlos Fernando Díaz Torres

Ingeniero de Petróleos, de la Universidad Nacional de Colombia – Medellín; Docente de educación media en el área de Ciencias Naturales – Física, en la Institución Educativa Municipal Nacional de Pitalito, Huila; Estudiante de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales.

Áreas de investigación: pensamiento matemático y pensamiento científico, matematización de la física y enfoque de formulación y resolución de problemas.



Jaider Albeiro Figueroa Flórez

Magíster en Matemática Aplicada, de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales; Licenciado en Matemáticas, de la Universidad de Sucre. Docente de planta de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística.

Áreas de investigación: modelamiento matemático y educación matemática en las líneas de pensamiento matemático y resolución de problemas; y construcción de ambientes de aprendizaje con tecnologías.