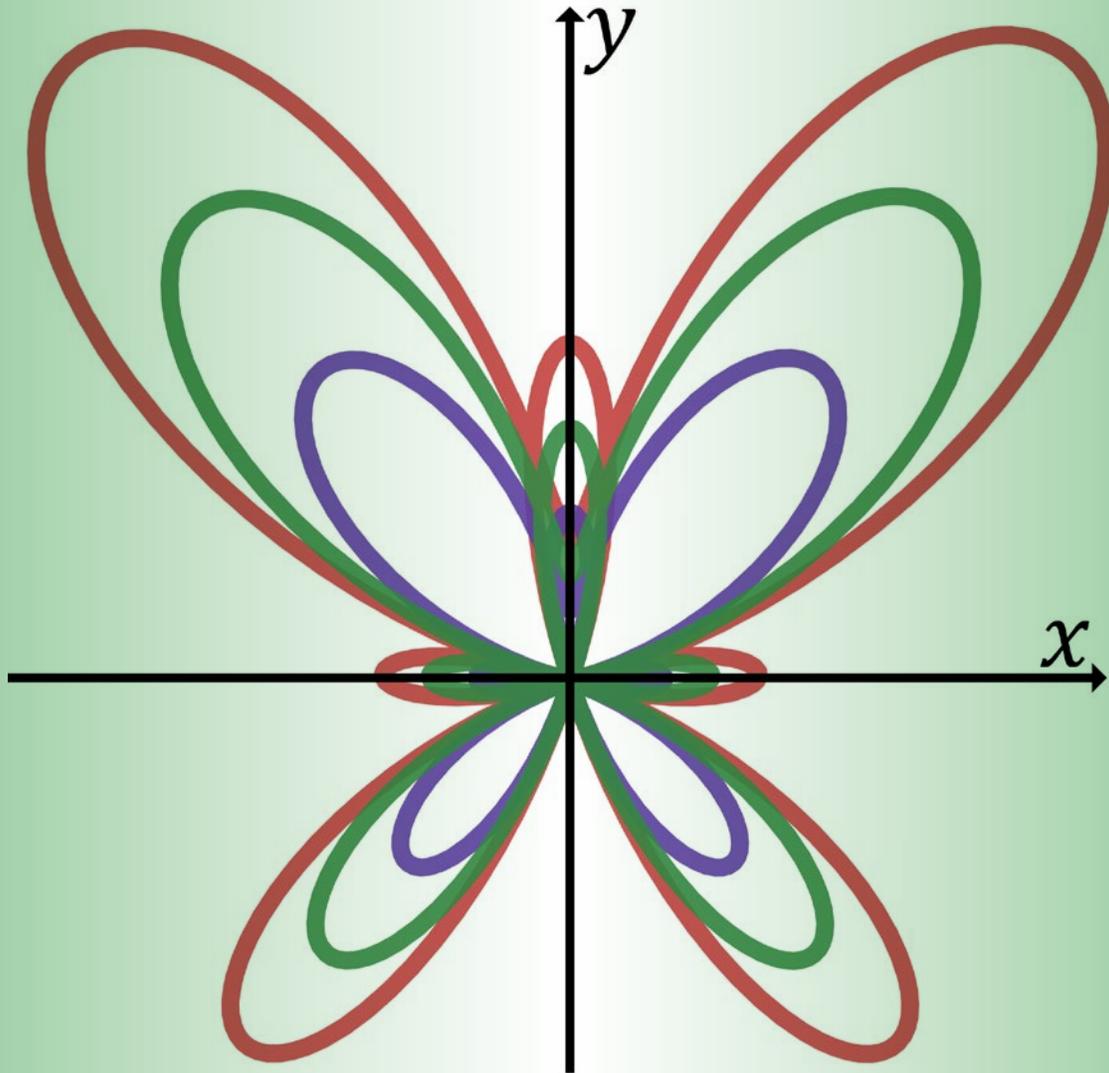


PRE-CÁLCULO

PARA INGENIERÍAS, CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS



Juan Carlos Henao López
Euclides Murcia Londoño



Universidad
CATÓLICA
de Pereira

Editorial

VIGILADO MINEDUCACIÓN

PRE-CÁLCULO

PARA INGENIERÍAS, CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS

JUAN CARLOS HENAO LÓPEZ
EUCLIDES MURCIA LONDOÑO



*Facultad de Ciencias Básicas
e Ingenierías*

Pre-cálculo para ingenierías, ciencias económicas y administrativas: Murcia Londoño, Euclides; Henao López, Juan Carlos.

Autores

Euclides Murcia Londoño; Juan Carlos, Henao López,

-- 1 a. ed. -- Colombia: Pereira. 180 p.

ISBN: 978-958-8487-97-7 (Electrónico).

DOI: 10.31908/eucp.81.

1. Enseñanza de las matemáticas. 2. Cálculo 3. Pensamiento numérico. 4. Ecuaciones .
5. Funciones.

I. Universidad Católica de Pereira.

CDD: 510 - Matemáticas

Catalogación en la publicación – Universidad Católica de Pereira.

Primera edición 2022

Universidad Católica de Pereira

Rector: Pbro. Behitman Alberto Céspedes De los Ríos

Vicerrector Académico: Nelson Londoño Pineda

Directora (E) de Investigaciones e Innovación: Daniela Torres Morimitsu

Diagramación:

GRÁFICAS BUDA, SAS.

Calle 15 No. 6-23 PBX: 335 72 35

Pereira – Risaralda - Colombia

Reservados todos los derechos

© Universidad Católica de Pereira, 2020

Carrera 21 No. 49-95 Pereira

Teléfono 312 40 00

ucp@ucp.edu.co

www.ucp.edu.co

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento de la Universidad Católica de Pereira, ni genera su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por los derechos de autor y conexos contenidos en la obra, así como por la eventual información sensible publicada en ella.

Pereira, Colombia

Diciembre de 2022

TABLA DE CONTENIDO

	INTRODUCCIÓN HISTÓRICA A LAS MATEMÁTICAS	6
1.	ECUACIONES E INECUACIONES	10
1.1	Ecuaciones lineales	10
1.2	Resolución de sistemas de ecuaciones lineales	18
	Eliminación por Sustitución	18
	Eliminación por igualación	19
	Eliminación por reducción	21
	Análisis gráfico	22
1.3	Fórmulas y relaciones algebraicas	30
	Fórmulas	30
	Relaciones entre variables	33
1.4	Problemas que se resuelven con ecuaciones lineales	40
	Modelación	40
1.5	Ecuaciones cuadráticas	50
	Solución por factorización	50
	Solución por medio de fórmula general	53
	Problemas que se resuelven con ecuaciones de segundo grado	56
1.6	Inecuaciones	60
	Algebra elemental de conjuntos	61
	Inecuaciones	63
	Aplicaciones de las inecuaciones	67
2	FUNCIONES	72
2.1	Introducción al concepto de funciones	72
	Funciones pares, impares y compuestas.	76

2.2	Función lineal	86
	Razones de cambio	88
	Rectas paralelas y perpendiculares	89
2.3	Funciones polinomiales y racionales	100
	Función Cuadrática	100
	Solución de una ecuación de segundo grado	101
	Puntos extremos de una función cuadrática.	102
	Funciones polinomiales de orden superior.	104
	Ceros polinomiales	106
	Funciones racionales	107
2.4	Funciones y ecuaciones trigonométricas	116
	Conversión entre sistemas para medir ángulos	116
	Las Funciones trigonométricas	117
	Resolución de triángulos rectángulos usando trigonometría	118
	Teoremas Trigonométricos	121
	Identidades trigonométricas	123
	Solución de ecuaciones trigonométricas.	125
	Gráficas de las funciones trigonométricas	127
2.5	Funciones logarítmica y exponencial	134
	Función exponencial	134
	Función exponencial natural	135
	Función logarítmica	137
2.6.	Matemáticas financieras	146
	Interés simple	146
	Interés compuesto	147
	Interés compuesto continuo	150
	Tasa de interés efectiva	151
	Conversión entre tasas de interés efectiva	154
	Anualidades	155
	Amortización de préstamos	157
	Plan de amortización	158
	RESPUESTA A LOS EJERCICIOS IMPARES	164

INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS

La matemática en todas sus categorizaciones –la aritmética, la geometría, la estadística y el cálculo– es una herramienta eminentemente cultural basada en principios lógicos, que sirve para comprender y analizar el cosmos y las relaciones que el hombre tiene con este, razón por la cual está sujeta a cambios y modificaciones en respuesta a las necesidades de cada civilización en su momento histórico y aunque en principio las matemáticas son una ciencia exacta y objetiva, su desarrollo la ha vuelto más precisa al momento de describir diversas situaciones de índole científica, tecnológica, económica y natural, por esta razón, para comprender un poco mejor lo que es el pensamiento matemático, es preciso tomar algunos elementos históricos de su desarrollo.

Existe un aspecto inherente a la condición humana y es la necesidad de comprender todo lo que lo rodea para poder así controlarlo y transformarlo eventualmente, pero la comprensión es un fenómeno de abstracción que implica asociar símbolos a situaciones, pero también es preciso asociar símbolos a cantidades y la manera como estos se relacionan es lo que constituye las bases de las operaciones lógicas y las matemáticas.

Atendiendo a la división cronológica realizada por Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), el desarrollo histórico de las matemáticas puede ubicarse en cuatro periodos diferenciados.

- ⊕ Nacimiento de las matemáticas.
- ⊕ Matemáticas elementales.
- ⊕ Matemáticas de las magnitudes variables.
- ⊕ Matemáticas contemporáneas.

Durante el periodo del nacimiento de las matemáticas aparecen los primeros vestigios de sistemas matemáticos estructurados en las civilizaciones helénicas, china y egipcia; los babilonios 4000 años antes del nacimiento de Cristo crean un sistema de numeración de base 60, que emplean ampliamente en sus construcciones, en la agricultura y en la astronomía; de la civilización egipcia por su parte, se cuenta con dos grandes papiros con elementos básicos de la matemática y la geometría que sumado con las inscripciones en piedras halladas en las tumbas, dan cuenta de un profundo dominio del sistema de numeración, que igualmente les sirve como herramienta de cálculo para sus construcciones, especialmente en el caso de las pirámides y los templos. La civilización helena (griegos) en su máximo esplendor, recogen muchos de los adelantos científicos,

SISTEMA DE NUMERACIÓN EGIPCIO

Los egipcios tenían un sistema de numeración que era una combinación del sistema decimal con el sistema cuneiforme.

	1
∩	10
⊙	100
⊥	1.000
∟	10.000
🐸	100.000
👤	1.000.000

Cada múltiplo de 10 lo representaban con un jeroglífico, y para otras cantidades utilizaban el múltiplo de 10 más cercano adicionando iconos hasta completar el número.

Introducción a las Matemáticas

humanísticos y tecnológicos de las civilizaciones contemporáneas a ella e igualmente de civilizaciones más antiguas, lo que les permite realizar importantes avances en la aritmética, el álgebra y la geometría; entre sus más importantes pensadores se destacan Tales de Mileto, Arquímedes y Pitágoras.

En el periodo de las matemáticas elementales, que se extiende aproximadamente desde el siglo V a.C. hasta el siglo XVI, se obtienen grandes logros en el estudio de las matemáticas constantes, la geometría analítica y el análisis infinitesimal. La civilización árabe empieza a traducir a su idioma los textos griegos, impulsando en gran medida el desarrollo científico y tecnológico por lo que son reconocidos; uno de los pensadores más representativos es Mohammed Musa Al-Khowarizmi con sus dos obras ampliamente difundidas, el Brahmagupta que es una reproducción exacta del sistema de numeración hindú, y el Hisab al-jabr wa-al-muqabala, más conocido por la palabra latina álgebra. A su vez, Europa renacentista retoma lo dejado por los musulmanes siendo Leonardo de Pisa (Fibonacci) uno de los representantes más connotados de este periodo; escribe su obra "Liber Abaci" donde expone el sistema de numeración posicional hindú, propone algunas operaciones con fracciones, crea aplicaciones a cálculos comerciales como la regla de tres simple y compuesta, la división proporcional, problemas de progresiones siendo reconocido por la famosa "sucesión de Fibonacci" y el famoso problema de los conejos. Ya en el siglo XV, época de las grandes navegaciones, la trigonometría fue separada de la astronomía, alzándose como ciencia independiente de la mano de Regiomontano, que trató de una manera sistemática todos los problemas sobre la determinación de triángulos planos y esféricos.

$$1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow \\ \rightarrow 13 \rightarrow 21 \rightarrow 35 \rightarrow \dots$$

Figura 1.1. Serie de Fibonacci.

Pero fue François Viète quien propone un sistema de símbolos algebraicos con el cual es posible la expresión de ecuaciones y sus propiedades mediante fórmulas generales. Para hacer más fáciles los cálculos, matemáticos como Copérnico, Kepler y Tycho Brahe construyen tablas trigonométricas, fundamentales para otros desarrollos posteriores.

El periodo de las matemáticas variables que va hasta mediados del siglo XIX, nace con las magnitudes variables en la geometría analítica propuesto por Renato Descartes, igualmente en esta época aparecen la Royal Society y la Real Academia de París, como comunidades científicas que impulsan enormemente el desarrollo científico de toda Europa, siendo dos de sus representantes más connotados Gottfried Leibniz e Isaac Newton, quienes desarrollan de forma paralela e independiente lo que se conocería con el nombre de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, sin embargo es a Newton a quien se le inmortaliza por sus aportes en la física y en la matemática gracias a su teoría de las fluxiones que es la teoría precursora del cálculo, a la teoría

Introducción a las Matemáticas

de la gravitación universal, que explica con un sustento teórico-científico el movimiento de los cuerpos, especialmente el de los planetas y su tratado de luz y óptica, donde expone la naturaleza la luz.

Posteriormente aparecen grades matemáticos como Lagrange, D'Alembert, Laplace, Carnot, Euler y Gauss, quienes, tomando los descubrimientos de Newton, desarrollan el cálculo y crean nuevas ramas como son el cálculo vectorial, teoría de probabilidades, teoría de conjuntos, el álgebra lineal, el análisis funcional, el cálculo de las variaciones, la geometría proyectiva y descriptiva, por nombrar solo algunas.



Figura 1.2. Evariste Galois

Imagen tomada de : <https://www.buscabiografias.com/>

El último periodo que es actual, el de las matemáticas contemporáneas, reconociéndose como representantes a Abel y Galois quienes hacen aportes sobre la resolución de ecuaciones algebraicas en radicales, introduciendo el concepto de grupo. Igualmente se hacen importantes aportes a la teoría de cuerdas, la teoría de números y a la mecánica, a la teoría de funciones y a la teoría moderna de conjuntos; además se crean los estudios de variable compleja con los que es posible modelar sistemas físicos complejos.

Como se puede ver, la matemática es una disciplina que lejos está de ser estática, de hecho es todo lo contrario, frecuentemente se define a sí misma, reevalúa sus teorías y postulados y sirve como sustento a muchas otras áreas del conocimiento como la física, la química, las ciencias sociales, permea disciplinas como la medicina y la psicología y ni que hablar de todas las ingenierías, pues es la matemática la herramienta que permite la construcción y explicación de modelos que predicen sistemas o comportamientos.

Introducción a las Matemáticas

En este sentido es que se debe asumir las matemáticas, como herramienta de aproximación al conocimiento científico, basada en principios lógicos y objetivos que han evolucionado y que desde luego seguirá evolucionando en la medida que se vayan corriendo las fronteras del saber humano.

El curso de matemáticas I de la Universidad Católica de Pereira, para estudiantes de pregrado en los programas de Ingeniería Industrial, Ingeniería en Sistemas y Telecomunicaciones, Administración de Empresas, Tecnología en Desarrollo de Software, está diseñado para que el estudiante desarrolle por sí mismo, herramientas de pensamiento complejo como el análisis, la inferencia y la síntesis al igual que el pensamiento crítico, a fin de que estos sirvan como sustento para la aplicación en otras disciplinas asociados a su saber científico.

CAP. 1. ECUACIONES E INECUACIONES

El principal objetivo de este capítulo es desarrollar las habilidades y destrezas matemáticas para resolver ecuaciones tanto lineales como no lineales y dentro de ellas ubicarlas en la solución de problemas en contextos reales. Para esto se introducen ecuaciones con cantidades reales, racionales, irracionales con el fin de poder ampliar el espectro de posibilidades de aplicación a la vida cotidiana.

SECCIÓN

1.1

ECUACIONES LINEALES

Una ecuación es una expresión algebraica que relaciona una, dos o más variables y que tiene una igualdad respecto de una cantidad u otra expresión matemática. Son ejemplos de ecuaciones los siguientes

$$x + 1 = 3 \quad x^2 + 2x - 2 = 5 \quad \text{sen } x + \cos x = 1$$

La primera es una ecuación lineal, la segunda una ecuación cuadrática y la tercera una ecuación trigonométrica; nótese que en cada una hay cantidades, variables y operaciones, pero lo más importante y que permite en una primera instancia identificarlas como ecuación, es la igualdad. Estas tres hacen parte de una gran variedad de ecuaciones, las cuales comparten algunas características y propiedades importantes, a saber

Teorema 1.1. Propiedades de las igualdades: para todos los números reales a , b y c se cumplen las siguientes propiedades:

- | | | |
|----|---------------------------------------|----------------------|
| a. | $a = a$ | Propiedad reflexiva |
| b. | Si $a = b$ entonces $b = a$ | Propiedad simétrica |
| c. | Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$ | Propiedad transitiva |

Cuando una expresión tiene varias partes sumadas o restadas, cada una de las partes se denomina término; para ello tómesese como ejemplo la expresión algebraica

Sección 1.1 Ecuaciones Lineales

$$\underbrace{4x^2}_{\text{Término}} + \underbrace{4xy}_{\text{Término}} - \underbrace{\frac{5x}{3y}}_{\text{Término}} + \underbrace{y}_{\text{Término}} = \underbrace{3}_{\text{Igualdad}}$$

Aquí claramente se puede apreciar una expresión con cinco términos y una igualdad, por otro lado, la parte numérica que precede a una variable en un término se denomina coeficiente y el número que está en la parte ligeramente superior es el exponente, quien potencia según sea el número de veces que indica.

Representación De Una Fracción

$$a \rightarrow \text{Numerador}$$

$$\frac{\quad}{b} \rightarrow \text{Denominador}$$

$$\text{Coeficiente} \leftarrow 4x^2 \begin{matrix} \rightarrow \text{Exponente} \\ \rightarrow \text{Variable} \end{matrix}$$

Entendiendo que una ecuación es una proposición matemática con una igualdad, las soluciones, polos o raíces son el conjunto de valores que la hacen cierta.

Ejemplo 1.1. Compruebe que las raíces que se indican son o no soluciones de las expresiones algebraicas.

- a. $2x + 1 = -5$ siendo $x = 1$ y $x = -3$
 b. $x^2 + 2x = 3$ siendo $x = 1$ y $x = -3$

Solución: para comprobar que una raíz es solución de una ecuación, basta con reemplazarla y corroborar que se cumple la igualdad.

a. $2x + 1 = -5 \rightarrow 2(1) + 1 = -5 \rightarrow 2 + 1 = -5 \rightarrow 3 = -5$

Como 3 no es igual a -5, se puede asegurar con toda certeza que $x=1$ no es solución para la primera ecuación, en el segundo caso, al reemplazar se obtiene:

$$2x + 1 = -5 \rightarrow 2(-3) + 1 = -5 \rightarrow -6 + 1 = -5 \rightarrow -5 = -5$$

En este caso, se llega a una verdad y se concluye que $x=-3$, sí es solución para la primera expresión.

b. Para este caso, se debe volver a reemplazar para analizar la posibilidad.

$$x^2 + 2x = 3 \rightarrow (1)^2 + 2(1) = 3 \rightarrow 1 + 2 = 3 \rightarrow 3 = 3$$

Llegando a una verdad, luego $x=1$, sí es solución para la segunda expresión. Analizando el segundo valor se tiene

$$x^2 + 2x = 3 \rightarrow (-3)^2 + 2(-3) = 3 \rightarrow 9 - 6 = 3 \rightarrow 3 = 3$$

Lo que comprueba que $x=-3$ también es solución para la segunda ecuación.

Sección 1.1 Ecuaciones Lineales

En esta sección se trabajan las ecuaciones lineales, sin embargo, las propiedades que se plantean a continuación pueden servir para resolver otros tipos de ecuaciones, de ahí la importancia que el lector las estudie y aplique con cuidado.

Definición 1.1. Ecuación lineal: una ecuación lineal es una expresión matemática que se escribe de la forma

$$ax + b = c \quad [\text{Ec. 1.1}]$$

Con a, b y c constantes reales con $a \neq 0$

Resolver una ecuación, es precisamente encontrar el conjunto de valores que la hacen cierta, es decir los valores para los cuales se cumple la igualdad; en el ejemplo 1.1., estos valores son entregados sin embargo es más común que sea el usuario el que los busque. Para ello se usan las siguientes propiedades:

Teorema 1.2. Propiedades para la solución de ecuaciones lineales. Sea a, b y c constantes reales, entonces:

1. Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$ *Propiedad aditiva*
2. Si $a = b$ entonces $a - c = b - c$ *Propiedad aditiva*
3. Si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c$ *Propiedad multiplicativa*
4. Si $a = b$ entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ Para todo $c \neq 0$ *Propiedad multiplicativa*

Ejemplo 1.2. Resolver la siguiente ecuación:

$$2(4x + 3) - 2 = 3x + 14$$

Solución: eliminando los paréntesis de la expresión se tiene:

$$8x + 6 - 2 = 3x + 14$$

Sumando términos semejantes se llega a la expresión:

$$8x + 4 = 3x + 14$$

Aplicando la propiedad 2 del teorema 1.2., y escogiendo intencionadamente el 4 para restar a ambos lados se obtiene:

$$8x + 4 - 4 = 3x + 14 - 4$$

Lo que lleva a la expresión

★★★★★★★★

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

CONMUTATIVA: El orden de los sumandos (o multiplicandos) no altera el resultado

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

ASOCIATIVA: La forma como se asocian los sumandos (o multiplicandos) no altera el resultado

$$a + b + c = (a + c) + b$$

$$= (a + b) + c$$

$$= a + (b + c)$$

$$abc = (ab)c = (ac)b = (bc)a$$

DISTRIBUTIVA: La multiplicación de una suma o resta es la suma o resta de las multiplicaciones.

$$a(b \pm c) = ab \pm ac$$

★★★★★★★★

Sección 1.1 Ecuaciones Lineales



Resolver la ecuación

$$10m - 5(2 - m) = 3[4 + 3(m + 1)] + 11$$

Solución



$$8x = 3x + 10$$

Luego restando a ambos lados de la ecuación $3x$ usando la misma propiedad, se llega a:

$$8x - 3x = 3x + 10 - 3x \rightarrow 5x = 10$$

Y al dividir ambos lados de la ecuación entre 5, aplicando la propiedad número cuatro del teorema 1.2., se encuentra la raíz o solución de la ecuación del problema.

$$\frac{5x}{5} = \frac{10}{5} \rightarrow x = 2$$

Aunque en este caso la solución dio un valor entero, normalmente esto no es así. Una vez se adquiera práctica y dominio del teorema 1.2., se puede concluir que para encontrar la solución de una ecuación –por lo menos de una ecuación lineal–, se debe despejar la variable –dejarla sola o aislada en un lado de la ecuación– por lo que van apareciendo estrategias más simples y directas en comparación con operaciones complementarias e inversas.

ESTRATEGIAS PARA DESPEJAR UNA VARIABLE

1. Elimine los paréntesis que sea fáciles de reducir.
2. Reduzca términos semejantes
3. La cantidad que únicamente suma a un lado de la ecuación, pasa a restar el otro lado.
4. La cantidad que únicamente reste a un lado de la ecuación, pasa a sumar el otro lado.
5. La cantidad que únicamente multiplique a un lado de la ecuación, pasa a dividir al otro lado.
6. La cantidad que únicamente divida un lado de la ecuación, pasa a multiplicar al otro lado.

En el problema 1.2., una vez reducida la expresión, para el despeje se mueven las cantidades de interés.

$$8x + 4 = 3x + 14$$

Pasa a restar

Pasa a restar

Quedando:

$$8x - 3x = 14 - 4 \rightarrow 5x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{5} \rightarrow x = 2$$

Sección 1.1 Ecuaciones Lineales

Aquí nótese que el 5 está multiplicando exclusivamente a la variable, luego pasa a dividir al otro lado llegando a la misma respuesta.

Ejemplo 1.3. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{5x - 17}{2} = 8 - 3x$

b. $\frac{w}{2} + 1 = \frac{3}{2}(w + 1)$

c. $\sqrt{2}m - 3 = m + \frac{1}{2}$

d. $0.1(q - 2) = \frac{3q - 4}{5}$

Solución: aplicando las estrategias para despejar una variable se tiene.

a. De ser posible, se deben quitar las fracciones, aquí se ve que el 2 está únicamente dividiendo a todo un lado, luego puede pasar a multiplicar al otro.

$$\frac{5x - 17}{2} = 8 - 3x \rightarrow 5x - 17 = 2(8 - 3x)$$

Quitando los paréntesis se llega a:

$$5x - 17 = 16 - 6x$$

Moviendo el 17 a la derecha y trayendo el 6x a la izquierda se tiene:

$$5x + 6x = 16 + 17 \rightarrow 11x = 33 \rightarrow x = \frac{33}{11}$$

Finalmente se llega a la respuesta $x = 3$.

b. En este caso se tienen cantidades fraccionarias,

$$\frac{w}{2} + 1 = \frac{3}{2}(w + 1) \rightarrow \frac{w}{2} + 1 = \frac{3w}{2} + \frac{3}{2}$$

Moviendo los términos para llegar a cantidades semejantes se tiene:

$$\frac{w}{2} - \frac{3w}{2} = \frac{3}{2} - 1 \rightarrow -2w = \frac{1}{2} \rightarrow w = \frac{1}{-2}$$

Por la ley de extremos y medio se tiene entonces que $w = \frac{1}{4}$.

c. En esta expresión hay cantidades radicales, sin embargo, el procedimiento sigue siendo equivalente, moviendo a la izquierda las variables y a la derecha los términos independientes, se logra:

$$\sqrt{2}m - 3 = m + \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{2}m - m = \frac{1}{2} + 3$$



Resolver la ecuación

$$3\left(1 + \frac{3r + 4}{2}\right) + \dots$$

$$-2\left(\frac{1}{3} + \frac{3r + 4}{6}\right) = 5r + 4$$

SOLUCION

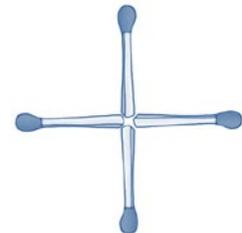


EJERCICIOS DE LÓGICA

Mover solo un fósforo, de tal forma que la igualdad sea verdadera.



Moviendo solo un fósforo, obtener un cuadrado



Sección 1.1 Ecuaciones Lineales

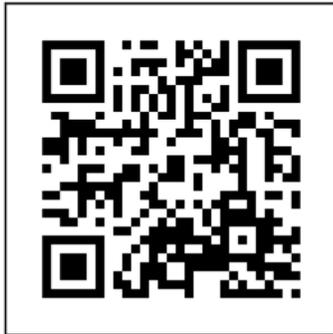


Resolver las siguientes ecuaciones y explicar la naturaleza de las respuestas

$$3x + 2 = 2(x + 1) + 1$$

$$3x + 2 = 2(x - 3) + x$$

SOLUCION



Factorizando la m se obtiene:

$$(\sqrt{2} - 1)m = \frac{7}{2} \rightarrow m = \frac{7}{2(\sqrt{2} - 1)}$$

Sin embargo, es frecuente en matemáticas no dejar cantidades con radicales en el denominador, para lo cual se usa el procedimiento denominado racionalización que precisamente busca esto. Multiplicando denominador y numerador por el conjugado del denominador se obtiene:

$$\frac{7}{2(\sqrt{2} - 1)} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{7(\sqrt{2} + 1)}{2(\sqrt{2}^2 - 1^2)} = \frac{7(\sqrt{2} + 1)}{2(1)} = \frac{7\sqrt{2}}{2} + \frac{7}{2}$$

Por tanto, la solución es:

$$m = \frac{7\sqrt{2}}{2} + \frac{7}{2}$$

d. El último caso tiene cantidades con parte decimal, por tanto, el problema así sigue que se trate, moviendo el 5 que está dividiendo toda la expresión se obtiene:

$$0.1(q - 2) = \frac{3q - 4}{5} \rightarrow 0.1(q - 2) \cdot 5 = 3q - 4$$

El orden de los factores en una multiplicación es indiferente, por tanto

$$0.5(q - 2) = 3q - 4 \rightarrow 0.5q - 1 = 3q - 4$$

Despejando las variables se llega a:

$$0.5q - 3q = -4 + 1 \rightarrow -2.5q = -3 \rightarrow q = \frac{-3}{-2.5} = \frac{6}{5} = 1.2$$

Por tanto, la solución, polo o raíz para este problema es $q=1.2$.

Generalmente las ecuaciones lineales tienen una única solución, aunque es posible que no tengan solución o que tengan infinitas soluciones. El siguiente caso ilustra una ecuación que no tiene solución.

$$3x + 2 = 2(x - 3) + x$$

Se invita al lector a que visite el enlace con código QR, para que note la inconsistencia a la cual se llega al final del problema.

Sección 1.1 Ecuaciones Lineales

Ejercicios sección 1.1. Ecuaciones lineales.

Determine si la raíz planteada es solución para la ecuación que se muestra

- | | | |
|-----|--|---------------------|
| 1. | $\frac{x}{2} + 3 = 2$ | $x = -2$
$x = 2$ |
| 2. | $4x + 1 = 9$ | $x = 2$
$x = 1$ |
| 3. | $x^2 + x - 2 = 0$ | $x = 1$
$x = 2$ |
| 4. | $2(x + 3) - 3x + 2 = 3x + 4$ | $x = -1$
$x = 1$ |
| 5. | $x^2 + x^3 - 10 = 2$ | $x = 0$
$x = 2$ |
| 6. | $\frac{3 + 4x}{x + 2} = 3$ | $x = -4$
$x = 3$ |
| 7. | $x + \frac{3}{2} = 5x$ | $x = -4$
$x = 3$ |
| 8. | $6 + \frac{4x + 1}{x + 1} = 9$ | $x = 2$
$x = 3$ |
| 9. | $x^2 + 13x + 30 = 0$ | $x = 10$
$x = 3$ |
| 10. | $\frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{4}$ | $x = 1$
$x = 2$ |

Simplifique cada una de las siguientes expresiones, en caso de no poderse, indíquelo

11. $xy + 3y - 2x + 5xy - 6x$
12. $a^2 + 2ab + b^2 - 3(a^2 - 3ab + b^2)$
13. $4x + 3y + 5x - 6y + 2x + 3y$
14. $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - \frac{4}{5}x + \frac{1}{3}y - 5xy$
15. $1.2a + 3b - 2(2.5a - 2.7b) + 4ab - 3ab$
16. $2[2a - 3(a - b) + 4(2a - 3b)] - a$
17. $\frac{1}{2}m^2n - \frac{1}{3}mn^2 + \frac{3}{4}m^2n + \frac{1}{2}mn^2$
18. $\sqrt{2}p + \sqrt{3}q + \sqrt{8}p - \sqrt{27}q$
19. $\sqrt{2}xy + \sqrt{8}xy - \sqrt{32}xy + 1$
20. $\sqrt{12}r + 1.5s - \sqrt{3}r - 2.2s$

Resuelva cada una de las ecuaciones indicadas, mostrando todos los procedimientos utilizados.

21. $2x + 3 = 15$
22. $4 - 3x = -11$

23. $2x - 4 = 20$
24. $5x + 8 = 38$
25. $6x + 12 = 36$
26. $18 - 7x = 4$
27. $3m + 1 = -5$
28. $-3q + 2 = 17$
29. $10n - 3 = 17$
30. $1 - n = 12$
31. $1.2x - 3.6 = 2.4$
32. $2.2m + 1.3 = 2.1$
33. $3 + 4.6r = 2.4$
34. $3.9u + 1.7 = 9.4$
35. $6.36r + 4.56 = 20.17$
36. $\sqrt{2}x + 3 = \sqrt{3}$
37. $\sqrt{3}m - \sqrt{2} = \sqrt{5}$
38. $\sqrt{2} + \sqrt{3}y = 6$
39. $\sqrt{10} + 3d = 8\sqrt{3}$
40. $\sqrt{200n} + \sqrt{300} = \sqrt{150}$

Encuentre la variable x de las siguientes expresiones algebraicas

41. $ax + b = c$
42. $ax - b = c$
43. $a - bx = c$
44. $a + bx = c$

Entre los ceros, raíces o polos de las siguientes expresiones algebraicas

45. $2x + 3 = 5x - 6$
46. $-3x + 8 = 2x - 12$
47. $3m - 6 = -3m + 6$
48. $1 + 2y = 5 + y$
49. $12 + 4q = -24 - 2q$
50. $5x + 3 = -27 - 10x$
51. $2 - 3(4 + x) = 10$
52. $12 + 2(1 + 2x) = 3x$
53. $3(x + 2) + 2(x + 1) = 8$
54. $2 + 3(5 - x) - 3(2x + 1) = 6$
55. $-2(x + 1) + 4(2 - x) = -3(x + 1) + 20$
56. $6(x + 1) - 2(x + 3) + 40 = 2(3 + 4x)$
57. $10m - 5(2 - m) = 3[4 + 3(m + 1)] + 11$
58. $3[3(5 + (6 - 2m) + m)] = 12$
59. $2[m - 2(m + 3(m + 1))] = 2(m + 1)$

Sección 1.1 Ecuaciones Lineales

60. $3n - 4[3 - 2(n - 2(n + 3))] = 8$

61. $120 - 2\{-3[n + 2(2n + 1) + 4] + 3\} = 1$

62. $2 - 2\{n + 2[2 + 2(2n + 2)] + 2\} = 40$

63. $12 - 3[4 + 3(2y + 1)] = 2(3 - y)$

64. $1 + 2[2q - 2(3 + q)] = -3(8 + 2(q + 1))$

65. $6\alpha - 2(4 - \alpha) = -3[1 - 2(\alpha + 1)] + 20$

Resuelva cada una de las siguientes expresiones algebraicas, indique claramente el procedimiento utilizado.

66. $\frac{2}{3}x + 4 = \frac{x + 1}{2}$

67. $\frac{a + 3}{4} = \frac{a + 1}{-2}$

68. $x + 3 = \frac{x + 1}{2}$

69. $5x + 2 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2x + 1}{3}\right)$

70. $3\left[\frac{x + 1}{2} + \frac{2x - 3}{4}\right] = 2$

71. $\frac{x + 1}{2} + \frac{x + 1}{3} + \frac{x + 1}{4} = 1$

72. $\frac{2a + 3}{4} = \frac{4a - 1}{3} - \frac{3a + 2}{2}$

73. $\frac{3x}{4} + 1 = \frac{5x + 3}{2} - 1$

74. $m + \frac{2m}{3} + \frac{4m}{5} = -2$

75. $\frac{w}{4} + 0.01 = \frac{3w + 3}{2} - 0.02$

76. $r + \frac{3}{2}r = \frac{4r - 1}{2} + \frac{3r + 1}{3}$

77. $\left(3 + \frac{5r - 1}{3}\right)2 + \left(\frac{6r + 1}{4} + 2\right)3 = r$

78. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 1$

79. $\frac{3p + 1}{2} + \frac{p - 2}{3} - \frac{2p - 3}{4} = 2\left(\frac{p - 2}{3} - \frac{4p + 5}{6}\right)$

80. $\frac{z + 1}{2} + 3 = \frac{z - 1}{3} + 1$

81. $3\left(1 + \frac{3r + 4}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{3r + 4}{6}\right) = 5r + 4$

SECCIÓN

1.2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones simultáneas es un conjunto de dos o más ecuaciones que contienen dos o más cantidades desconocidas y que especifican condiciones que estas cantidades desconocidas deben satisfacer al mismo tiempo en todas las ecuaciones; para comprender mejor lo anterior, considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.4. Comprobar que $x = 2$ e $y = -1$ satisfacen el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - 3y &= 5 \end{aligned}$$

Solución: reemplazando los valores en la primera ecuación se tiene:

$$2(2) + (-1) = 3 \rightarrow 4 - 1 = 3 \rightarrow 3 = 3$$

Haciendo lo mismo para la segunda ecuación se logra

$$(2) - 3(-1) = 5 \rightarrow 2 + 3 = 5 \rightarrow 5 = 5$$

Por tanto, x e y deben tomar simultáneamente 2 y -1 respectivamente para volver cierta la ecuación del problema.

Existen diversos métodos para encontrar los valores simultáneos que vuelven ciertas el conjunto de ecuaciones y que se basan por lo general en reducir el número de variables y ecuaciones a través de una eliminación sistemática de las estas; sin embargo, en la sección solamente se plantean dos métodos analíticos; la eliminación por sustitución y la eliminación por reducción.

Eliminación por sustitución

Este método consiste básicamente en tomar la variable en una ecuación y reemplazarla en la otra; el algoritmo se puede describir como:

- Paso 1:** Escoger cualquier ecuación y una incógnita
- Paso 2:** Despejar la incógnita en la ecuación escogida
- Paso 3:** Sustituir la expresión que representa su valor en la otra ecuación.
- Paso 4:** Resolver y reducir la nueva ecuación, con lo cual se obtiene el valor de la incógnita no eliminada.
- Paso 5:** Sustituir el valor hallado en la expresión del paso 2 y simplificar

★★★★★★★★

Sistemas $m \times n$

Cuando por ejemplo se habla de un sistema 2×2 o 3×2 , se hace referencia a sistemas de 2 ecuaciones y dos variables en el primer caso, o tres ecuaciones y dos variables en el segundo.

Para que un sistema tenga solución completa, es necesario, pero no suficiente, que el número de ecuaciones sea superior o por lo menos igual al número de variables.

Si un sistema tiene más variables que ecuaciones, se dice que el sistema es indeterminado; en este caso, no hay suficientes restricciones proporcionadas por las ecuaciones para determinar un valor único para cada variable; esto tiene como resultado que existan múltiples soluciones posibles o incluso infinitas soluciones

★★★★★★★★

Sección 1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Para ejemplificar este método, tómesese como ejemplo la situación planteada en el ejemplo anterior

Ejemplo 1.5. Resolver por sustitución.

$$2x + y = 3 \quad (a)$$

$$x - 3y = 5 \quad (b)$$



Ecuaciones Equivalentes

Las ecuaciones equivalentes son aquellas que se obtienen de otra, por medio de una ampliación o una reducción

$$2x + 3y = 4$$

$$4x + 6y = 8$$

$$6x + 9y = 12$$

Nótese que las dos últimas ecuaciones se obtienen al multiplicar la primera por 2 y 3 respectivamente, luego estas tres ecuaciones son equivalentes.

Una de las características importantes que tienen los sistemas equivalentes, es que NO tienen solución o tienen múltiples soluciones; a estos sistemas se les denominan LINEALMENTE DEPENDIENTES.



Solución: aplicando los pasos se tiene:

Paso 1: Se escoge –arbitrariamente– la primera ecuación y de ella la variable x .

Paso 2: Se despeja la variable seleccionada.

$$2x + y = 3 \rightarrow x = \frac{3 - y}{2} \quad (c)$$

Paso 3: Se sustituye (c) en la otra ecuación –ecuación (b)–

$$\left(\frac{3 - y}{2}\right) - 3y = 5$$

Paso 4: Reduciendo esta expresión se obtiene.

$$\frac{3 - y}{2} - \frac{3y}{1} = 5 \rightarrow \frac{3 - y - 6y}{2} = 5 \rightarrow \frac{3 - 7y}{2} = 5$$

Despejando la variable

$$\frac{3 - 7y}{2} = 5 \rightarrow 3 - 7y = 10 \rightarrow -7y = 7 \rightarrow y = \frac{7}{-7} \rightarrow y = -1$$

Paso 5: Se reemplaza $y = -1$ en la ecuación (c) del paso 2, con lo cual se obtiene.

$$x = \frac{3 - y}{2} \rightarrow x = \frac{3 - (-1)}{2} \rightarrow x = \frac{4}{2} \rightarrow x = 2$$

Con lo cual las soluciones del sistema son $x = 2$ e $y = -1$ que corresponde exactamente con la solución planteada por el problema 1.4.

Eliminación por igualación

Este método de solución de sistemas de ecuaciones consiste en despejar de un par de ecuaciones, la misma variable para luego ser igualadas; dependiendo de la naturaleza del problema, un método puede resultar más

Sección 1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

atractivo que otro en el sentido que simplifica la cantidad de operaciones que se tienen que hacer para encontrar el valor de las incógnitas; por ello es recomendable que el lector los maneje todos y aprenda a identificar la conveniencia de aplicar un método u otro.

- Paso 1:** Escoger cualquier incógnita de un par de ecuaciones
- Paso 2:** Despejar la incógnita escogida en ambas ecuaciones.
- Paso 3:** Igualar la variable escogida lo que implica igualar los respectivos despejes.
- Paso 4:** Resolver y reducir la nueva ecuación, con lo cual se obtiene una nueva expresión la cual tiene una variable menos.
- Paso 5:** Sustituir el valor hallado en cualquier ecuación del paso 2 y simplificar

Para ejemplificar este método tómnese las mismas expresiones del problema 1.5.

Ejemplo 1.6. Resolver por sustitución:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 & (a) \\ x - 3y &= 5 & (b) \end{aligned}$$

Solución: aplicando los pasos se tiene:

Paso 1: se escoge –arbitrariamente– la variable x .

Paso 2: se despeja la variable seleccionada en cada ecuación

$$2x + y = 3 \rightarrow x = \frac{3 - y}{2} \quad (c)$$

$$x - 3y = 5 \rightarrow x = 5 + 3y \quad (d)$$

Paso 3: se igualan (c) y (d)

$$x = x \rightarrow \frac{3 - y}{2} = 5 + 3y$$

Paso 4: reduciendo esta expresión se obtiene

$$\frac{3 - y}{2} = 5 + 3y \rightarrow 3 - y = 2(5 + 3y) \rightarrow 3 - y = 10 + 6y$$

Despejando la variable.

LOS FRACTALES

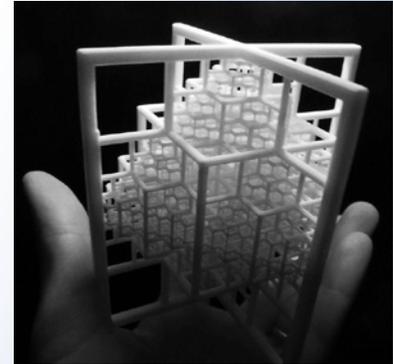


Figura 1.3. Fractales.

Imagen tomada de:

<http://www.shapeways.com/shops/3Dfracta>

Un fractal es un objeto geométrico o que exhibe autosimilitud a diferentes escalas; esto significa que su estructura se repite de forma similar, incluso idéntica en distintos niveles de detalle cumpliendo las siguientes propiedades

- ✓ Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.
- ✓ Posee detalle a cualquier escala de observación.
- ✓ Es autosimilar (exacta, aproximada o estadística).
- ✓ Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.
- ✓ Se define mediante un simple algoritmo recursivo.

Sección 1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

$$-y - 6y = 10 - 3 \rightarrow -7y = 7 \rightarrow y = \frac{7}{-7} \rightarrow y = -1$$

Paso 5: se reemplaza $y=-1$ en la ecuación (c) o (d) del paso 2, con lo cual se obtiene.

$$x = \frac{3 - y}{2} \rightarrow x = \frac{3 - (-1)}{2} \rightarrow x = \frac{4}{2} \rightarrow x = 2$$

Con lo cual las soluciones del sistema son $x = 2$ e $y = -1$ que son exactamente las mismas respuestas encontradas en el método anterior.

Eliminación por reducción.

Este método consiste en manipular el sistema de ecuaciones con el fin de que una de las variables coincida en magnitud, pero difiera en signo en dos ecuaciones, para que, en la suma de estas, se eliminen.

Paso 1: Escoger una variable.

Paso 2: Multiplicar la primera ecuación por el coeficiente de la variable escogida en la segunda ecuación y multiplicar la segunda ecuación por el coeficiente de la variable escogida en la primera ecuación.

Paso 3: La variable escogida debe quedar en ambas ecuaciones con el mismo coeficiente y de signo contrario, si no, cambiar el signo a cualquiera de las ecuaciones (esto equivale a multiplicar por -1 la ecuación seleccionada).

Paso 4: Sumar las dos ecuaciones, con lo cual resulta una tercera ecuación con una variable.

Paso 5: Resolver la ecuación resultante.

Paso 6: Reemplazar el valor encontrado en cualquiera de las ecuaciones originales y despejar la variable resultante.

Ejemplo 1.7. Resolver por sustitución.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 & (a) \\ x - 3y &= 5 & (b) \end{aligned}$$

Solución: aplicando los pasos del método se tiene:

Paso 1: se escoge la variable x (puede ser la otra, la variable y).

Paso 2: el coeficiente que acompaña la x en la primera ecuación es 2 y en la segunda es 1, por tanto, la primera ecuación se multiplica por uno y la segunda por dos.

$$\begin{aligned} (2x + y = 3) \times 1 &\rightarrow 2x + y = 3 \\ (x - 3y = 5) \times 2 &\rightarrow 2x - 6y = 10 \end{aligned}$$

Sección 1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Paso 3: como la variable seleccionada queda positiva en ambas ecuaciones resultantes, se multiplica por (-1) cualquiera; en este caso se toma la primera expresión.

$$(2x + y = 3) \times (-1) \rightarrow -2x - y = -3$$

Paso 4: sumando las dos ecuaciones se tiene.

$$\begin{array}{r} -2x - y = -3 \\ 2x - 6y = 10 \\ \hline 0 - 7y = 7 \end{array}$$

Paso 5: de la ecuación resultante queda.

$$-7y = 7 \rightarrow y = -1$$

Paso 6: Se reemplaza este valor en cualquiera de las ecuaciones originales, para esto se toma la segunda ecuación (b)

$$x - 3y = 5 \rightarrow x - 3(-1) = 5 \rightarrow x + 3 = 5 \rightarrow x = 2$$

Las soluciones al sistema son $x = 2$ e $y = -1$; esto no es coincidencia, sin importar el método que se use, la solución siempre es la misma.

Análisis gráfico.

Una tercera alternativa que resulta especialmente útil en sistemas 2×2 o tal vez en sistemas 3×3 es el método gráfico, que implica obtener la gráfica de cada ecuación –aunque la construcción de las representaciones gráficas de las funciones lineales son tema del próximo capítulo; en esta sección se adelantan algunos apartes útiles para la comprensión más detallada de los sistemas de ecuaciones–; el punto de intersección de las dos gráficas muestra la solución de todo el sistema.

Ejemplo 1.8. Obtener las representaciones gráficas en un mismo plano de las siguientes ecuaciones lineales.

$$\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x - 3y = 5 \end{array}$$

Solución: primero se debe despejar la y , en función de la x , de cada expresión.

$$2x + y = 3 \rightarrow y = 3 - 2x$$

$$x - 3y = 5 \rightarrow -3y = 5 - x \rightarrow y = \frac{5 - x}{-3} = \frac{x - 5}{3}$$

Sección 1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Y para cada expresión se debe obtener la tabla de valores, donde los valores de x –abscisas– se escogen arbitrariamente, y los valores de y –ordenadas– se obtienen al reemplazar cada valor de x en la función correspondiente.

Para $y = 3 - 2x$ la tabla de valores puede ser.

X	-3	-1	0	1	3
y	9	5	3	1	-3

Para $y = \frac{x-5}{3}$ la tabla de valores puede ser.

x	-3	-1	0	1	3
y	-2.6	-2	-1.6	-1.3	-0.6

Graficando estos puntos sobre el plano se obtiene:

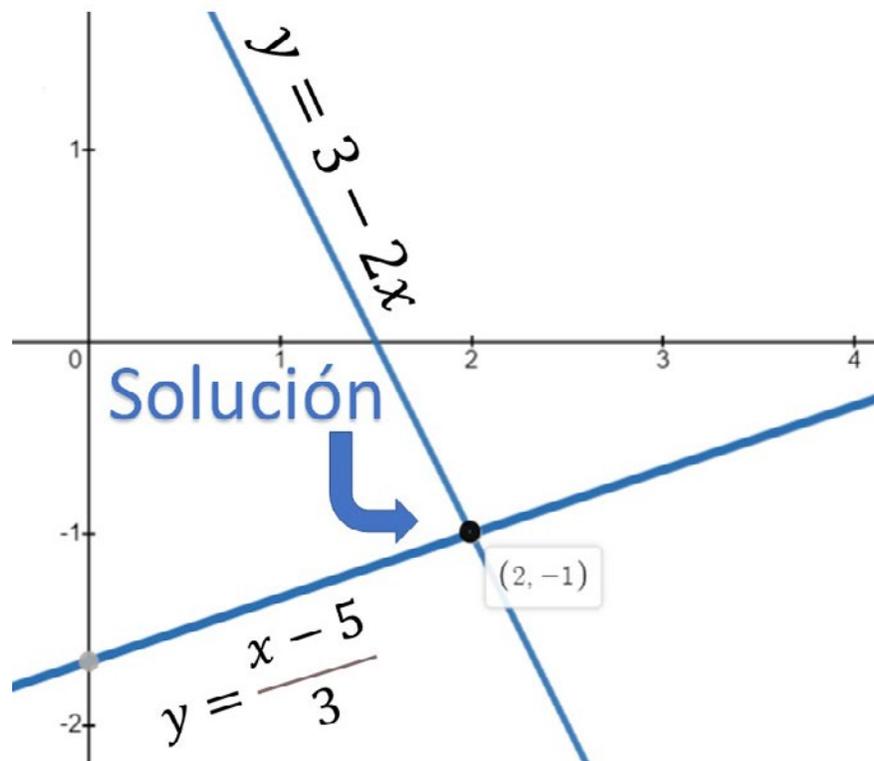


Figura 1.4. Solución gráfica del ejemplo 1.8.

Nótese que el punto de corte de las dos ecuaciones $(x, y) \rightarrow (2, -1)$ que son exactamente las mismas soluciones para el problema del sistema de ecuaciones que se viene resolviendo en esta sección.

Los tres primeros métodos se pueden aplicar a sistemas más grandes 3×3 , 4×4 , ..., $N \times N$, a manera de ejemplo considérese el siguiente ejemplo.

Sección 1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplo 1.9. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 5 \\ x - y + 2z &= 8 \\ 3x - 2y - 2z &= 7 \end{aligned}$$

Solución: para resolver este sistema de ecuaciones se puede utilizar cualquiera de los tres primeros métodos vistos en esta sección, sin embargo, por la naturaleza de las ecuaciones aquí presentadas, resulta más simple aplicar eliminación por reducción.

Para ello se toman la primera y segunda ecuación y se eliminan de ellas cualquier variable, tómesese la x , por ejemplo.

$$\begin{aligned} (2x + 3y + z = 5) \times -1 &\rightarrow -2x - 3y - z = -5 \\ (x - y + 2z = 8) \times 2 &\rightarrow \underline{2x - 2y + 4z = 16} \\ &0 - 5y + 3z = 11 \quad (c) \end{aligned}$$

Se repite este procedimiento, eliminando la misma letra para otro par de ecuaciones distintas, pueden ser la ecuación dos y la ecuación tres del problema.

$$\begin{aligned} (x - y + 2z = 8) \times 3 &\rightarrow 3x - 3y + 6z = 24 \\ (3x - 2y - 2z = 7) \times -1 &\rightarrow \underline{-3x + 2y + 2z = -7} \\ &0 - y + 8z = 17 \quad (d) \end{aligned}$$

Ahora se toma la ecuación (c) y la ecuación (d) y se resuelven de forma independiente; de nuevo se usa eliminación por reducción eliminando la z .

$$\begin{aligned} (-5y + 3z = 11) \times -8 &\rightarrow 40y - 24z = -88 \\ (-y + 8z = 17) \times 3 &\rightarrow \underline{-3y + 24z = 51} \\ &37y = -37 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$37y = -37 \rightarrow y = \frac{-37}{37} = -1$$

Conocido el valor de y , se puede reemplazar en la ecuación (c) o (d) para encontrar los valores de z . En este caso se usa la ecuación (d)

$$-y + 8z = 17 \rightarrow 1 + 8z = 17 \rightarrow 8z = 16 \rightarrow z = 2$$

Conocido ahora el valor de z y el valor de y , en las ecuaciones originales se puede encontrar el valor de x .

$$2x + 3y + z = 5 \rightarrow 2x + 3(-1) + 2 = 5 \rightarrow 2x - 3 + 2 = 5 \rightarrow x = 3$$



Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ 4x - 2y - 3z &= 8 \\ 3x - 2y - 2z &= 7 \end{aligned}$$

Usando método de reducción

Solución



Usando método de Cramer



Por tanto, las soluciones para el sistema mostrado son

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Un sistema de tres ecuaciones con tres variables cada una se puede todavía graficar en el espacio tridimensional R^3 y aunque necesita un análisis ligeramente diferente para obtener la representación, resulta interesante ver el comportamiento gráfico de las expresiones algebraicas. El conjunto de ecuaciones del problema anterior se puede representar tal como se muestra en la figura 1.5.

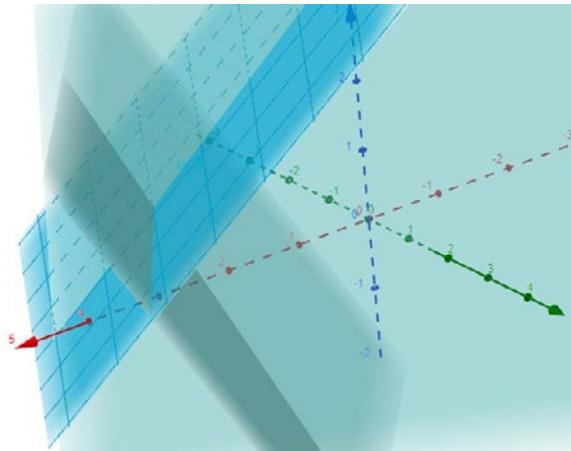


Figura 1.5. Representación en el espacio tridimensional del sistema de ecuaciones del problema 1.9. Obtenida del portal WEB de Geogebra.

Cada una de las ecuaciones lineales del problema es representada en el plano cartesiano por un semiplano, y estos se interceptan de a dos a lo largo de una línea recta, pero los tres planos se interceptan en un único punto que corresponde al punto $(2, -1, 3)$ y que es igual a la solución obtenida por el método analítico.

Ejercicios sección 1.2. Sistemas de ecuaciones lineales.

Dados los siguientes sistemas 2×2 , encuentre la solución de cada uno utilizando reducción por sustitución, por igualación, por eliminación y método gráfico.

$$1. \begin{cases} x + 3y = 6 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x + 5y = 5 \\ -4x - 10y = -7 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ 8x - 9y = -77 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -13y + 11x = -163 \\ -8x + 7y = 94 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 10x + 18y = -11 \\ 16x - 9y = -5 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{x}{2} + y = 12 \\ 2x + \frac{y}{2} = 4 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{5x}{6} - y = 4 \\ x - \frac{3y}{2} = 5 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 5 \\ -\frac{x}{4} + y = 6 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 0.1x + 0.2y = 10 \\ 0.3x - 0.4y = -8 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 0.5x + 1.5y = 1 \\ 3.5x - 2.5y = 6 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = \frac{3}{5} \\ \frac{3}{2}x - y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 0.5x + \frac{1}{2}y = -2 \\ \frac{3}{4}x - 2.4y = 4 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 600x + 300y = 1000 \\ 200x - 150y = 3000 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3x - 4y = 41 \\ 11x + 6y = 47 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 9x + 11y = -14 \\ 6x - 5y = -34 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 10x - 3y = 36 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 11x - 9y = 2 \\ 13x - 15y = -2 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \frac{2x}{5} = \frac{y}{4} \\ \frac{y}{4} = \frac{x}{3} - 1 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \frac{3x}{5} + \frac{3}{4}y = 2 \\ 4x - \frac{3y}{2} = 1 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{3y}{5} = 1 \\ \frac{x}{8} - \frac{1}{6}y = 4 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 18x + 5y = -11 \\ 12x + 11y = 31 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 9x + 7y = -4 \\ 11x - 13y = -48 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 12x - 14y = 20 \\ 12y - 14x = -19 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 15x - 1y = 40 \\ 19x - 8y = 236 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 36x - 11y = -14 \\ 24x - 17y = 10 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 12x - 17y = 104 \\ 15x + 19y = -31 \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = -\frac{1}{12} \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{4y}{5} = 2 \\ \frac{2x}{7} - \frac{1y}{4} = 6 \end{cases}$$

Sección 1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

$$33. \begin{cases} \frac{x}{5} = 3(y - 2) \\ \frac{y}{5} + 3x = \frac{224}{5} \end{cases}$$

Dados los siguientes sistemas 2x2, encuentre la solución de cada uno utilizando reducción por eliminación, por sustitución, por igualación y por método gráfico.

$$34. \begin{cases} x = y + 1 \\ 2x + 3 = y \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} x - y = 3 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} x = 2y + 1 \\ x = 3y - 4 \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} x = y \\ 2x + 4y = -3 \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ -x = 5y + 1 \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} m - 3n = 6 \\ m = 4n + 1 \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} 6p - 3q = -2 \\ 4 = 3q + p \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} 0.1r = 0.4s + 0.3 \\ 0.3s = 0.5r \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} t = 3f + 1 \\ t = -4f + 3 \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} 3g = 8h + 3 \\ -4g + h = 12 \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} w + 1 = z \\ -2w + z = 3 \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} 0.2a - 0.3b = 0.5 \\ a = 2b \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} 2a - 3b = 6 \\ b = 0.5a \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y + 4 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} 2a = \frac{1}{2}(b + 3) \\ \frac{1}{3}(a + b) = 4 \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} y = \frac{4(x+1)}{5} \\ \frac{x+y}{3} = 3y \end{cases}$$

$$51. \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$52. \begin{cases} -a + \frac{1}{2}b = 3(a + 3) \\ \frac{a-b}{4} = \frac{a+b}{3} + 1 \end{cases}$$

$$53. \begin{cases} a - 2b = 12 \\ 3a = \frac{a+2b}{0.1} \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} \frac{a}{2} + b = 2 \\ \frac{a}{2} = (b + 1) \end{cases}$$

$$55. \begin{cases} 3x - 2y = -6 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases}$$

$$56. \begin{cases} r = 3s - 3r + 1 \\ s = 2s + 2r - 3 \end{cases}$$

$$57. \begin{cases} 4d = 3s + 1 \\ -s = d + 2 \end{cases}$$

$$58. \begin{cases} 3a + \frac{b}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}(a - b) = b \end{cases}$$

$$59. \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 0.3y = 0.2x + 0.4 \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} n + m = 0 \\ m = 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \end{cases}$$

Dados los sistemas 3×3 , encuentre la solución de cada uno usando el método que considere más conveniente.

Sección 1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

$$61. \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x - 2y - 3z = 8 \\ 3x - 2y - 2z = 7 \end{cases}$$

$$62. \begin{cases} 2x + 3y - z = 11 \\ 4x - 2y - 3z = 9 \\ 3x - 2y - 2z = 5 \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x - 2y - 3z = -5 \\ 3x - 2y - 2z = -5 \end{cases}$$

$$64. \begin{cases} 2x + 3y - z = 11 \\ 3x - 2y - 3z = 1 \\ 3x - 2y + 5z = -7 \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} 2x + 3y - z = -10 \\ 3x - 2y - 3z = -14 \\ 3x - 2y + 5z = -2 \end{cases}$$

$$66. \begin{cases} 2x + 3y + 7z = 2 \\ 3x + 4y - 3z = -17 \\ -4x + 5y + 3z = 16 \end{cases}$$

$$67. \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ 3x + 4y + 3z = 9 \\ -4x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

$$68. \begin{cases} 2x + 3y - z = 600 \\ 3x + 4y + 3z = 1050 \\ -4x + 5y - 3z = 200 \end{cases}$$

$$69. \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 215 \\ 3x + 4y + 2z = -70 \\ -4x + 5y - 3z = 780 \end{cases}$$

$$70. \begin{cases} 2x + 3y - 4z = -128 \\ 3x + 4y + 2z = -39 \\ -4x + 5y - 3z = -305 \end{cases}$$

$$71. \begin{cases} 0.12a + 0.45b - 0.31c = 0.09 \\ 0.14a - 0.24b - 0.17c = -0.85 \\ 0.23a + 0.35b + 0.23c = 1.62 \end{cases}$$

$$72. \begin{cases} 0.29a + 0.45b + 0.32c = -0.67 \\ 0.12a + 0.23b + 0.16c = -0.24 \\ 0.38a + 0.44b - 0.21c = 1.67 \end{cases}$$

$$73. \begin{cases} 0.29a + 0.45b + 0.32c = 1.41 \\ 0.12a + 0.23b + 0.16c = 0.65 \\ 0.76a + 0.44b - 0.21c = 0.24 \end{cases}$$

$$74. \begin{cases} 0.7a + 1.0b + 0.8c = 4.5 \\ 0.8a + 0.7b + 0.3c = 4.6 \\ 0.9a + 0.5b + 0.2c = 4.3 \end{cases}$$

$$75. \begin{cases} 0.2a + 0.2b + 0.4c = -0.6 \\ 0.3a + 0.8b + 0.1c = 2.1 \\ 0.4a + 0.1b + 0.9c = -2.6 \end{cases}$$

$$76. \begin{cases} 0.3a + 0.9b + 0.4c = 3.24 \\ 0.2a + 0.1b + 0.5c = 1.80 \\ 0.7a + 0.8b + 0.2c = 1.80 \end{cases}$$

$$77. \begin{cases} 0.81a + 0.35b + 0.55c = 2.77 \\ 0.16a + 0.14b + 1.00c = 3.90 \\ 0.56a + 0.86b + 0.80c = 1.74 \end{cases}$$

$$78. \begin{cases} 0.68a + 0.39b + 0.46c = 5.17 \\ 0.97a + 0.01b + 0.87c = -22.01 \\ 0.24a + 0.51b + 0.05c = 20.25 \end{cases}$$

$$79. \begin{cases} 0.20a + 0.78b + 0.20c = 67.26 \\ 0.19a + 0.85b + 0.87c = -197.25 \\ 0.38a + 0.39b + 0.14c = 75.63 \end{cases}$$

$$80. \begin{cases} 0.31a + 0.49b + 0.72c = 463 \\ 0.15a + 0.78b + 0.40c = 467 \\ 0.48a + 0.01b + 0.98c = 350 \end{cases}$$

Dados los sistemas 2×2 que se muestran a continuación, aplique cualquier método de solución, posteriormente interprete la respuesta usando análisis gráfico.

$$81. \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$82. \begin{cases} -3x - 2y = 1 \\ 6x + 4y = -2 \end{cases}$$

$$83. \begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ -8x + 6y = 4 \end{cases}$$

$$84. \begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 10x - 6y = 3 \end{cases}$$

$$85. \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$86. \begin{cases} 2x - 6y = 5 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$$

Dados los sistemas 4×4 que se muestran a continuación, busque en la RED un aplicativo que permita encontrar la solución

Sección 1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

$$87. \begin{cases} 3x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 57 \\ 3x_1 + 14x_2 + 19x_3 + 6x_4 = 112 \\ 10x_1 + 16x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 120 \\ 14x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 18x_4 = 104 \end{cases}$$

$$88. \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 10 \\ 8x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 18 \\ 6x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 8 \end{cases}$$

$$89. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -9 \\ 7x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 8x_4 = -10 \\ 9x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = -18 \\ 8x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$90. \begin{cases} 350x_1 + 998x_2 + 338x_3 + 267x_4 = 2734 \\ 233x_1 + 152x_2 + 203x_3 + 374x_4 = 1200 \\ 631x_1 + 654x_2 + 122x_3 + 544x_4 = 4668 \\ 715x_1 + 348x_2 + 403x_3 + 405x_4 = 1676 \end{cases}$$

$$91. \begin{cases} 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -13 \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 = -3 \\ 9x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 8x_4 = -26 \\ 6x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = -17 \end{cases}$$

$$92. \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -14 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -6 \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 2 \end{cases}$$

Sección 1.3. Fórmulas y relaciones algebraicas

SECCIÓN 1.3	FÓRMULAS Y RELACIONES ALGEBRAICAS
-----------------------	--

Una fórmula en el área de las matemáticas o las ciencias es una expresión por lo general algebraica que relaciona variables, cantidades y/o parámetros, que sirve para describir el funcionamiento o la operación de un sistema y de ahí su importancia. Si es posible definir una expresión matemática (por lo general en una fórmula o combinación de ellas) para una situación de naturaleza económica, administrativa, de ingeniería o de cualquier índole y esta la representa acertadamente, entonces existe una comprensión profunda de la situación lo que a su vez permite en cierta medida controlar o predecir. A lo largo del pregrado el estudiante deberá familiarizarse con diversas fórmulas aplicadas a contextos variados y es el objetivo de la presente sección, aprender a utilizarlas y manipularlas.

Fórmulas

Aunque existen diversas definiciones para una fórmula dependiendo del contexto y la rama del conocimiento que se esté tratando, en matemáticas elementales se puede decir que una fórmula es una expresión algebraica que relaciona dos o más variables. Para ejemplificar esto, tómesese como referencia la segunda ley de Newton en su expresión más simple.

$$F = m \cdot a \quad [\text{Ec. 1.2}]$$

Esta fórmula establece que la fuerza (F) que experimenta o ejerce un cuerpo es igual al producto entre su masa (m) y su aceleración (a); dependiendo de otros factores (que no son del interés de este libro), a muchos fenómenos naturales se les puede aplicar esta ecuación y en este sentido resulta útil.

Ejemplo 1.10. Para la segunda ley de Newton, encuentre la fuerza que experimenta un cuerpo de 12 kg cuando se acelera a:

$$(a) 5 \frac{m}{s^2} ; (b) 10 \frac{m}{s^2} ; (c) 40 \frac{m}{s^2}$$

Solución: Las fórmulas resultan útiles porque conocidas algunas de sus variables, se pueden encontrar otras. Usando la ecuación 1.2., donde $m = 12$ y los valores de aceleración son cada uno de los casos planteados se obtiene.

- $F = 12 \cdot 5$ multiplicando $F = 60$ newton
- $F = 12 \cdot 10$ multiplicando $F = 120$ newton
- $F = 12 \cdot 40$ multiplicando $F = 480$ newton

Realmente las unidades de las cantidades tampoco son objetivos de este libro, pero sí las operaciones matemáticas asociadas.

LA IMPORTANCIA DE LAS MATEMÁTICAS

Las matemáticas desempeñan un papel fundamental en diversas áreas de la vida profesional, tal como sucede en el campo de las ciencias e ingeniería, donde se requieren para realizar cálculos y modelar fenómenos naturales complejos.

En el ámbito de las finanzas y los negocios, las matemáticas son fundamentales para realizar cálculos financieros, evaluar riesgos y tomar decisiones informadas; los profesionales financieros las utilizan para determinar intereses, tasas de interés, tipos de crédito y realizar análisis de inversión. La comprensión de los conceptos matemáticos en finanzas es crucial para tomar decisiones financieras sólidas y maximizar los rendimientos, además, que son fundamentales en la gestión de presupuestos, la planificación financiera y la evaluación de proyectos.

En el campo de la tecnología e informática, las matemáticas son la base del diseño y desarrollo de algoritmos, la criptografía y la programación; los profesionales en estas áreas las usan para resolver problemas complejos, optimizar algoritmos y garantizar la seguridad de los sistemas informáticos.

Desde la creación de software hasta el desarrollo de algoritmos de inteligencia artificial, las matemáticas son esenciales para el avance tecnológico y la innovación.

Sección 1.3. Fórmulas y relaciones algebraicas

En otras situaciones, es posible que sea necesario despejar una variable dentro de una fórmula; en adición a lo aprendido en la sección 1.1., de este capítulo en lo concerniente al despeje, se debe tener en cuenta lo siguiente:

ESTRATEGIAS PARA DESPEJAR UNA VARIABLE

1. Para eliminar una potencia se debe sacar raíz de esa misma potencia.
2. Para eliminar una raíz se debe potenciar al mismo índice de la raíz.

Cuando se analicen funciones más complejas en los siguientes capítulos, se detallará el procedimiento para despejar las variables.

Ejemplo 1.11. Dada la expresión $v^2 = v_i^2 - 2ax$, que representa la relación entre la velocidad que adquiere un cuerpo en términos de la aceleración y el espacio recorrido, despejar v_i .

Solución: esta es otra fórmula de la física clásica cuyo significado no viene a discusión, pero si el despeje de lo solicitado. Partiendo de lo aprendido se tiene entonces que es necesario mover la expresión $2ax$ a la izquierda.

$$v^2 = v_i^2 - 2ax \quad \rightarrow \quad v^2 + 2ax = v_i^2$$

Como la variable solicitada tiene un cuadrado, es necesario aplicar raíz tanto a la derecha como a la izquierda para mantener la igualdad y eliminar este cuadrado.

$$\sqrt{v_i^2} = \sqrt{v^2 + 2ax}$$

Simplificando se llega a:

$$v_i = \sqrt{v^2 + 2ax}$$

Que es la expresión solicitada en el problema.

En ciencias afines a la ingeniería y en administración las fórmulas son de uso muy frecuente para modelar sistemas y predecir el comportamiento de los sistemas.

Ejemplo 1.12. Dada la expresión algebraica $v^2 = v_i^2 + 2ax$ complete la siguiente tabla.

Caso	v	v_i	a	x
I		5	2	4
II	6		3	2
III	7	3	2	
IV	5	2		3

Sección 1.3. Fórmulas y relaciones algebraicas

Solución: nótese que en la tabla hay diferentes casos y en cada uno, falta un solo dato, el cual se obtiene despejando de la ecuación la variable solicitada y reemplazando los datos proporcionados en las otras.

Caso I. Basta con reemplazar en la ecuación del problema y sacar raíz cuadrada para eliminar el cuadrado.

$$v^2 = v_i^2 + 2ax \quad v = \sqrt{v_i^2 + 2ax}$$

$$v = \sqrt{5^2 + 2(2)(4)} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

Caso II. Despejando a v_i se tiene:

$$v^2 = v_i^2 + 2ax \quad v_i = \sqrt{v^2 - 2ax}$$

$$v_i = \sqrt{6^2 - 2(3)(2)} = \sqrt{36 - 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Caso III. Despejando x se obtiene:

$$v^2 = v_i^2 + 2ax \quad \rightarrow \quad v^2 - v_i^2 = 2ax \quad \rightarrow \quad \frac{v^2 - v_i^2}{2a} = x$$

Reemplazando los valores se obtiene:

$$x = \frac{v^2 - v_i^2}{2a} = \frac{7^2 - 3^2}{2(2)} = \frac{49 - 9}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Caso IV. De forma similar al caso anterior se despeja a .

$$v^2 = v_i^2 + 2ax \quad \rightarrow \quad v^2 - v_i^2 = 2ax \quad \rightarrow \quad \frac{v^2 - v_i^2}{2x} = a$$

$$a = \frac{v^2 - v_i^2}{2x} = \frac{5^2 - 2^2}{2(3)} = \frac{25 - 4}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

Finalmente, la tabla queda con los valores.

Caso	v	v_i	a	x
I	$\sqrt{41}$	5	2	4
II	6	$2\sqrt{6}$	3	2
III	7	3	2	10
IV	5	2	3,5	3

Que era la pregunta formulada en el problema.

n!

El factorial de un número entero positivo n , denotado por $n!$, es el producto de todos los números enteros positivos desde 1 hasta el número y es usado en matemáticas, especialmente en probabilidad, estadística, teoría combinatoria y análisis numérico.

Así, el factorial de un número se calcula como:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \cdot 1 = 1 \\ 2! &= 2 \cdot 1 = 2 \\ 3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \\ 4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \\ 5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \\ n! &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$



Encuentre la posibilidad de que una persona jugando una boleta, gane en el juego del baloto para Colombia.

Solución



Sección 1.3. Fórmulas y relaciones algebraicas

**Relaciones
proporcionales directas**

Si una variable se relaciona proporcionalmente directa con otra, esto se denota por

$$y = kx$$

Y su gráfica es

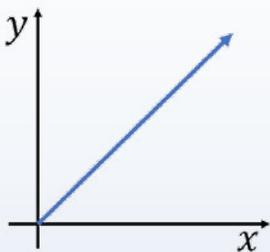


Figura 1.6. Relación directamente proporcional.

Donde k es la constante de proporcionalidad.

Si una variable se relaciona proporcionalmente con el cuadrado de otra, esto se denota por

$$y = kx^2$$

Y su gráfica es

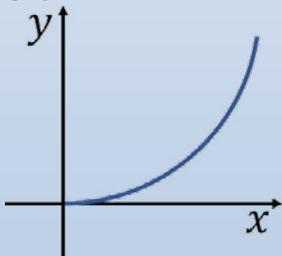


Figura 1.7. Representación de la relación proporcional cuadrada.

Relaciones entre variables

Existen diversas formas en las cuales las variables pueden relacionarse, sin embargo, es posible agrupar muchas de estas variaciones en dos grandes grupos con características muy interesantes; estas son las variaciones directas y variaciones inversas.

Dos cantidades están en variación directa si el incremento de una ocasiona el incremento de la otra o viceversa; son ejemplos de variación directa proporcional por ejemplo la masa y el volumen en líquidos, cuando aumenta el volumen de un líquido, necesariamente debe aumentar su masa.

Definición 1.2. Variación proporcional directa: si x e y son dos variables relacionadas y la relación es directamente proporcional, entonces esta se representa con:

$$y \propto x$$

Para que esta proporción se convierta en igualdad, es necesario agregar una constante de proporcionalidad k

$$y = kx \quad [\text{Ec. 1.3}]$$

El siguiente problema ilustra claramente un tipo de relación proporcional lineal al igual que una aplicación real de estas relaciones.

Ejemplo 1.13. La velocidad del sonido en el aire a 20°C es aproximadamente 340 m por cada segundo. ¿Cuál es la distancia recorrida al cabo de 6 segundos?

Solución: Aquí el espacio (x) es proporcional al tiempo (t), a más tiempo, más espacio recorre la onda.

$$x \propto t$$

La constante de proporcionalidad son los 340 metros cada segundo, así es posible escribir:

$$x = 340t$$

Al cabo de 6 segundos, la onda habrá recorrido

$$x = 340(6) = 2040\text{m}$$

Existe otro tipo de relación, la proporcionalidad inversa; en esta situación cuando una variable aumenta la otra disminuye, un ejemplo de este tipo de proporcionalidad es la relación entre el precio y la oferta; cuando un bien o un servicio son muy ofertados su precio tiende a bajar.

Sección 1.3. Fórmulas y relaciones algebraicas

Definición 1.3. Variación proporcional inversa. Si x e y son dos variables relacionadas y la relación es inversamente proporcional, entonces esta se representa con:

$$y \propto \frac{1}{x}$$

Para que esta proporción se convierta en igualdad, es necesario agregar una constante de proporcionalidad k .

$$y = \frac{k}{x} \quad [\text{Ec. 1.4}]$$

La siguiente es una aplicación de relaciones inversas entre variables.

Ejemplo 1.14. Bajo ciertas condiciones especiales de mercado, se logra establecer que el precio unitario de venta en dólares de cierto artículo depende inversamente de la cantidad de artículos ofertados, según se muestra en la relación.

$$c = \frac{1200}{x}$$

Determine el costo de cada artículo si al mercado se ofrecen: 100 artículos, 300 artículos.

Solución: reemplazando en la anterior expresión se tiene que para 100 artículos:

$$c = \frac{1200}{x} = \frac{1200}{100} = 12 \text{ Dólares.}$$

Para 300 artículos:

$$c = \frac{1200}{x} = \frac{1200}{300} = 4 \text{ Dólares}$$

Entre más artículos se ofrezcan al mercado, menor será su precio, lo cual permite establecer que la relación es proporcional inversa.

Ejemplo 1.15. La velocidad de una partícula en un movimiento rectilíneo uniforme está definida mediante la siguiente expresión:

$$v = v_i + at$$

Encuentre una expresión para el tiempo en términos de las demás variables.

Solución: usando la técnica de transposición se debe aislar la variable $-a-$, para ello nótese que la acompañan en el lado izquierdo de la igualdad, la velocidad inicial v_i y el tiempo t , este último está multiplicando a la variable $-a-$ y suma a la velocidad inicial, por lo que está realizando dos operaciones fundamentales y por ahora no se puede transponer; por otro lado, la velocidad inicial está sumando exclusivamente a la

Relaciones Proporcionalmente Inversas

Si una variable se relaciona inversamente proporcional con otra, esto se denota por

$$y = \frac{k}{x}$$

Y su gráfica es

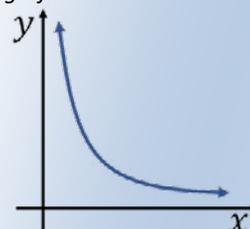


Figura 1.8. Relación inversamente proporcional

Donde k es la constante de proporcionalidad.

Si una variable se relaciona inversamente proporcional con el cuadrado de otra, esto se denota por

$$y = \frac{k}{x^2}$$

Y su gráfica tiene casi el mismo comportamiento

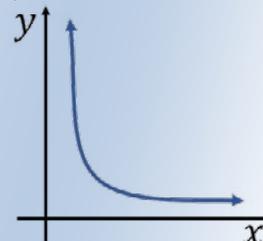


Figura 1.9. Representación de la relación inversa proporcional cuadrada.



Sección 1.3. Fórmulas y relaciones algebraicas

**Principios
fundamentales para el
manejo de Ecuaciones**

1. Sumar una misma cantidad positiva o negativa a ambos miembros de una ecuación no la altera.
2. Restar una misma cantidad positiva o negativa a ambos miembros de una ecuación no la altera.
3. Multiplicar una misma cantidad positiva o negativa a ambos miembros de una ecuación no la altera.
4. Dividir una misma cantidad positiva o negativa a ambos miembros de una ecuación no la altera.
5. Elevar a cualquier potencia, ambos miembros de una ecuación no la alteran.
4. Obtener la raíz, de cualquier índice, a ambos miembros de una ecuación no la altera.

aceleración y al tiempo por lo cual se puede pasar al lado derecho de la ecuación a restar.

$$v - v_i = at$$

En esta última expresión, el tiempo únicamente multiplica a la aceleración, en consecuencia, puede pasar a dividir.

$$\frac{v - v_i}{t} = a$$

Es una costumbre que la variable dependiente o despejada, se ubique en el miembro de la izquierda, y como se tiene una igualdad, se pueden intercambiar libremente.

$$a = \frac{v - v_i}{t}$$

Ejemplo 1.16. El valor futuro (VF) de una inversión dado un interés i , con un valor presente VP está dado por la expresión:

$$VF = VP(1 + i)^2$$

Determine el interés si USD1,000 se convierten en USD1,200 al finalizar el periodo.

Solución: es necesario despejar el interés del miembro derecho de la ecuación, para ello nótese que el valor presente (VP) está multiplicando, debe pasar a dividir.

$$\frac{VF}{VP} = (1 + i)^2$$

Para eliminar el cuadrado, se saca raíz a ambos lados de la ecuación.

$$\sqrt{\frac{VF}{VP}} = \sqrt{(1 + i)^2} \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{VF}{VP}} = 1 + i$$

El 1, está sumando, pasa a restar, con lo cual se llega a la expresión

$$i = \sqrt{\frac{VF}{VP}} - 1$$

Reemplazando los valores, se tiene que:

$$i = \sqrt{\frac{1200}{1000}} - 1 \approx 0.09545$$

Así, al finalizar los periodos, el dinero tuvo rendimiento del 9,5%

Sección 1.3. Fórmulas y relaciones algebraicas

Ejercicios sección 1.3. Fórmulas y relaciones algebraicas.

Dadas las siguientes expresiones algebraicas, complete las tablas que se muestran a continuación.

1. $c^2 = a^2 + b^2$

A	b	C
2	3	
	4	5
12		13

2. $x = \frac{at^2}{2}$

x	a	T
20	10	
	4	5
12		13

3. $m^2 = n^2 - 3t$

m	n	T
8	3	
	4	5
12		13

4. $\rho = \frac{m}{v}$

ρ	m	V
2	3	
	4	5
12		6

5. $q = \sqrt{m^2 + n}$

q	m	N
2	3	
	4	5
6		20

6. $r = \frac{1}{m+1} - n$

r	m	N
4	6	
	4	5
6		12

7. $c^3 = a^3 + b^3$

a	b	C
2	3	
	4	5
12		13

8. $v^2 = v_1^2 - 2ax$

v	v ₁	a	x
20	10		100
	4	-5	4
12		8	5

9. $m^2 = n^2 + 3t$

m	n	t
8	3	
	4	5
12		13

10. $L = L_i + \alpha \Delta T$

L	L _i	α	ΔT
4	3		8
	4	5	3
12		4	2

11. $q = \sqrt{m^2 + 1} + n$

q	m	n
2	3	
	4	5
6		20

12. $r = \frac{1}{m^2} - n$

r	m	n
4	6	
	4	5
6		12

Sección 1.3. Fórmulas y relaciones algebraicas

13. $a^2c^2 = b^2 + 1$

a	b	c
2	3	
	4	5
12		13

14. $F = \frac{m_1m_2}{r^2}$

F	m_1	m_2	r
20	10	2	
	40	50	2
100	4	8	

15. $m^2 = n^2 - t^2$

m	n	t
8	3	
	4	5
12		13

16. $\rho = \frac{m}{v}$

ρ	m	v
20	30	
	24	50
12		16

17. $q^2 = \sqrt{m^2 + n^2}$

Q	m	n
20	3	
	4	5
60		20

18. $r^2 = \frac{1}{m+1} - n^2$

r	m	n
4	6	
	4	5
6		12

Problemas de aplicación

A continuación, usted va a encontrar una serie de situaciones problema en diversas áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), las cuales debe interpretar, modelar y resolver para dar cuenta de la solución. Ilustre y explique claramente los modelos propuestos, identificando las variables utilizadas, explicando también la estrategia de solución y la calidad de la solución encontrada

19. **Rentabilidad.** La rentabilidad en una empresa en función del precio de uno de sus productos (p), el número de artículos vendidos (n) y el tiempo (t) en meses está dado por la expresión matemática

$$U = 1000(n - 0.5p)t$$

- Cuando la empresa vende 1000 artículos a un precio de \$300 durante 5 meses, ¿qué utilidad obtiene?
- Si proyecta vender 800 artículos cuál es el máximo precio de venta si se desea obtener alguna utilidad?
- Si se quiere una utilidad de 2 millones de pesos al cabo de 5 meses cuando los artículos

cuestan \$400, ¿cuántos artículos se deben vender?

20. **Energía eléctrica.** Un equipo electrónico consume una potencia (P) dada por la expresión matemática

$$P = 1.2V(1 + I)^2$$

Donde V es la tensión e I la corriente eléctrica expresada en miliamperios.

- Cuál es la potencia consumida cuando el voltaje es de 5V y la corriente de 2mA
- Cuál es la tensión si en un momento determinado el equipo consume 40mW cuando la corriente es de 1mA.

Sección 1.3. Fórmulas y relaciones algebraicas

c.Cuál es la corriente si en un momento determinado el equipo consume 25W cuando el voltaje es 0,5V.

21. Las **combinaciones sin repetición** que se pueden obtener de m elementos tomados de n en n tal, que $m \geq n$ son todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos cumpliendo las siguientes condiciones:

- Participan algunos elementos.
- El orden no importa.
- La repitencia de elementos no se presenta.

Está dado por la expresión

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

En un curso de matemáticas I de 30 alumnos se va a realizar un trabajo en grupos de 4. Cuántos grupos diferentes podrían conformarse.

22. Las **combinaciones con repetición** que se pueden obtener de un total de m elementos tomados de n en n donde $m \geq n$, son todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos cumpliendo las siguientes condiciones:

- Participan algunos elementos.
- El orden no importa.
- La repitencia de elementos se puede presentar.

Está dada por la expresión

$$CR_m^n = \frac{(m+n-1)!}{n! \cdot (m-1)!}$$

El menú de un restaurante consta de 8 platos de alta cocina, de cuántas formas diferentes 5 personas podrían escoger platos de este menú.

23. Las **variaciones con repetición** de un total de m elementos tomados de n en n que se

pueden obtener cumpliendo las siguientes condiciones

- No entran todos los elementos si $m > n$.
- Participan todos los elementos si $m \leq n$.
- El orden Sí importa.
- Se pueden repetir los elementos.

Está dado por la expresión

$$VR_m^n = m^n$$

Actualmente en Colombia el sistema de placas para automóviles está diseñado con tres letras y tres números; si cada letra se puede escoger de 26 opciones –A, B, C, ..., Z– y cada número se puede escoger del 0 al 9, siendo primero las letras y luego los números.



Imagen tomada de : asesoriasantetransito.com

¿Cuántas placas diferentes se pueden obtener para carros en Colombia?

24. Las permutaciones de un total de m elementos, con $m = n$ que se pueden obtener teniendo en cuenta que:

- Participan todos los elementos.
- El orden sí importa.
- La repitencia de elementos no se presenta.

Está dada por la expresión

$$P_m = m!$$



Imagen tomada de: formula1.com

En una competencia de Fórmula 1 se tienen solamente 5 escuderías. Asumiendo que

Sección 1.3. Fórmulas y relaciones algebraicas

todas tienen un vehículo y que terminan la carrera, de cuántas formas diferentes podrían llegar a la meta los autos.

25. En **permutaciones con repetición** de n elementos donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces, el tercero c veces y así sucesivamente y

$$n = a + b + c + \dots$$

Teniendo en cuenta que:

- Participan todos los elementos.
- El orden sí importa
- La repetencia de elementos se puede presentar

Está dado por la expresión

$$PR_n^{a,b,c,\dots} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \dots}$$

Una torre de control, cuenta con un dispositivo que envía señales de diferentes colores según sea la aeronave que vaya a aterrizar en cierto aeropuerto, se cuentan con cuatro focos que emiten luces de color verde, tres de color naranja y cinco azules. Con la colocación de los 12 focos, ¿Cuántas señales de colores se pueden transmitir?



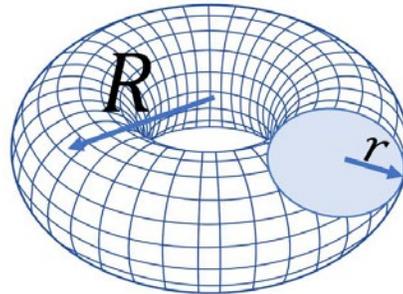
Imagen adaptada de: baloto.com

26. **Lotería:** El baloto es un juego de azar que en sus primeras versiones, consistía en escoger seis balotas de un conjunto de 45 posibles. Aquí el orden en que salen las balotas no importa y una vez una sale, no puede volver a salir, por lo que no se repiten. Dadas estas condiciones, ¿cuántas combinaciones diferentes se pueden formar en este juego?.

27. **El toroide.** El volumen de un toroide está dado por la expresión

$$V = 2\pi^2 Rr^2$$

Donde R es el radio al eje de rotación del isobaricentro del círculo generatriz y r el radio de este círculo.



- Cuál es el volumen de un toroide que tiene de radio al eje de rotación de 12cm y una sección circular de radio 2 cm.
- Si un segundo toroide tiene un volumen de 800 cm^3 y un radio al eje de rotación de 14 cm, determine el radio de la sección transversal.
- Proponga por lo menos cuatro pares de valores para los radios en un toroide de 600 cm^3 ; tenga en cuenta que el radio al eje del toroide no puede ser igual o inferior al radio del círculo generatriz para que la expresión de volumen sea válida.

28. **Interés compuesto.** El interés compuesto que aplica una entidad financiera cuando presta un capital está dado por la expresión

$$VF = VP \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Donde VF es el valor futuro o dinero producido al prestar un capital VP a un interés r compuesto durante n periodos de tiempo a un tiempo t representado en años. Si al señor Pérez el banco le presta un capital de US\$8000 a un interés semestral del 5% por un término de dos años, cuánto deberá pagar al finalizar este tiempo.

SECCIÓN

1.4

PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON ECUACIONES LINEALES

Las matemáticas son una de las herramientas que tiene la humanidad para comprender el universo, modelando y prediciendo su comportamiento al igual que controlando algunas situaciones específicas que se dan en él y esta es posiblemente la razón fundamental de la importancia del estudio de las matemáticas para los ingenieros. En esta sección se analizan algunos problemas que pueden ser modelados a través de las ecuaciones lineales, que está íntimamente relacionados con las funciones, sin embargo, el problema consiste en a partir de una situación problema en un contexto determinado, poder obtener un modelo algebraico que lo pueda representar.

Modelación

La representación o modelación es un estrategia que se basa en asignar algunos atributos artificiales –y para el caso de estudio, atributos matemáticos– o un conjunto de ellos, a situaciones reales o hipotéticas, con el fin de representar una determinada circunstancia; en esta sección se hace referencia a sistemas que se pueden representar a través de ecuaciones, especialmente lineales y que además se pueden manipular a través de la de las propiedades de los números reales y las funciones y ecuaciones.

Para lograr esto, es necesario hacer la transformación expresiones literales en expresiones matemáticas como lo son las expresiones algebraicas; la siguiente tabla ilustra algunas de estas transformaciones.

Tabla 1.1. Equivalencia literal a algebraico

Expresión verbal	Expresión algebraica
Un número	x
Dos veces un número	$2x$
El doble de un número	$2x$
Un número más dos	$x + 2$
Tres más que el doble de un número	$2x + 3$
Un número menos cuatro	$x - 4$
Cuatro restado de un número	$x - 4$
Cuatro menos un número	$4 - x$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
El cuadrado de un número más uno	$x^2 + 1$
La mitad del cubo de un número	$\frac{x^3}{2}$
El 10% de un número	$0.1x$
El cuadrado de un número más el doble del número	$x^2 + 2x$
El número incrementado en tres	$x + 3$



Imagen tomada de <http://7icons.wordpress.com/>

El porcentaje (%) en matemáticas es una forma de representar una comparación usando una escala de 0 a 100, donde normalmente el cero es nulidad y el 100 es la totalidad. El 32% de un número x por ejemplo se puede representar como:

$$32\%x$$

Sin embargo, para una correcta manipulación algebraica se debe reescribir esta expresión como una fracción del número, recordando que la comparación se hace con respecto a 100, debería quedar como:

$$\frac{32}{100}x = 0.32x$$

Sección 1.4 Problemas que se resuelven con ecuaciones lineales

Tres veces un número más dos	$3x + 2$
Un número más dos tres veces	$3(x + 2)$
Tres veces la suma de un número más dos	$3(x + 2)$

A pesar de que la tabla en cuestión se utiliza como parámetro la variable x , en realidad es posible utilizar cualquier otra variable; por otro lado, en ciertas ocasiones es necesario establecer la relación entre dos o más cantidades (o números) y por simplicidad y para no aumentar el número de variables –proceso que tiende a complicar los métodos de solución–, conviene representar una cantidad en términos de la otra; la tabla que se anexa a continuación ilustra a manera de ejemplos, estas relaciones.

Tabla 1.2. Equivalencia literal a algebraico

Expresión verbal	Expresión algebraica	
	Primer número	Segundo número
Un número es el doble del otro	x	$2x$
Un número es la mitad del otro	x	$\frac{x}{2}$
Un número es dos menos que el otro	x	$x - 2$
Dos enteros consecutivos	x	$x + 1$
Dos enteros consecutivos	x	$x - 1$
Dos enteros pares consecutivos	x	$x + 2$
Dos enteros pares consecutivos	x	$x - 2$
Un número y el número incrementado un 10%	x	$x + 0.1x$
La suma de dos números es 10	x	$10 - x$
10 repartido entre dos números	x	$10 - x$
Distancia de 12 metros entre dos tramos	x	$12 - x$

De igual manera es posible que existan tres o más variables en el marco de un ejercicio y a partir del contexto del problema se debe establecer la forma en la que estas variables se relacionan;

Precisamente una de las pretensiones de la modelación es encontrar la manera de relacionar estas cantidades o estas variables a través de estructuras matemáticas, para que en conjunto sea viable determinar el valor numérico de cada una de ellas –las variables–, y aunque hay diversas maneras de solucionar problemas a través de la modelación, es posible establecer una estrategia general que ayuda a simplificar el proceso.

ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS

1. Lea el problema cuidadosamente y asegúrese de entender claramente cada parte y lo que le pide resolver.
2. Represente de forma gráfica el problema, puede usar esquemas a los cuales asocie conceptos.
3. Identifique claramente la cantidad o cantidades que se quiere encontrar.
4. Escoja variables para representar las cantidades del problema, es altamente recomendable que utilice la

Sección 1.4 Problemas que se resuelven con ecuaciones lineales

menor cantidad de variables sin que el problema pierda rigurosidad.

5. Lea de nuevo el problema y lo que está expresado verbalmente, reescríbalo expresándolo algebraicamente – a esto se le denomina transposición–.
6. Resuelva el modelo matemático encontrando el valor de todas las variables desconocidas.
7. Interprete la respuesta encontrada y responda a la pregunta formulada en el problema y analice si esta es consistente.

La habilidad para resolver problemas, como cualquier otra habilidad, se desarrolla por medio de la práctica, los ejercicios, el raciocinio, la consulta y acompañamiento de los pares académicos, la contrastación con problemas similares y esto desde luego demanda tiempo y esfuerzo por parte del estudiante.

Ejemplo 1.17. Ecuación lineal. *El doble de un número más tres equivale a quince.*

Solución: *el problema pide encontrar un número, por tanto, se procede a escribir la ecuación.*

$$2x + 3 = 15$$

Nótese que la palabra “equivale” en términos matemáticos se reemplaza por un igual; resolviendo se obtiene

$$2x + 3 = 15 \quad \rightarrow \quad 2x = 15 - 3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{15 - 3}{2}$$

Por tanto

$$x = 6$$

Cumpléndose que el doble de seis más tres es igual a quince.

Tal vez el lector puede encontrar la misma respuesta sin usar ecuaciones, simplemente haciendo un cálculo mental, sin embargo, la intención de esta sección que familiarizar al estudiante con la modelación matemática.

Ejemplo 1.18. *El peaje entre Pereira y Armenia cuesta unos \$16.000 y una persona ha gastado \$96.000 pagando peajes cuando viaja entre estas dos ciudades; si parte de Pereira una vez hecho todos los recorridos, en qué ciudad debería haber quedado.*

Solución: *sabiendo que esta proporción es lineal, se pueden usar ecuaciones de primer grado.*

$$12.000x = 96.000$$

Despejando la variable se tiene



Figura 1.10. Peaje entre Pereira y Armenia.

El peaje es una tasa o tarifa económica que cobra el Estado o un particular cuando este ha construido la vía con recursos propios, para hacer uso de la infraestructura vial; su valor depende básicamente del tipo de vehículo –tamaño o peso– y de la calidad de la vía.

Sección 1.4 Problemas que se resuelven con ecuaciones lineales

$$x = \frac{96.000}{16.000} = 6$$

Aunque es la solución, no es la respuesta a la pregunta; si partiendo de Pereira gasta dos peajes significa que fue a Armenia y regreso, por tanto, números pares de peajes pagados significa que el conductor se encuentra en la ciudad de origen –Pereira en este caso–, números impares de peajes pagados significa que el conductor está en la ciudad de destino –Armenia–.

El anterior es un buen ejemplo de la necesidad de interpretar la solución encontrada para dar una respuesta efectiva a la pregunta.

Los ejemplos 1.19 y los que van del 1.21 a 1.24, son tomados de Murcia y Henao (2021), presentan aplicaciones inherentes de la temática expuesta en este libro.

Ejemplo 1.19. *Una empresa dedicada al alquiler de vehículos les dice a sus clientes que el costo del servicio es un pago único de \$50.000 más \$1.000 por cada kilómetro recorrido. (a). Si la cuenta de un servicio para un determinado cliente es de \$280.000, cuánta distancia recorrió el cliente en el vehículo. (b). La distancia entre Pereira y Bogotá es de 315 km, cuanto debería pagarle un cliente a la empresa de alquiler por un viaje de ida y vuelta entre las dos ciudades.*

Solución: *definiendo como x la cantidad de kilómetros recorridos, el modelo matemático del problema queda:*

$$C = 1.000x + 50.000$$

Donde C es el costo total del servicio, esta expresión sirve para resolver las dos preguntas.

a. *Aquí se proporciona el valor de C , que es 280.000, por tanto:*

$$280.000 = 1.000x + 50.000 \rightarrow 1.000x = 280.000 - 50.000$$

$$x = \frac{230.000}{1.000} = 230$$

El cliente recorre 230 km.

b. *En este caso la distancia recorrida es de 630 km –ida y vuelta– y reemplazando en la ecuación se tiene:*

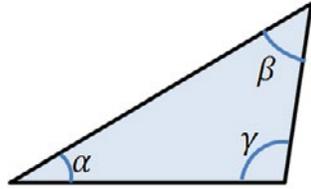
$$C = 1.000(615) + 50.000 = 615.000 + 50.000 = 665.000$$

Ese viaje en el vehículo alquilado tiene un costo de \$665.000.

Este problema usa la función lineal de la cual se hablará más adelante, sin embargo, ya se pueden ir estableciendo relaciones entre las ecuaciones y las funciones.

Sección 1.4 Problemas que se resuelven con ecuaciones lineales

Ejemplo 1.20. Geometría plana. La figura muestra un triángulo escaleno, si un ángulo es 20° menor que el segundo y el tercero es doble del menor aumentado en 40° , cuánto vale cada ángulo.



Solución: defínanse los ángulos así.

$\alpha =$ Angulo menor $\beta =$ Angulo intermedio $\gamma =$ Angulo mayor

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta - 20 \\ \gamma &= 2\alpha + 40\end{aligned}$$

Aquí se tienen dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que se necesita una tercera ecuación y que puede salir del teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo –nótese que el problema NO plantea este teorema sin embargo se debe recurrir a la experiencia y conocimientos previos para concluir acertadamente que se necesita este dato–.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

Y el conjunto de las tres ecuaciones queda:

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta - 20 \quad (i) \\ \gamma &= 2\alpha + 40 \quad (ii) \\ \alpha + \beta + \gamma &= 180 \quad (iii)\end{aligned}$$

Resulta más sencillo despejar de (i) el ángulo β y reemplazar esta expresión y la expresión (ii) en la anterior ecuación:

$$\alpha = \beta - 20 \quad \rightarrow \quad \beta = \alpha + 20$$

$$\alpha + (\alpha + 20) + (2\alpha + 40) = 180$$

Reduciendo la expresión.

$$4\alpha + 60 = 180 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{120}{4} = 30^\circ$$

Una vez conocido α se reemplazan en otras ecuaciones para encontrar los otros ángulos.

$$\beta = \alpha + 20 = 30 + 20 = 50$$

$$\gamma = 2\alpha + 40 = 2(30) + 40 = 60 + 40 = 100$$

En consecuencia $\alpha = 30$; $\beta = 50$; $\gamma = 100$

En geometría plana, la suma de los ángulos internos de cualquier figura cerrada está dada por la expresión

$$\sum \angle_{int} = (n - 2)180$$

Donde n es el número de lados así,

Figura	Lados	Suma
Triángulo	3	180
Cuadrilátero	4	360
Pentágono	5	540

Sección 1.4 Problemas que se resuelven con ecuaciones lineales

Ejemplo 1.21. Al Parque Nacional del Café, en Montenegro – Quindío un día de baja temporada, la máquina registradora contabilizó el ingreso de 2.000 personas entre adultos y niños y la taquilla informa al gerente que se vendió boletería por un valor de \$98.000.000, sabiendo que cada niño paga \$43.000 y cada adulto \$58.000, cuántos niños y cuantos adultos entraron al parque.

Solución: este es otro problema que se puede resolver por sistemas de ecuaciones lineales, estableciendo una ecuación de cantidad y una ecuación de dinero. Para ello, se define como a el número de adultos y como n el número de niños, por tanto, al saber que entraron 2.000 personas entre niños y adultos se puede plantear:

$$a + n = 2.000$$

Cada adulto paga \$58,000 y cada niño para \$43.000, como entraron a adultos y n niños la ecuación de dinero queda:

$$58a + 43n = 98$$

Nótese que en esta expresión se omiten los miles y esto es viable siempre y cuando se omita en todos los términos. Finalmente, el sistema queda:

$$\begin{aligned} a + n &= 2.000 \\ 58a + 43n &= 98.000 \end{aligned}$$



Imagen tomada de <http://jyvmv.com/>

El **interés** es el costo de usar un capital y es **interés simple** cuando se causan durante cada periodo de tiempo únicamente al capital inicial, retirándolos –los intereses– al vencimiento de cada uno de los periodos, evitando que se agregue esta deuda al capital prestado. Su fórmula está dada por:

$$I_s = C \cdot r \cdot t$$

Donde I_s es el interés simple, r es la tasa de interés y t los periodos de tiempo

Aplicando sustitución –igualmente se puede aplicar otro método sin problema–, se tiene:

$$a = 2.000 - n$$

Reemplazando

$$58(2.000 - n) + 43n = 98.000$$

$$116.000 - 58n + 43n = 98.000 \rightarrow -15n = -18.000$$

Luego

$$n = \frac{-18.000}{-15} = 1.200$$

Al parque entran 1.200 niños y fácilmente se puede demostrar que entran 800 adultos.

Otros tipos interesantes de problemas son las **mezclas**, los cuales consisten en encontrar las proporciones exactas de la mezcla de dos o más cantidades –que pueden ser materias primas, intereses de un capital, temperaturas– para obtener un producto. Los ejemplos siguientes ilustran estas aplicaciones.

Ejemplo 1.22. Problema de mezcla. Un comisionista de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC) invierte un capital de USD 12.000 en dos tipos de acciones que al final de año dan un rendimiento –interés simple– del

Sección 1.4 Problemas que se resuelven con ecuaciones lineales

7,5% y el 6,5%. Cuánto capital se invierte en cada tipo de acción si al final del año el comisionista logra una ganancia de USD 850.

Solución: nótese la similitud al problema anterior, sea A la cantidad de capital invertido en el primer tipo de acción y B la cantidad de capital invertido al segundo tipo de acción, por lo tanto, los US\$12.000 se reparten entre los dos tipos de acciones:

$$A + B = 12.000$$

Los porcentajes se aplican a cada capital de la siguiente forma –es importante recordar que se deben eliminar los porcentajes–.

$$0,075A + 0,065B = 850$$

Las ecuaciones quedan entonces.

$$\begin{aligned} A + B &= 12.000 \\ 0,075A + 0,065B &= 850 \end{aligned}$$

Aplicando reducción y multiplicando la primera ecuación por $-0,075$ se obtiene

$$\begin{aligned} -0,075A - 0,075B &= -900 \\ \underline{0,075A + 0,065B} &= \underline{850} \\ -0,010B &= -50 \end{aligned}$$

Así:

$$B = \frac{-50}{-0,01} = 5.000$$

Por tanto, en la acción tipo B se invierten USD 5.000 y en la acción tipo A se invierten USD 7.000.

Ejemplo 1.23. En una acería se quiere obtener 40 toneladas de acero al 0,82% de carbono y se cuenta con dos materias primas, acero al 0,4% y acero al 1,0%. Cuántas toneladas de cada materia prima se deben fundir con la otra, para obtener la calidad de acero solicitada.

Solución: este es otro tipo problema clásico de mezcla, llamando x_1 la cantidad de acero al 0,3% y x_2 la cantidad de acero al 1,0%, la ecuación de cantidad queda:

$$x_1 + x_2 = 40$$

La ecuación de porcentajes para el problema queda.

$$0,4\%x_1 + 1,0\%x_2 = 40(0,82\%)$$

Luego el sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 40 \\ 0,004x_1 + 0,01x_2 &= 0,328 \end{aligned}$$

PROBLEMA

El veterinario de confianza de un granjero le dice que, para mantener a su ganado saludable, en la ingesta diaria de los animales, se les debe proporcionar al menos 3,6 gramos de vitaminas B1, 4 gr de vitamina B2 y 6 gr de vitamina B6. Para ello el granjero tiene a su disposición tres tipos de suplementos dietéticos con sus porcentajes vitamínicos.

	B1	B2	B6
Suplem 01	2%	1%	2%
Suplem 02	2%	2%	2%
Suplem 03	1%	2%	3%

Determine la cantidad de cada uno de los suplementos que debe mezclar el granjero, para garantizar la ingesta vitamínica necesaria con el fin mantener a sus animales sanos.



SOLUCIÓN



Sección 1.4 Problemas que se resuelven con ecuaciones lineales

Multiplicando la primera ecuación por $-0,004$ y sumando las dos expresiones se llega a:

$$\begin{array}{r} -0,004x_1 - 0,004x_2 = -0,16 \\ 0,004x_1 + 0,01x_2 = 0,328 \\ \hline 0,006x_2 = 0,168 \end{array}$$

Despejando:

$$0,006x_2 = 0,168 \rightarrow x_2 = \frac{0,168}{0,006} = 28$$

Se necesitan 28 toneladas de acero al 1% y 12 toneladas de acero al 4% para producir las 40 toneladas de acero al 0,82% de carbono.

Ejemplo 1.24. Una industria fabrica tres tipos de transformadores eléctricos –tipo A, tipo B y tipo C– en líneas de producción que involucran tres procesos diferentes –ensamble, prueba y embalaje–, la tabla siguiente ilustra la cantidad de horas mensuales de trabajo necesarias para cada tipo de transformador y la cantidad de tiempo disponible en el mes.

Transformador	Ensamble	Prueba	Embalaje
Tipo A	6 horas	4 horas	1 hora
Tipo B	4 horas	2 horas	30 min
Tipo C	2 horas	3 horas	1h 30min
Horas disponibles	1.840 horas	1.440 horas	510 horas

Cuantos transformadores de cada tipo se fabrican en esta empresa.

Solución: sea A la cantidad de transformadores tipo A, B la cantidad de transformadores tipo B y C la cantidad de transformadores tipo C; en la tabla se muestra la cantidad de horas disponibles para la actividad con lo cual el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{array}{l} 6A + 4B + C = 1840 \\ 4A + 2B + 3C = 1440 \\ A + 0,5B + 1,5C = 510 \end{array}$$

Nótese que para que el sistema sea consistente, todos los datos deben estar en horas. Aplicando cualquier método de solución, se puede demostrar fácilmente que se deben fabricar en el mes:

$$\begin{array}{l} A = 120 \text{ transformadores tipo A} \\ B = 180 \text{ transformadores tipo B} \\ C = 200 \text{ transformadores tipo C} \end{array}$$

Cuando se analiza un problema, es importante comprender el contexto donde se desarrolla, pues de ahí se puede inferir información necesaria para la solución.

Sección 1.4 Problemas que se resuelven con ecuaciones lineales

Ejercicios sección 1.4. Problemas que se resuelven con ecuaciones lineales.

1. Al realizar la adición entre un par de números se obtiene como resultado 20 y la diferencia entre ellos es 4, determine cada uno de los números.
2. En mi familia ¿Cuántos hijos e hijas somos?, yo manifiesto que tengo tantas hermanas como hermanos y mi hermana mayor manifiesta que tiene el doble de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hijos e hijas constituyen mi familia?
3. En una parcela se producen gallinas y conejos, si el granjero cuenta 52 cabezas y 160 patas, cuántos animales tiene de cada tipo.
4. Al sumar, la edad de un tío y sobrino, se obtiene 24 años, dentro de seis años, la edad del tío será tres veces la edad del sobrino, qué edad tiene cada uno.
5. El perímetro de un rectángulo mide 56 centímetros, si el triple del largo equivale al cuádruple del ancho, cuáles son las medidas del rectángulo.
6. En el movimiento rectilíneo, se sabe que el espacio recorrido por un cuerpo es igual a su velocidad por el tiempo, esto es:

$$x = v \cdot t$$
 Dados que las ciudades A y B están distanciadas 150 kilómetros y un vehículo que parte de A hacia B lo hace con una velocidad de 45 km/h y un vehículo que se mueve de B a A lo hace con una velocidad de 35 km/h, en cuanto tiempo se encuentran y a qué distancia de la ciudad B lo hacen.
7. Un tanque de agua es llenado por medio de dos llaves A y B, si la llave A lo llena completamente en 7 horas y la llave B lo llena en 5 horas, cuánto tardan las dos en llenar el tanque si están ambas funcionando a la vez
8. Un reloj marca las 4 am, a que horas —en dos momentos diferentes—, el ángulo entre las manecillas será recto.
9. En una pelea entre moscas y arañas, se pueden contar 64 cabezas y 392 patas, cuántas moscas y cuantas arañas hay.
10. En un examen de 100 preguntas para el ingreso a la universidad, por cada pregunta que conteste bien al aspirante le dan 5 puntos, pero por cada pregunta que responda mal, le quitan 2 puntos. Si un aspirante cualquiera obtiene 360 puntos en la prueba, cuantas preguntas contesta bien y cuántas contesta mal.
11. Una hidro-cortadora puede cortar longitudinalmente una pieza de acero a una velocidad de $0.3 \frac{cm}{s}$. Qué tan larga es la pieza si se necesitan 12 minutos para cortarla completamente
12. En el Cerrejón —ubicado en la Guajira colombiana—, la banda transportadora que lleva carbón mineral para descargar en los vagones de tren, lo hace a una velocidad de 18.000 kilos por cada minuto. Cuánto tardará en llenarse un tren carguero de 562 vagones con capacidad de 110 toneladas si cada vagón usa 24 bandas transportadoras iguales.
13. La media maratón de Bogotá es una carrera cuyo recorrido es de 21 km; en el año 2019 el Keniano **TAMIRAT TOLA** hizo un tiempo de 1 hora con tres minutos, estime la velocidad promedio de este maratonista.
14. La señora Martínez invierte USD 15.000 a un año, una parte de esta cantidad al 6% y el resto al 2% de interés simple. ¿Cuánto dinero se invierte en cada tasa de interés, si el interés total ganado de ambas inversiones es de USD 400?
15. La señora López por su parte invirtió \$12.000 a un año; una parte de esa cantidad se invirtió al 7% y la otra al 3%. Si el interés total ganado fue de US\$ 680, cuánto invirtió en cada tasa.

Sección 1.4 Problemas que se resuelven con ecuaciones lineales

16. Las acciones del Grupo Éxito en un día normal de operación del mercado se venden a un promedio de USD 25.000 cada una y las acciones del grupo Argos se venden a USD 20.000. Un comisionista tiene USD 13.300.000 y desea comprar el triple de acciones Éxito que de Argos. ¿Cuántas acciones de cada grupo puede comprar?
17. El precio de entrada a una obra de teatro en Londres es de 200 € para Preferencial y 40 € para general. Se vendieron un total de 550 entradas. ¿Cuántos boletos eran para silla preferencial y cuantos boletos eran para silla general, si se recaudó un total de 46.000 €?
18. Alicia tiene un total de 40 monedas de cien y doscientos pesos. El valor total de las monedas es de \$5.500, cuántas monedas de cada denominación tiene
19. Una trilladora de café ofrece dos tipos de producto de diferente calidad; café exportación \$6.000 la libra, y café pasilla a \$2.000 la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de café debe mezclar la trilladora para obtener un total de 400 libras de café cuya calidad pueda venderse a \$3.500 la libra?
20. A la misma empresa trilladora le hacen un pedido de café internacional que pueda vender a \$3.750 la libra, cuál debe ser la proporción de la mezcla para atender esta demanda.
21. Se quiere preparar 50 ml de un medicamento que contenga 0,6% de una droga a partir de dos insumos los cuales tienen 1,0% y 0,5% de esta misma droga. Determine la cantidad que se debe mezclar para lograr esta solución
22. Por lo general las soluciones de alcohol se preparan con alcohol y agua, mezclados con alguna proporción. Supóngase que se tiene una solución de alcohol al 20% que se desea mezclar con otra solución de alcohol al 40% para obtener 12 litros de solución de alcohol al 30%, ¿Cuántos litros de cada solución se deben mezclar para lograr esta nueva concentración?
23. En un laboratorio se tienen dos frascos con ácido sulfúrico, en uno se muestra una concentración del 5%, pero la etiqueta en la otra botella que muestra la concentración de ácido está borrosa y los indicadores con que cuenta el laboratorio no permiten medir concentraciones por encima del 10% de ácido. El laboratorista de forma creativa decide mezclar 30 ml de la solución al 5% y 10 mililitros de la otra solución dando como resultado una solución que tiene 7,5% de ácido sulfúrico; dada esta información determine la concentración de ácido que debe indicar la etiqueta borrosa.
24. Un vivero vende dos tipos de semilla para pasto y determina que las semillas de menor calidad tienen un porcentaje de germinación del 60%, sin embargo, se perdió la información del porcentaje de germinación de las semillas de mayor calidad. Ante este problema el gerente llama a uno de sus clientes a quien le vendió el mes pasado 20 kilos de una mezcla de semillas de ambas calidades para averiguar el porcentaje de germinación, el cliente amablemente le contesta que hubo un 72% de germinación de semillas. Dada esta información determine la calidad de germinación de la semilla de calidad superior.
25. Cierta fabricante especifica que, para su motor de dos tiempos, se debe usar una mezcla de 10 partes de gasolina por 1 parte de aceite; sabiendo esto determine cuánta gasolina pura debe agregarse a una mezcla gasolina-aceite que contiene 75% de gasolina, para obtener una mezcla de 12 galones de combustible con la proporción requerida por las especificaciones del fabricante.

SECCIÓN

1.5

ECUACIÓN CUADRÁTICA

Las ecuaciones cuadráticas conocidas también como ecuaciones de segundo grado son expresiones algebraicas donde el exponente más grande de cualquiera de las variables es dos.

Definición 1.4. Ecuación cuadrática. Las ecuaciones de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Con a, b y $c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se denominan ecuaciones cuadráticas o de segundo grado

Son ejemplos de ecuaciones cuadráticas:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad ; \quad -3y^2 + 4y - 2 = 0$$

Como se vio en secciones anteriores, solucionar una ecuación es encontrar el conjunto de valores que la vuelven cierta, es decir, aquellas cantidades numéricas que, reemplazadas en la expresión, hace cumplir la igualdad.

Ejemplo 1.25. Demuestre que los valores $x = -1$ e $x = -2$ son soluciones de la expresión:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

Solución: basta con reemplazar en esta expresión los valores.

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow (-1)^2 + 3(-1) + 2 \rightarrow 1 - 3 + 2 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Para el segundo valor se tiene

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow (-2)^2 + 3(-2) + 2 \rightarrow 4 - 6 + 2 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Nótese que, en ambos casos se cumple la igualdad.

Estos valores que vuelven cierta la expresión se denominan **soluciones, ceros, raíces o polos**, a continuación, se explican dos procedimientos para encontrar estos valores.

Solución por medio de factorización.

El método para resolver o solucionar ecuaciones cuadráticas se basa en la propiedad del producto cero de los números reales, el cual establece que.

Teorema 1.3. Propiedad cero de los números reales. Si a y b son números reales y $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$ o ambos a y b son iguales a cero.

Sección 1.5: Ecuaciones cuadráticas

Esta propiedad indica que un producto de dos cantidades es igual a cero si uno, el otro o ambos es igual a cero. La solución por factorización busca precisamente encontrar estos factores –que de hecho son factores lineales– y se igualan cada uno a cero.

Ejemplo 1.26. Resolver por factorización las siguientes ecuaciones:

- a. $4x^2 = 0$ b. $4x^2 - 8x = 0$
 c. $4x^2 = 9$ d. $x^2 - 3x - 10 = 0$
 e. $2x^2 - 6x + 4 = 0$

Solución: cada problema que se ilustra aquí está asociado a un caso típico de factorización.

- a. Este es posiblemente el caso más simple que hay.

$$4x^2 = 0 \rightarrow 4x \cdot x = 0$$

Igualando cada factor a cero se obtiene

$$\begin{aligned} 4x &= 0 \rightarrow x = 0 \\ x &= 0 \rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Nótese que se encontraron dos valores.

- b. Para este problema, se puede aplicar factor común

$$4x^2 - 8x = 0 \rightarrow 4x(x - 2) = 0$$

Igualando cada factor lineal a cero, se obtienen las dos soluciones

$$4x = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{y} \quad x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

- c. Transformando esta expresión y aplicando diferencia de cuadrados, el cual establece que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ se llega.

$$4x^2 = 9 \rightarrow 4x^2 - 9 = 0 \rightarrow (2x + 3)(2x - 3) = 0$$

Igualando cada factor lineal a cero se obtiene:

$$2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2} \quad \text{y} \quad 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

De nuevo se obtiene dos valores, sin embargo, es posible resolver esta ecuación simplemente despejando la x .

$$4x^2 - 9 = 0 \rightarrow 4x^2 = 9 \rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}$$

Sección 1.5: Ecuaciones cuadráticas

- d. Este problema se puede resolver factorizando el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, ya que el coeficiente de la variable cuadrática es uno. Esta factorización establece la necesidad de encontrar dos números tales que el producto sea c y la suma o diferencia de estos sea b . Siendo concretos para el problema $x^2 - 3x - 10 = 0$ se deben encontrar dos números cuya multiplicación o producto sea -10 y su suma o resta sea igual a -3 ; fácilmente el lector puede deducir que los números buscados son -5 y 2 , ya que:

$$(-5)(2) = -10 \quad \text{y} \quad -5 + 2 = -3$$

Por tanto, la factorización queda:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0$$

Igualando cada factor a cero se obtiene:

$$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \quad \quad x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

Como en los casos anteriores, se tienen dos soluciones reales.

- e. Este último caso se puede resolver por medio de la factorización de la forma $ax^2 + bx + c$, la cual establece la necesidad de multiplicar y dividir toda la expresión por a , dejando indicada la multiplicación del segundo término y aplicando finalmente el procedimiento para la factorización que se vio en el problema anterior; así:

$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \rightarrow \frac{4x^2 - 6(2x) + 8}{2} = 0$$

En la anterior expresión se obtiene la raíz del primer término y se buscan dos cantidades que multiplicado sea $+8$ y su suma o resta sea igual a -6 ; fácilmente se puede concluir que los números son -4 y -2 , por tanto

$$\frac{(2x - 4)(2x - 2)}{2} = 0 \quad \text{Simplificando} \quad (x - 2)(2x - 2) = 0$$

Igualando cada factor a cero se obtiene

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \quad \quad 2x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{2} = 1$$

Las dos soluciones son $x = 2$ y $x = 1$

Existe otro método de solución denominado **completar de cuadrados** que termina por reescribir las ecuaciones en términos de trinomios cuadrados perfectos para luego obtener raíces cuadradas. Esta técnica no se revisa en esta sección, pero queda disponible al interés del lector.

PROBLEMA

Resolver usando factorización la siguiente ecuación:

$$x^4 = 16$$



Sección 1.5: Ecuaciones cuadráticas

Utilizando las dos opciones dadas por los signos se tiene:

$$x = \frac{8+8}{8} = 2 \quad x = \frac{8-8}{8} = 0$$

- c. Para $4x^2 - 9 = 0$ la expresión se reescribe como $4x^2 + 0x - 9 = 0$ en donde $a=4$, $b=0$ y $c=-9$. Usando la fórmula general, se llega:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(4)(-9)}}{2(4)} = \frac{0 \pm \sqrt{144}}{8} = \frac{0 \pm 12}{8}$$

Las dos soluciones son:

$$x = \frac{0+12}{8} = \frac{3}{2} \quad x = \frac{0-12}{8} = -\frac{3}{2}$$

Idénticas a las encontradas por el método de factorización.

- d. Para $x^2 - 3x - 10 = 0$ se puede establecer que $a = 1$, $b = -3$ y $c = -10$ por tanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$$

Así

$$x = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad x = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

- e. Para $2x^2 - 6x + 4 = 0$ se tiene $a = 2$, $b = -6$ y $c = 4$, entonces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{4}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4}$$

Así

$$x = \frac{6+2}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad x = \frac{6-2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Que corresponden a las mismas soluciones encontradas por el método de factorización.

De la misma manera que las ecuaciones lineales pueden formar sistemas, las ecuaciones cuadráticas igualmente pueden formar sistemas con otras ecuaciones, incluso con lineales o de exponentes superiores; los siguientes ejemplos ilustra esta situación.

EL NÚMERO ÁUREO



Imagen tomada de :

<https://www.pinterest.com.mx/pin/pin-en-diseo-bidimensional-1-846676798703561635/>

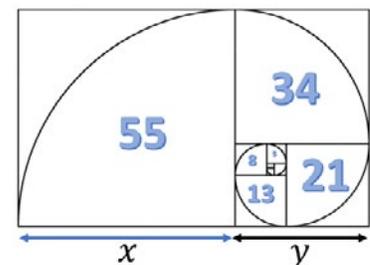
El número áureo, número de oro o razón divina, es un número irracional que se representa por la letra griega φ y que equivale a:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033$$

Descubierto en la antigüedad posee varias propiedades interesantes especialmente en la geometría, pero también se encuentra frecuentemente en proporciones en la naturaleza y ha sido utilizado ampliamente en la arquitectura y el arte para obtener proporciones estéticas y agradables a los sentidos.

El número áureo es el valor numérico de la proporción de dos segmentos de recta x y y con $x > y$ que satisface la ecuación:

$$\varphi = \frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$$



Sección 1.5: Ecuaciones cuadráticas

Ejemplo 1.28. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}y &= 2x + 1 \\ y &= x^2 + 2x - 3\end{aligned}$$

Solución: cuando se resuelve un sistema de ecuaciones que contiene por lo menos una ecuación cuadrática, lo que resulta más sencillo es reducir la variable que en ambas expresiones tiene exponente 1. Para este problema la variable y tiene en ambas ecuaciones exponente 1, mientras que la x es la variable al cuadrado en la segunda expresión. Como está configurado el problema resulta más sencillo y práctico igualar –reducción por igualación– las dos ecuaciones

$$x^2 + 2x - 3 = 2x + 1 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 3 - 2x - 1 = 0$$

Simplificando se llega a $x^2 - 4 = 0$

Solucionando por factorización $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) = 0$

Tomando cada factor lineal e igualando a cero se obtiene

$$\begin{aligned}x + 2 &= 0 \quad \rightarrow \quad x = -2 \\ x - 2 &= 0 \quad \rightarrow \quad x = 2\end{aligned}$$

Reemplazando en cualquier ecuación, de estas dos soluciones se encuentran los valores de y . Por simplicidad se usa la primera ecuación, así:

$$\begin{aligned}y &= 2(-2) + 1 = -4 + 1 = -3 \\ y &= 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5\end{aligned}$$

Por tanto, las dos soluciones son:

$$(x, y) \rightarrow (-2, -3)$$

$$(x, y) \rightarrow (2, 5)$$

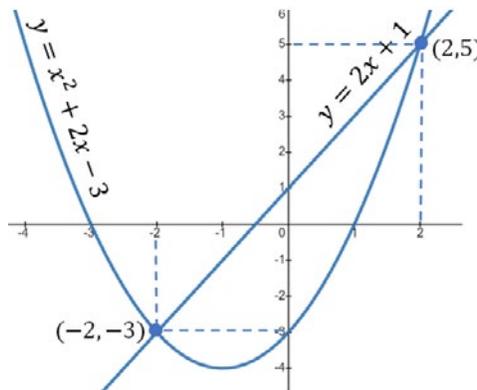


Figura 1.11. Representación gráfica del problema 1.28.

Aunque no es tema de esta sección, al graficar en un mismo plano las dos funciones, se puede apreciar que los puntos de corte entre las dos curvas – como muestra la figura anterior –, son iguales a los encontrados de forma analítica.

Sección 1.5: Ecuaciones cuadráticas

Problemas que se resuelven con ecuaciones de segundo grado

De la misma forma que se analizó con las ecuaciones lineales, es posible aplicar las ecuaciones cuadráticas a problemas de contextos cotidianos; tómanse como referencia los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.29. Se quiere cercar un terreno rectangular de superficie 9.600 m² utilizando 400 m lineales de malla; dadas estas condiciones, encuentre las dimensionales del terreno.

Solución: de la geometría plana se conoce que el área de un rectángulo se obtiene de la multiplicación de las dimensiones de sus lados, por tanto, llamando *a* su largo y *b* su ancho respectivamente se obtiene una ecuación.

$$a \cdot b = 9.600$$

Por otro lado, si se usa una malla para cercar el terreno, es necesario encontrar el perímetro de este, que se obtiene sumando las longitudes de los lados de la figura, esto es:

$$2a + 2b = 400$$

Que simplificando se llega a:

$$a + b = 200$$

Despejando, de esta última ecuación, una de las variables y reemplazando en la primera, se logra:

$$a = 200 - b \quad \text{Entonces} \quad (200 - b) \cdot b = 9.600$$

$$200b - b^2 = 9.600 \quad \rightarrow \quad b^2 - 200b + 9.600 = 0$$

Al resolver esta ecuación, se llega a dos valores.

$$b = 80m \quad \text{o} \quad b = 120m$$

A partir de cualquiera de estos dos resultados y utilizando las ecuaciones iniciales, es posible encontrar el valor de la otra dimensión del terreno.

$$a = 120m \quad \text{o} \quad a = 80m$$

PROBLEMA

En una litografía, se requiere producir hojas de papel para imprimir una revista.



Las condiciones que solicita el fabricante para la hoja es que su alto sea $\frac{5}{3}$ la medida de su base, que el área de impresión sea de 144cm², que se deje un espacio de 2 cm en la parte superior e inferior de la hoja para las márgenes y de forma similar, se deje una margen de 1,5cm a la izquierda y derecha de la hoja para la margen. Con estas condiciones determine las dimensiones de la hoja.

SOLUCIÓN



Sección 1.5: Ecuaciones cuadráticas

Ejercicios sección 1.5. Ecuación cuadrática.

Resolver las siguientes ecuaciones usando factorización, de ser posible y corroborar el resultado usando la fórmula general:

1. $x^2 - 2x + 1 = 0$
2. $x^2 - 3x - 4 = 0$
3. $x^2 - 6x + 8 = 0$
4. $9x^2 - 12x - 4 = 0$
5. $2x^2 + 4x - 6 = 0$
6. $5x^2 - 16x + 12 = 0$
7. $-2x^2 - 7x + 15 = 0$
8. $3x^2 - 7x + 4 = 0$
9. $4x^2 + 3x - 22 = 0$
10. $x^2 - 1 = 0$
11. $1 - x^2 = 0$
12. $x^2 - x = 0$
13. $x^2 - 5x = 0$
14. $x^2 = 0$
15. $-x^2 = 0$
16. $x^2 + 3x - 4 = 0$
17. $x^2 - 7x + 6 = 0$
18. $x^2 + 1 = 0$
19. $4 + x^2 = 0$
20. $x^2 + 8x = 0$
21. $x^2 - 121 = 0$

Obtener los ceros polinomiales de las siguientes funciones cuadráticas:

22. $2x^2 - 4x - 3 = 0$
23. $-3x^2 + 3x + 4 = 0$
24. $-2x^2 + 3 = 0$
25. $x^2 - 1 = 0$
26. $-x^2 + 2x + 3 = 0$
27. $2x + x^2 = 0$

28. $7x - 4x^2 + 1 = 0$
29. $-3x + 4x^2 + 1 = 0$
30. $x^2 - 3x - 5 = 0$
31. $x^2 - 5x - 6 = 0$
32. $2x^2 - 5x = 0$
33. $-2x^2 + 5x - 6 = 0$
34. $3x^2 + 2 = 0$
35. $5x^2 - 1 = 0$
36. $7x - 4x^2 = 0$
37. $8x^2 - 32 = 0$
38. $x^2 - \sqrt{3} = 0$
39. $16x + 2 - x^2 = 0$
40. $2.5x^2 + 3.2x - 6 = 0$
41. $\frac{3}{2}x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 0$
42. $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0$
43. $\sqrt{2}x^2 + 5x - \sqrt{7} = 0$
44. $x^2 + x - \pi = 0$
45. $\pi x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$
46. $x^2 - \phi x - \pi = 0$

Determine si el valor planteado es solución para la ecuación que se muestra.

47. $x^2 + 3x - 15 = 0$ $x = 3$
48. $x^2 - 2x - 8 = 0$ $x = -2$
49. $x^2 + x - 6 = 0$ $x = 3$
50. $x^2 - x - 1 = 0$ $x = 2$
51. $x^2 - 4 = 0$ $x = -2$

Dados los siguientes sistemas de ecuaciones, encontrar el conjunto de soluciones (si existe)

$$52. \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}$$

Sección 1.5: Ecuaciones cuadráticas

53.
$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 + 3x - 4 \end{cases}$$

54.
$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

55.
$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x^2 + 16 \end{cases}$$

56.
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

57.
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x^2 + x + 1 \end{cases}$$

58.
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}$$

59.
$$\begin{cases} y = 2x^2 + x \\ y = -0.8x^2 + x + 2.8 \end{cases}$$

60.
$$\begin{cases} y = -4x^2 + 5x + 3 \\ y = x^2 + 5x - 2 \end{cases}$$

61.
$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ y = -x^2 + x + 3 \end{cases}$$

62.
$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x + 1 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}$$

Resolver las siguientes ecuaciones

63.
$$\sqrt{5x + 4} - 1 = 2x$$

64.
$$-\sqrt{2x + 3} = 2x - 3$$

65.
$$\sqrt{2x + 5} + \sqrt{5x + 6} = 7$$

66.
$$\sqrt{2x + 9} - \sqrt{x + 1} = 2$$

67. Dada la ecuación cuadrática

$$x^2 + kx + 16 = 0$$

Encuentre el valor de k necesario para que existan dos soluciones reales e iguales.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

A continuación, usted va a encontrar una serie de situaciones problema en diversas áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), las cuales debe interpretar, modelar y resolver para dar cuenta de la solución. Ilustre y explique claramente los modelos propuestos, identificando las variables utilizadas, explicando también la estrategia de solución y la calidad de la solución encontrada

68. El resultado de sumar dos números es -7 y su producto es 12 ¿Cuáles son los dos números?

69. El resultado de sumar dos números es 18 y su producto es 32 ¿Cuáles son los dos números?

70. La suma de dos números es 3 y su producto es $\frac{8}{4}$, encuentre cada uno de los números.

71. La suma de dos números es 6 y su producto es -91, encuentre cada uno de los números.

72. El área de un terreno rectangular es 168 m², si el perímetro es 52 m, encuentre las dimensiones de este.

73. Un ganadero quiere cercar un pequeño terreno que tiene forma rectangular por medio de alambre de púas, que pasan por unos postes, para dar finalmente tres vueltas como muestra la figura.



Imagen tomada de :

<https://www.istockphoto.com/es/search/2/image?mediatype=illustration&phrase=paddock>

Sección 1.5: Ecuaciones cuadráticas

Si utiliza 240 m de alambre de púas y el terreno para sus vacas tiene en total 384 m^2 , encuentre las dimensiones de este. Asuma que el terreno no necesita puerta y que la cerca recorre todo el perímetro exterior.

74. El ganadero decide ahora construir su cerca en un terreno que linda contra una pared de ladrillos tal como muestra la figura.



Imagen tomada de :

<https://www.istockphoto.com/es/search/2/image?mediatype=illustration&phrase=paddock>

Sabiendo que las dimensiones son las encontradas en el problema anterior, determine la cantidad de alambre de púas que debe usar si quiere cerca el terreno dando tres vueltas y sabiendo que la pared se encuentra por el lado más largo del terreno.

75. Para la misma situación anterior, ahora el ganadero decide usar todo el alambre que tenía originalmente, los 240 m con los que dará las tres vueltas. Si el área del nuevo terreno es de 800 m^2 , encuentre las dimensiones de este terreno.
76. Una ventana normanda, es un tipo específico de ventana la cual consta de un rectángulo y un medio círculo encima del rectángulo tal como muestra la figura.

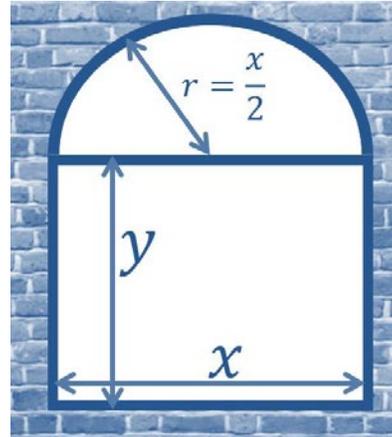
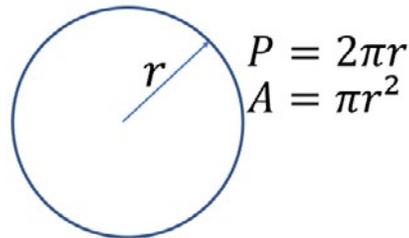


Imagen adaptada de :

<https://foro.rinconmatematico.com/index.php?topic=77686.0>

Para la configuración mostrada, obtener las ecuaciones para el perímetro y para el área en términos de las variables x e y . Tenga en cuenta que el perímetro y el área de un círculo son respectivamente



77. Para el problema de la ventana normanda, suponga que se tiene una ventana cuyo perímetro exterior es $P = 5.1416 \text{ m}$ y la superficie de esta es $A = 1.8508 \text{ m}^2$. Dada esta configuración, encuentre las dimensiones de la ventana normanda que cumplen con los parámetros establecidos.

Sección 1.6: Inecuaciones lineales y no lineales

SECCIÓN

1.6

INECUACIONES LINEALES Y NO LINEALES

Una de las propiedades importantes del sistema de numeración decimal que se emplea actualmente es que sus unidades cuantitativas –los números– tienen un orden jerárquico de magnitud, lo cual permite organizarlos en una secuencia y adicionalmente agruparlos para así realizar los conteos de forma más ágil. Estas agrupaciones son los conjuntos, que reúnen los elementos que comparten alguna característica; los conjuntos son parte fundamental de toda la teoría de números incluyendo las inecuaciones y sus aplicaciones son amplias y variadas.

Los conjuntos son colecciones de elementos que se asocian bajo algún criterio particular o definido mediante una cualidad o propiedad; se denotan de muchas formas, siendo los corchetes {...} una de las más comunes; ahora cuando los elementos de un conjunto se listan, se dice que el conjunto está nombrado por comprensión tal como se ilustra a continuación.

$$\begin{aligned} A &= \{0,1,2,3,4\} \\ B &= \{a, e, i, o, u\} \\ C &= \{\text{Amarillo, Azul, Rojo}\} \end{aligned}$$

Cuando los elementos de un conjunto son nombrados usando alguna propiedad o característica se dice que el conjunto está denotado por extensión.

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Naturales menores a cinco}\} \\ B &= \{\text{Las vocales del alfabeto}\} \\ C &= \{\text{Los colores de la bandera}\} \end{aligned}$$

Si cierto elemento pertenece a un determinado conjunto se emplea el símbolo \in y cuando no pertenece se usa el símbolo \notin . Por ejemplo, si el elemento 2 pertenece al conjunto A, entonces es posible usar la notación

$$2 \in A$$

Por otro lado, el elemento 6 no pertenece al conjunto A, entonces

$$6 \notin A$$

Ahora, una desigualdad es una relación que especifica qué cantidades son mayores o menores a otras. Se toman como convenciones los símbolos para representar estas relaciones.

De la misma manera que los números tienen propiedades asociadas con las operaciones básicas, los conjuntos también se les asocian propiedades con operaciones elementales, entre estas destacan.

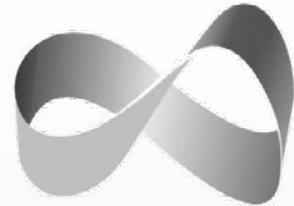


Figura 1.12. Cinta de Moebius.

Imagen tomada de :
<https://conductasegura.com/blog/f/moebius-y-su-cinta>

Es un plano de una sola cara con la propiedad de ser un objeto no orientable e igualmente tener un solo borde.

Debido al incremento en la complejidad de las situaciones sociales, económicas, científicas y culturales en las cuales se desenvuelven los seres humanos, cada vez más se precisan de herramientas descriptivas y de predicción más especializadas y confiables. La matemática, como lenguaje universal y transversal a cualquier disciplina ofrece algunas de estas herramientas.

Sección 1.6: Inecuaciones lineales y no lineales

En conjuntos es frecuente usar símbolos para abreviar algunas propiedades o relaciones. La tabla siguiente muestra algunos de estos símbolos.

Tabla 1.3. Símbolos para representar operaciones entre conjuntos.

Símbolo	Denota
>	Mayor que
<	Menor que
≤	Menor o igual a
≥	Mayor o igual a
≠	Diferente a
≈	Aproximadamente
∈	Pertenece
∉	No pertenece
∧	Y
∨	O
∃	Existe
∀	Para todo
⇒	Entonces
↔	Si y solo si

Algebra elemental de conjuntos.

Las operaciones elementales que tienen dos conjuntos son la unión, la diferencia, la intersección y el complemento.

Unión o suma. El resultado de la suma o unión de dos conjuntos A y B denotado por $A \cup B$ o $A + B$, es un tercer conjunto conformado por todos los elementos que están en A o que están en B.

$$A \cup B = A + B = \{x/ x \in A \vee x \in B\}^1$$

En términos gráficos queda como:

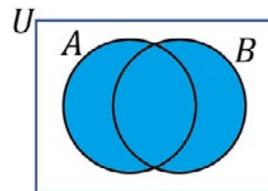


Figura 1.13. Unión de dos conjuntos

Intersección. El resultado de la intersección de dos conjuntos A y B denotado por $A \cap B$, es un tercer conjunto conformado por todos los elementos que están en A y que están en B, es decir, los elementos comunes.

$$A \cap B = \{x/ x \in A \wedge x \in B\}$$

En términos gráficos queda como:

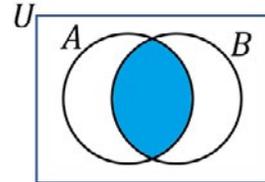


Figura 1.14. Intersección de dos conjuntos

Diferencia simple. El resultado de la diferencia simple de dos conjuntos A y B denotado por $A - B$, es un tercer conjunto conformado por todos los elementos que están en A y que no están en B.

$$A - B = \{x/ x \in A \wedge x \notin B\}$$

En términos gráficos queda como:

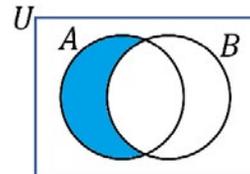


Figura 1.15. Diferencia simple de dos conjuntos

¹ Se debe leer como “el conjunto de todas las x, tal que x pertenece a A o x pertenece a B”.

Sección 1.6: Inecuaciones lineales y no lineales

Diferencia simétrica. El resultado de la diferencia simple de dos conjuntos A y B denotado por $A \bowtie B$, es un tercer conjunto conformado por todos los elementos que están en A o que están en B pero que no están en A y en B simultáneamente.

$$A \bowtie B = \{x/ x \in A \vee x \in B \wedge x \notin A \cap B\}$$

En términos gráficos queda como

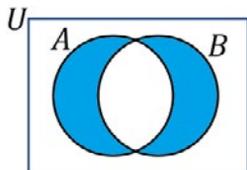


Figura 1.16. Diferencia simétrica de dos conjuntos

Complemento. El complemento de un conjunto A, denotado por A' o A^c , es un tercer conjunto conformado por todos los elementos del conjunto universal, que no pertenecen al conjunto A; en otras palabras, son los elementos que le hacen falta al conjunto A, para ser igual al conjunto universal.

$$A' = \{x/ x \in U \wedge x \notin A\}$$

En términos gráficos queda como:

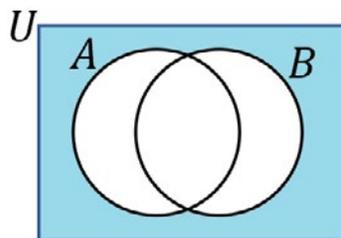
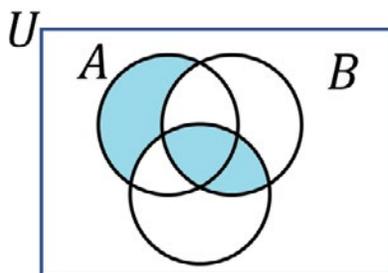


Figura 1.17. Complemento de un conjunto

A continuación, se muestran cómo se presentan algunos conjuntos

Ejemplo 1.30. Dada la figura mostrada, encuentre la expresión analítica del conjunto sombreado.



OTRAS PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS

Sea A un conjunto y U el conjunto universal, entonces se cumplen las siguientes propiedades

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cup A^c = U$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

Sección 1.6: Inecuaciones lineales y no lineales

RENÉ DESCARTES



Figura 1.18. Renato Descartes

Imagen tomada de:
<https://www.cultura.gob.ar/rene-descartes-heroe-del-pensamiento-moderno-8875/>

Celebre pensador, filósofo y matemático nacido en Francia, el 31 de marzo de 1596, a corta edad entra en la facultad de medicina de la ciudad de Poitiers, para formarse también en derecho. Durante 1619, se encuentra con Isaac Beeckman y Johann Faulhaber, investigadores de Alemania que lo incentivan fuertemente para que estudie matemáticas,

Descartes proponer un sistema de coordenadas en el plano – que actualmente lleva su nombre– y demuestra ciertas acciones elementales entre clases de poliedros. En el noveno mes del 1649 la soberana de Suecia, Cristina, lo llama para trasladarse a la ciudad de Estocolmo, lugar en el que murió el 11 del segundo mes del 1650, posiblemente por intoxicación con Arsénico.

Solución: realmente no existe una única forma para representar conjuntos, todo depende de la forma en que se analiza el problema. Nótese que existen dos grandes regiones, una que tiene que ver con el conjunto A y otra que tiene que ver entre los conjuntos B y C , de esta manera la primera región es:

$$\text{Región 1} = \{x / x \in A \wedge x \notin A \cup B\}$$

La región dos está conformada por la intersección de los conjuntos B y C ,

$$\text{Región 2} = \{x / x \in B \cap C\}$$

Finalmente, la solución final es la unión de los dos conjuntos.

$$\text{Región} = \{x / x \in \{A \wedge x \notin A \cup B\} \cup \{B \cap C\}\}$$

Comprender algunos elementos de la teoría de conjuntos, facilita entender la naturaleza de las soluciones para inecuaciones

Inecuaciones

Una inecuación es una expresión matemática que expresa una relación de desigualdad entre cantidades, a manera de ejemplo supóngase las siguientes inecuaciones

$$2x + 1 < 10$$

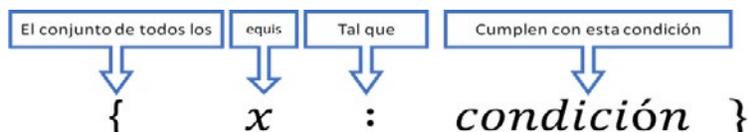
$$\frac{5 - x}{4 - x^2} \geq 10$$

En cada una de las dos anteriores relaciones se precisa encontrar el subconjunto de valores de x –sobre la recta numérica– que cumplen con la expresión, ahora para resolver una inecuación de este tipo, es preciso tener en cuenta las siguientes propiedades de las desigualdades.

Teorema 1.5. Propiedades de las desigualdades. Sea a , b , c , d y k números reales, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1. Propiedad Transitiva | <i>Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$</i> |
| 2. Propiedad lineal | <i>Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$</i> |
| 3. Propiedad Aditiva | <i>Si $a < b$ entonces $a + k < b + k \quad \forall k$</i> |
| 4. Propiedad Multiplicativa | <i>Si $a < b$ entonces $a \cdot k < b \cdot k$ si $k > 0$</i> |
| 4. Propiedad Multiplicativa | <i>Si $a < b$ entonces $a \cdot k > b \cdot k$ si $k < 0$</i> |

Estas relaciones tienden a formar conjuntos y subconjuntos que no son más que una colección de elementos que cumplen con cierta característica o condición, así la notación constructiva para identificar los conjuntos es:



Sección 1.6: Inecuaciones lineales y no lineales

Uno de los usos más comunes de los conjuntos son los intervalos sobre la recta numérica; a manera de ejemplo, considérese el caso del subconjunto sobre la recta numérica del intervalo abierto (a, b)

$$(a, b) = \{x / a < x < b\}$$

Este subconjunto representa todos los números reales que están entre los números a y b , sin incluir estos. Como convención gráfica se asume que, si el elemento extremo no pertenece al conjunto, el círculo queda sin sombrar.



Figura 1.19. Representación de un subconjunto sobre la recta numérica

La anterior situación ilustra un conjunto abierto, es decir, que el conjunto solución está entre los dos valores (a, b) sin que estos extremos pertenezcan a la solución. La tabla 1.4., ilustra las posibles situaciones y sus respectivas representaciones.

Tabla 1.4. Diversas representaciones para los intervalos.

Tipo de Intervalo	Notación de Intervalo	Notación de Conjunto	Gráfica
Abierto	$\{x / x \in (a, b)\}$	$\{x / a < x < b\}$	
Cerrado	$\{x / x \in [a, b]\}$	$\{x / a \leq x \leq b\}$	
Abierto por la derecha	$\{x / x \in [a, b)\}$	$\{x / a \leq x < b\}$	
Abierto por la izquierda	$\{x / x \in (a, b]\}$	$\{x / a < x \leq b\}$	
Al infinito abierto por la derecha	$\{x / x \in (-\infty, b)\}$	$\{x / x < b\}$	
Al infinito abierto por la izquierda	$\{x / x \in (a, +\infty)\}$	$\{x / x > a\}$	
Al infinito cerrado por la derecha	$\{x / x \in (-\infty, b]\}$	$\{x / x \leq b\}$	
Al infinito cerrado por la izquierda	$\{x / x \in [a, +\infty)\}$	$\{x / x \geq a\}$	
Conjunto de los reales	$\{x / x \in (-\infty, +\infty)\}$	$\{x / x \in \mathbb{R}\}$	

Sección 1.6: Inecuaciones lineales y no lineales



Resolver la inecuación

$$-4 \leq 2x - 6 \leq 8$$

Solución



Resolver la inecuación

$$-3 \leq 1 - 2x < 5$$

Solución



La solución de cualquier problema puede representarse usando la notación de intervalo, la notación de conjunto, la forma gráfica o la combinación de cualquiera de ellas.

Ejemplo 1.31. Resuelva las siguientes inecuaciones:

a. $2x - 3 \leq 9$

b. $2x + 3 > 4x + 7$

c. $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4} \geq 0$

Solución: en el primer caso basta con despejar la variable²:

$$2x \leq 9 + 3 \rightarrow x \leq \frac{9 + 3}{2}$$

Finalmente:

$$x \leq 6$$

Lo cual establece que cualquier número que sea menor o igual a 6 cumple la primera relación y en consecuencia todos ellos forman el conjunto solución. Formas alternativas de representar este conjunto son.

Notación de conjunto $\{x/x \leq 6\}$

Notación de intervalo $x \in (-\infty, 6]$

De esta última notación, es importante ver que el seis es un valor límite y es tomado dentro del conjunto solución lo cual se presenta con un corchete recto; cuando un número que está en el límite no es solución, se representa en la notación de intervalo con un paréntesis.

En un contexto gráfico, es posible representar la solución sobre una recta numérica tal como se ilustra a continuación.

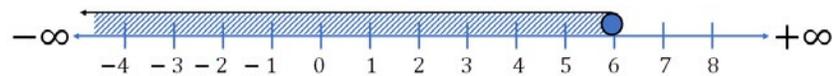


Figura 1.20. Representación gráfica del conjunto solución del problema 1.20.

La solución se representa por una barra que inicia en 6 y toma todos los valores a la izquierda.

b. Para este problema se deben transponer los términos para despejar la variable de interés.

$$2x + 3 > 4x + 7 \rightarrow 2x - 4x > 7 - 3$$

Reduciendo se tiene:

$$-2x > 4$$

² Se debe prestar especial atención a las constantes negativas multiplicativas, pues en el caso que pasan de un lado de la desigualdad a otro, el sentido de la desigualdad debe cambiar

Sección 1.6: Inecuaciones lineales y no lineales

Recordando la propiedad 5 del teorema anterior, la constante negativa -2 al pasar del lado izquierdo al lado derecho hace cambiar el sentido de la desigualdad como se muestra a continuación —esta operación corresponde a multiplicar a ambos lados por $-\frac{1}{2}$

Procedimiento 01	Procedimiento 02
$-2x > 4 \rightarrow x < -\frac{4}{2}$	$-2x > 4 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) < -\frac{1}{2}(4)$
$x < -2$	$x < -2$

En ambos procedimientos la respuesta es la misma

Notación de conjunto $Sol = \{x : x < -2\}$

Notación de intervalo $Sol = \{x \in (-\infty, -2)\}$

En términos gráficos, la solución de la inecuación queda:

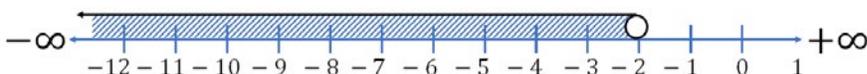


Figura 1.21. Representación gráfica del problema b.

c. Para el segundo ejemplo se emplea una estrategia denominada método de las cruces y lápidas. Primero se deben obtener los factores lineales de las expresiones dadas.

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4} \geq 0$$

Factorizando se tiene:

$$\frac{(x - 4)(x + 1)}{(x + 2)(x - 2)} \geq 0$$

Posteriormente se construyen cuatro rectas numéricas, una debajo de la otra para cada factor lineal identificando en cada recta el valor que anula el factor lineal, es decir, para $(x - 4)$ el factor que lo anula es 4, mientras que para $(x + 1)$ el factor que lo anula es -1 , cada factor que lo anula corresponde a una línea vertical ordenadas ascendentemente, por tanto, lo que se obtiene es algo parecido a lo mostrado en la figura 1.22.

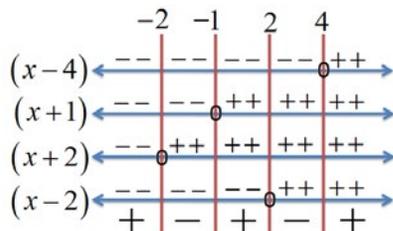


Figura 1.22. Método de las cruces y lápidas para solucionar una inecuación no lineal.

Tabla 1.5. Crecimiento demográfico en Colombia

Año	Habitantes
1770	806.641
1778	828.775
1782	1.044.565
1803	1.236.654
1810	1.374.354
1825	1.465.785
1835	1.686.038
1843	1.945.687
1851	2.265.652
1864	2.978.365
1870	3.401.652
1905	4.145.265
1912	5.085.652
1918	5.857.652
1928	7.853.652
1938	8.701.845
1951	11.548.172
1964	17.484.508
1973	22.551.811
1985	27.859.198
1997	37.418.290
2005	42.888.992
2010	44.899.584
2015	48.985.684
2020	50.372.125
2021	50.990.522
2022	51.609.148

Sección 1.6: Inecuaciones lineales y no lineales

Nótese que, debido a la restricción lineal, valores a la derecha del valor que lo anula, la hace positiva, mientras que valores a la izquierda de esta lo convierte en negativo³; de igual forma se hace con todos los factores.

Finalmente, se hace el producto de los signos, en este caso de los cuatro factores lineales, obteniéndose así el signo de toda la desigualdad; los valores que anulan cada factor son los límites de los intervalos. Es de interés según lo plantea el problema, los valores que sean mayores o por lo menos iguales a cero, es decir, de la figura 1.22., se escogen aquellos positivos, con lo cual la solución para el problema expresada en forma de intervalos es:

$$x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 2) \cup [4, \infty)$$

Y en forma gráfica

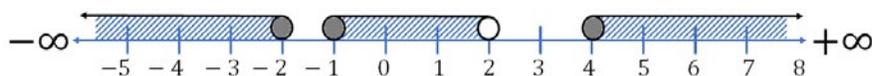


Figura 1.23. Solución gráfica del problema c.

Para este problema se debe tener en cuenta que, aunque la desigualdad establece un “mayor o igual” y en consecuencia los límites de los intervalos deben ser cerrados, los valores -2 y 2 deben quedar abiertos pues de lo contrario al tomarlos dentro del espacio de soluciones, llevaría a una división por cero.

Aplicaciones de las inecuaciones

De la misma forma que las ecuaciones, las inecuaciones se aplican a una gran variedad de contextos tanto académicos como profesionales, a continuación, se plantean algunos ejercicios donde se evidencia la manera de emplear estas herramientas matemáticas.

Ejemplo 1.32. Una empresa de telecomunicaciones inalámbricas le ha asignado un ancho de banda de frecuencias que va desde los 30GHz hasta los 40GHz y debido al tipo de tecnología empleada el número de canales $-n-$ que puede operar entre estas dos frecuencias, sin que ocurra interferencia obedece a la relación matemática $10 + 5n$. Determine cuántos canales puede operar la empresa de forma segura.

Solución: este problema tiene una restricción doble, como se muestra a continuación

$$30 \leq 10 + 5n \leq 40$$

El 10 está sumando, luego pasa a restar a ambos lados de la inecuación.

³ No necesariamente los valores a la derecha del valor que anula una restricción lineal son siempre positivos, si por ejemplo una de las restricciones fuera $(1-x)$, los valores a la derecha de 1, hacen que esta sea negativa, y los valores a la izquierda hacen que sea positiva. Basta con probar números a la derecha y a la izquierda de 1, para constatar su signo.

Sección 1.6: Inecuaciones lineales y no lineales

$$30 - 10 \leq 5n \leq 40 - 10$$

$$20 \leq 5n \leq 30$$

El cinco multiplica a la variable, luego pasa a dividir a ambos lados de la inecuación.

$$\frac{20}{5} \leq n \leq \frac{30}{5}$$

Por tanto

$$4 \leq n \leq 6$$

Que equivale a afirmar

$$n \in [4,6]$$

Como solamente se pueden tomar números enteros debido a la naturaleza del problema entonces la solución es que la empresa debe utilizar 4, 5 o 6 canales para enviar su información, si emplea más o menos se sale de los límites de frecuencia permitida.

Ejemplo 1.33. Un comerciante quiere vender su producto a USD 6 la unidad, pero el costo de fabricarlo y traerlo obedece a la relación $C = 1,6x + 1.200$ dólares. Determine cuantos productos debe vender para obtener alguna ganancia.

Solución: para obtener ganancia, el ingreso debe ser mayor a los costos, esto es

$$I > C$$

$$6x > 1,6x + 1200$$

Resolviendo la anterior inecuación se obtiene

$$6x - 1,6x > 1200$$

$$5,4x > 1200$$

$$x > \frac{1200}{5,4}$$

$$x > 222,2 \text{ unidades}$$

Pero como es probable que no exista número decimal de unidades, el comerciante debe vender más de 223 unidades si quiere obtener alguna ganancia.

Sección 1.6: Inecuaciones lineales y no lineales

Ejercicios sección 1.6. Inecuaciones lineales y no lineales.

En los ejercicios siguientes resolver la inecuación dada y representar la solución en notación de intervalo y de conjunto.

1. $2x - 3 < 5$

2. $-3x + 1 \geq 5$

3. $3x + 7 \leq 28$

4. $12 - 5x \leq -3$

5. $6x - 3 < 2x + 5$

6. $x - 3 < 5x + 4$

7. $6x + x^2 - 1 < x(x - 3) + 8$

8. $5x + 3 \geq 18$

9. $16 - 6x \geq -2$

10. $-4x^2 + 6x > 4x - 4x^2 + 10$

11. $3x + 4 < 5x - 2$

12. $11x + 2 > 20x + 23$

13. $x + 3 \geq 2(3x - 4) - 2(5 - x)$

14. $3x + 4 < 5x - 2$

15. $\frac{6x+4}{2} > \frac{2-x}{-3}$

16. $0 \leq 2x + 4 < 10$

17. $-5 < 3x + 1 \leq 10$

18. $11x + 2 > 20x + 23$

19. $12 < 2x + 2 \leq 16$

20. $2x + 1 < 5 < 2x + 7$

21. $-3 \leq x + 5 < 3$

22. $-2 < 5 + 7x \leq 26$

23. $7 - x \leq 10 < 12 - x$

24. $-7 \leq \frac{4-2x}{3} \leq \frac{1}{3}$

25. $\frac{1}{8} < 4 - 2(x + 3) \leq 5$

26. $2,45 < 3,1 + 0,16x < 4,45$

27. $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} - \frac{x}{4} \leq \frac{5}{2}$

28. $\frac{x+1}{1-x} \geq 0$

29. $x^2 + 3x - 4 \leq 0$

30. $x^2 - 4 \leq 0$

31. $x^2 - 1 \geq 0$

32. $x^2 + x \geq 0$

33. $x - x^2 < 0$

34. $\frac{3-x}{x+4} \geq 0$

35. $\frac{1}{x+2} < 1$

36. $\frac{3-x}{x} \geq 2$

37. $\frac{x^2+2x-3}{x-4} \leq 0$

38. $\frac{3-\frac{1}{3}x^2}{x+1} \leq 0$

39. $\frac{x+3}{x+1} > \frac{2}{x}$

40. $\frac{5-x}{x} \geq x + 3$

41. $\pi x^2 - 2 \geq 0$

42. $x^2 + x + 1 \geq 0$

Sección 1.6: Inecuaciones lineales y no lineales

Problemas de aplicación

A continuación, se presentan una serie de escenarios problemáticos en diversas áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), los cuales deberán ser interpretados, modelados y resueltos para encontrar una solución adecuada. Para ello, se requiere ilustrar y explicar claramente los modelos propuestos, identificando las variables utilizadas y puntualizando la estrategia de solución empleada para alcanzar una solución de alta calidad.

43. **Costo de transporte:** un comerciante necesita vender su producto en varias ciudades y decide alquilar vehículos para lo cual una compañía le ofrece los siguientes planes:
- Plan 1:* Pago único de \$300.000 y \$1250 por kilómetro recorrido.
- Plan 2:* Pago semanal de \$850.000
- El comerciante establece que necesita los vehículos dos semanas y que su recorrido semanal es de 600 km por vehículo.
- Bajo estas condiciones, qué plan debe escoger el comerciante.
 - Cuál debe ser el máximo recorrido semanal para que en las dos semanas resulte más favorable el plan 1.
 - Cuál debe ser el mínimo recorrido semanal para que en las dos semanas resulte más favorable el plan 2.
44. **Peso máximo:** se desea mover un gran cargamento de libros del primer al quinto piso de un edificio usando un elevador. El elevador tiene una placa que dice "**peso máximo 450 kilos**". Si cada caja de libros pesa 30 kilogramos, encuentre el número de cajas que se pueden colocar en el elevador.
45. **Peso del operario:** del ejercicio anterior, si el peso de la persona que transporta los libros es 75 kilos encuentre el número máximo de cajas que se pueden subir al ascensor.
46. **Celulares:** un operador celular informa a un cliente que el cobro por una llamada nacional es de 1000 pesos por los 2 minutos iniciales y 200 pesos por cada minuto agregado. Cualquier fragmento de minuto adicional será redondeada al siguiente minuto. Encuentre el tiempo máximo que el cliente puede hablar si cuenta con solo 20000 pesos.
47. **Parqueaderos:** un parqueadero de motos en el centro de Pereira cobra \$2.500 por los primeros sesenta minutos y \$600 **por hora agregada o fracción de hora**. ¿Cuál debe ser el tiempo máximo que una persona puede parquear su motocicleta para pagar a lo sumo \$5,500
48. **Costo de la poesía:** un poeta piensa escribir y publicar su propio libro; él estima que su ecuación de ingresos es $I = 35x$ y su ecuación de costo es $C = 30.500 + 4,5x$ donde x es la cantidad de libros que comercia y C e I los costos y los ingresos expresados en miles de pesos. Encuentre el número mínimo de libros que requiere vender para obtener ganancia.
49. **Costo de la Poesía:** con respecto al problema anterior, si el poeta espera una ganancia de \$12,200,000, ¿cuántos libros debe vender?
50. **Tintorería:** se inaugura una tintorería en el centro de la ciudad y se estima que la ecuación de costo anual es $C = 8,00 + 0.05x$ y la ecuación de ingresos $R = 1,85x$, donde x es la cantidad de mudas de ropa higienizadas en un año. Halle el número mínimo de mudas de ropa que debe lavar la tintorería en el año para obtener una ganancia.
51. **Tintorería:** con respecto al problema anterior, si se espera una ganancia anual de US\$6300, cuál debe ser el número de prendas lavadas.
52. **Derecho de uso:** a una empresa le ofrecen dos opciones para transportar sus productos;

Sección 1.6: Inecuaciones lineales y no lineales

- la primera opción consiste en pagar un costo fijo de US\$ 250 y posteriormente le cobran 23,8 centavos por cada producto que quiera enviar; la segunda opción no tiene cargo fijo pero le cobran 35 centavos por cada pieza o producto que quiera transportar. Determine el número mínimo de productos o elementos que debe enviar la empresa, para que sea más rentable transportarlas con la primera opción.
53. **Costo de envío:** Para determinar el peso máximo de un paquete que se pueda enviar por primera clase con un presupuesto de USD 30, se debe encontrar el punto en el cual el costo total del envío no supere el presupuesto disponible.
54. **Impuestos:** para que el Estado no pueda cobrar el impuesto de retención en la fuente a un trabajador independiente no puede declarar a final de año ingresos superiores a 24 millones de pesos. Si mensualmente este trabajador devenga 1,6 millones de pesos mensual y le ofrecen un trabajo donde le pagan \$600,000 mensuales, ¿cuánto tiempo debería laborar para continuar exento de este impuesto estatal.
55. **Examen:** para ganarse una beca universitaria, un estudiante debe obtener un promedio de 400 puntos o más en cinco pruebas escritas. Si en las primeras cuatro sus calificaciones fueron 350; 400; 450; 350. ¿Cuál es el intervalo de notas que debe obtener en la última prueba para ganarse la beca de la Universidad?

CAP. 2. FUNCIONES

En el capítulo anterior, se introduce el concepto de ecuación como un tipo especial de relación de igualdad entre dos expresiones matemáticas que tienen variables conocidas y desconocidas, unidas mediante operaciones y cuya intencionalidad primaria es encontrar el valor o conjunto de valores de las variables desconocidas. En este capítulo, se retoma lo desarrollado por Murcia y Henao(2021) y se analizan las funciones como tipos especiales de relaciones matemáticas, definiendo en ellas características y propiedades importantes e igualmente dentro de las funciones las ecuaciones.

Tómese como ejemplo la función lineal $f(x) = 2x + 1$ que puede convertirse en una ecuación lineal de dos variables como

$$y = 2x + 1$$

La cual tiene infinitas soluciones, ahora sí $y = 7$ por ejemplo, la ecuación de dos variables se convierte en una ecuación lineal con una sola variable.

$$7 = 2x + 1$$

Que desde luego se puede solucionar llegando a la respuesta $x = 3$. Nótese entonces la relación tan estrecha que tienen las funciones y las ecuaciones y lo sencillo que es convertir una en otra. Para los fines del presente texto se prefiere trabajar primero y de forma independiente el tema de las ecuaciones para aprender a manipularlas y así comprender más fácil las funciones, sin embargo, en esta sección se toman como unidad funcional que es el sentido verdadero que deben tener las funciones y las ecuaciones.

SECCIÓN

2.1

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE FUNCIONES

En la modelación de situaciones reales, muchas veces ocurren que las variables que describen las características son dependientes, es decir, el valor que puede adquirir una variable depende de otra; como ejemplo, supóngase el precio de los alimentos y el precio de los combustibles, es sabido que cuando el precio de la gasolina sube, el precio de los alimentos tiende a subir lo que sugiere que existe algún tipo de relación entre estos dos elementos, así no sea tan fácil describirla en términos matemáticos; existen por otro lado relaciones más fáciles de modelar, como el costo de una carrera en taxi, este valor depende del día y la hora en que se haga el servicio, depende de la distancia recorrida, del tiempo que el auto esté

Sección 2.1: Introducción al concepto de funciones

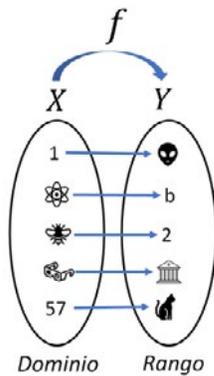


Figura 2.1. Representación en diagramas de Venn para una función.

Tabla 2.1. Función pasaje de bus.

#personas	Costo total
0	\$0
1	\$2.500
2	\$5.000
3	\$7.500
n	2.000 · n

El costo total de los pasajes en un bus es un buen ejemplo de una función. A cada persona se le asocia un costo y el costo total de estos se van incrementando a medida que crece el número de personas.



Evaluar la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{Si } x < -2 \\ 1 & \text{Si } -2 \leq x < 2 \\ x - 1 & \text{Si } x \geq 2 \end{cases}$$

En los puntos

$$x = -3 ; x = 0.5 ; x = 2.5$$

Solución



detenido y del lugar de destino o el lugar de origen. Algunas de esas relaciones, que cumplen propiedades especiales reciben el nombre de funciones.

Definición 2.1. Definición de función: una función es una relación o correspondencia donde cada elemento x de un conjunto de partida X , le corresponde un único elemento y de un conjunto de llegada Y .

El conjunto X se llama dominio de f , y el número y se denomina imagen de x por f y se denota por $f(x)$. El recorrido o rango de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los elementos de X

Las funciones pueden especificarse de muchas formas, sin embargo, para cumplir con los objetivos del presente texto, se usa la forma que involucra la relación de variables en forma de ecuación.

Ejemplo 2.1. Dada la función mediante la ecuación $f(x) = x^2 - 2x + 1$, calcular la imagen cuando:

- a. $x = 0,5$
- b. $x = -1$
- c. $x = 1$
- d. $x = x - h$

Solución: Para calcular la imagen o el valor de la función para los valores indicados de la variable x (variable independiente), se reemplazan estos valores en la ecuación que define la función.

- a. $f(0,5) = (0,5)^2 - 2(0,5) + 1 = 0,25 - 1,0 + 1 = 0,25$
- b. $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$
- c. $f(1) = (1)^2 - 2(1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 0$

Para el último caso, se debe reemplazar la variable x por $x - h$ lo que resulta en:

$$f(x - h) = (x - h)^2 - 2(x - h) - 1$$

Lo que lleva a plantear

$$f(x - h) = x^2 - 2xh + h^2 - 2x + 2h - 1$$

Que es la respuesta buscada

Ejemplo 2.2. Para la función $f(x) = x^2 + 3x - 2$ determine $f(2)$ y $f(x + h)$

Solución: Para el primer caso basta con reemplazar x con 2, así:

$$f(2) = (2)^2 + 3(2) - 2 = 4 + 6 - 2 = 8$$

Sección 2.1: Introducción al concepto de funciones

Para la segunda parte, igualmente se reemplaza a x por $x + h$, lo que lleva a decir:

$$f(x + h) = (x + h)^2 + 3(x + h) - 2 = x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h - 2$$

Organizando se tiene:

$$f(x + h) = x^2 + (2h + 3)x + (h^2 + 3h - 2)$$

Determinar el dominio y el rango de una función implica definir claramente los elementos de los conjuntos de partida y llegada, es decir, encontrar el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente y el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente. El siguiente ejemplo ilustra de forma aproximada para encontrar estos conjuntos.

Ejemplo 2.3: Determine el dominio y el rango de la función matemática apoyándose de la figura 2.2.

$$f(x) = x^2 + 1$$

Solución: nótese de la anterior relación que la variable x puede tomar cualquier valor, sin embargo, $f(x)$ solamente puede adquirir valores positivos mayores a 1 debido a que el cuadrado transforma cualquier cantidad positiva en negativa. Por tanto

$$Df = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

$$Rf = x \geq 1 = [1, +\infty)$$

La gráfica de esta función está representada en la figura 2.2.; efectivamente, analizando la gráfica se observa que no hay ninguna restricción para la variable x , por otro lado, la gráfica solo existe para valores iguales o mayores a 1 en la variable y .

Por tanto, es posible evidenciarla existencia de una asociación de términos de un conjunto con otro y, además, cabe la definición alternativa de función como:

Definición 2.2. Definición de función: una función es un conjunto de pares ordenados (x, y) en el que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer elemento. El conjunto de todos los números definidos para x se denomina dominio y el valor correspondiente para cada número de estos es la imagen cuyo conjunto conforma el rango.

En términos simples, existen eventos que no están permitidos en la matemática básica de los números reales, algunos de los más frecuentes son:

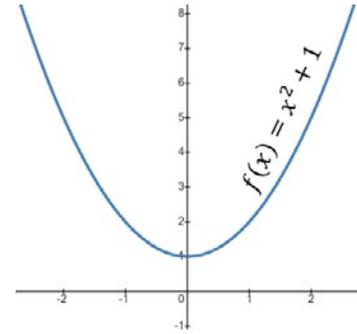


Figura 2.2. Representación gráfica de la función del ejemplo 2.3.

IMPACTO



Figura 2.3. Representación artística del impacto de un cometa contra la Tierra.

Imagen tomada de :
<https://es.slideshare.net/guest929db2/eras-geologicas-1323585>

La posibilidad de impactos de meteoritos y cometas en la Tierra ha fascinado durante mucho tiempo a los científicos y al público en general por igual. Si bien la idea de un evento catastrófico causado por la colisión de un cuerpo celeste con nuestro planeta puede parecer cosa de ciencia ficción, la evidencia histórica y la investigación científica sugieren que tales impactos no solo son posibles, sino que han ocurrido en el pasado.

La evidencia histórica muestra que los impactos de meteoritos y cometas en la Tierra han ocurrido en el pasado; uno de los ejemplos más famosos es el evento de impacto de Chicxulub, que ocurrió hace aproximadamente 66 millones de años. Se cree que este impacto condujo a la extinción de los dinosaurios y provocó cambios significativos en el clima de la Tierra.

Sección 2.1: Introducción al concepto de funciones

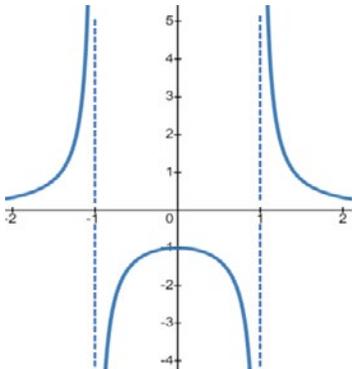


Figura 2.4. Representación gráfica para el ejemplo 2.4.

Nótese que el dominio de esta función son todos los números reales excepto 1 y -1. Por otro lado, el rango de la función son todos los números reales excepto aquellos comprendidos entre 0 y -1.

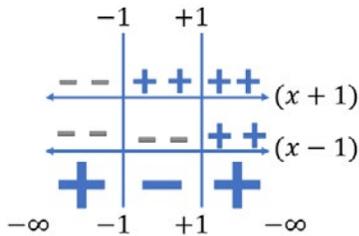


Figura 2.5. Solución para el problema 2.4.

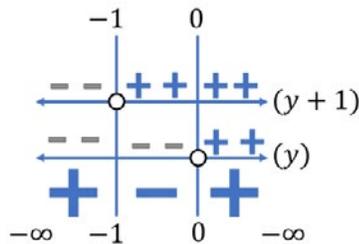


Figura 2.6. Solución para el ejemplo 2.4.

- División por cero.
- Raíz par de cantidades negativa.
- Argumentos negativos de funciones logarítmicas.
- Algunas singularidades para funciones trigonométricas.

Cuando se analiza el dominio o el rango de cualquier función es importante reconocer en ellas la posibilidad de ocurrencia de estos eventos y en tal caso se deben eliminar del conjunto solución, las cantidades o conjunto de cantidades que ocasionan esa dificultad.

Ejemplo 2.4. Determine el dominio y el rango de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Solución: en este caso puede ocurrir el problema que dependiendo del valor que tome la variable pueda aparecer una división por cero, lo que implica que para el dominio se deben tomar todos los valores menos aquellos que resulten en un cero en el cociente. Para identificarlos se tiene entonces:

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow (x + 1)(x - 1) = 0$$

Igualando cada factor a cero se tiene entonces que x no debe tomar ni 1 ni tampoco -1, así el dominio queda:

$$Df = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

Para el rango se debe despejar a $y = f(x)$ en términos de x , lo que conlleva a decir:

$$y = \frac{1}{x^2 - 1} \rightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{y} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{y} + 1}$$

Como aparece una raíz par, se debe asegurar que este sea mayor a cero, en consecuencia:

$$\frac{1}{y} + 1 \geq 0 \rightarrow \frac{1 + y}{y} \geq 0$$

y aplicando el método del cementerio se tiene entonces que el rango es:

$$Rf = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

La representación gráfica de esta función se muestra en 2.4.

Sección 2.1: Introducción al concepto de funciones

Ejercicio 2.5. Encuentre el dominio y el rango de la función

$$f(x) = +\sqrt{x^2 - 1}$$

Solución: Para este caso, no existe valor que pueda tomar la variable independiente de tal forma que resulte una división por cero, sin embargo, hay una raíz par y necesariamente la cantidad bajo el radical debe ser mayor a cero, así:

$$x^2 + 1 \geq 0$$

Factorizando se obtiene

$$(x + 1)(x - 1) \geq 0$$

Aplicando de nuevo el método de las lápidas y las cruces (figura 2.6) se obtienen los intervalos donde la función es positiva, así el dominio es

$$Df = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Para el rango se despeja la variable x , en términos de y .

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \rightarrow y^2 = x^2 - 1$$

Finalmente

$$x = \sqrt{y^2 + 1}$$

Nótese que, aunque se tiene una raíz, la cantidad bajo el radical nunca puede ser negativa, sin embargo, analizando de nuevo la presente en la función y recordando que solamente se toman los valores positivos, entonces el rango es

$$\mathcal{R}f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$$

La figura 2.7., ilustra esta situación

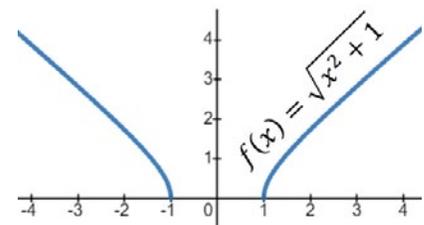


Figura 2.7. Representación gráfica del problema 2.5.

Funciones pares, impares y compuestas.

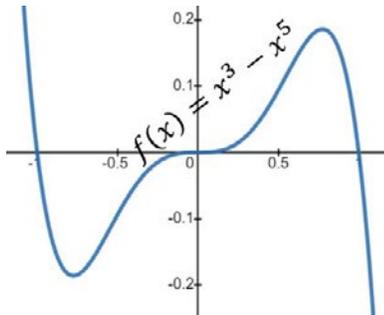
Las matemáticas como cualquier otra disciplina se han venido desarrollando en diferentes líneas del conocimiento orientadas por intereses científicos, tecnológicos, culturales y hasta políticos y económicos. De la misma manera las funciones se han venido creando, transformando y definiendo para dar cuenta de más y mejores soluciones a situaciones complejas. En ese sentido, aunque las funciones son únicas y representan una misma idea, es posible definir en el cálculo elemental, tres categorías a saber:

1. Funciones algebraicas.
2. Funciones trascendentales.
3. Funciones trigonométricas

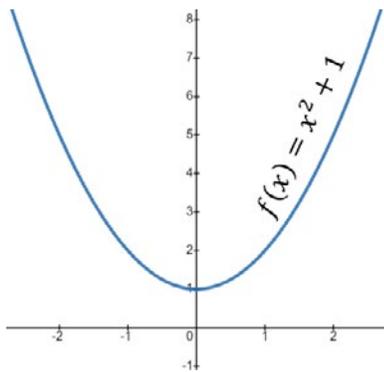
Sección 2.1: Introducción al concepto de funciones

Aunque es importante aclarar que no son las únicas. El comportamiento de las funciones y la forma que estas adquieren permite clasificarlas de diversas maneras siendo una de las más recurrentes, la paridad.

Las funciones pares son aquellas que tienen como simetría el eje de las ordenadas, mientras que las funciones impares tienen simetría respecto al origen cartesiano; para definir en términos analíticos la paridad de una función basta con realizar una pequeña prueba en los signos de esta.



(a). Función Impar



(b). Función Par

Figura 2.8. Gráficas de funciones. (a) Función Impar. (b). Función Par.

Las funciones pares tienen como eje de simetría a las abscisas, mientras que las funciones impares tienen como punto de simetría, el origen cartesiano.

Definición 2.3. Paridad para funciones. Sea la función $y = f(x)$, real continua en su dominio, entonces se puede establecer que:

La función $y = f(x)$ es par si $f(x) = f(-x)$

La función $y = f(x)$ es impar si $f(x) = -f(-x)$

La anterior prueba establece que si al momento de reemplazar la variable x por la variable $-x$, se sigue obteniendo la misma función, entonces esta es par. Si por el contrario se obtiene la misma función, pero cambiada de signo entonces esta es impar.

Ejemplo 2.6. Determine la paridad de cada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^3 - x^5$ y b. $f(x) = x^2 + 1$

Solución. reemplazando a x por $-x$ se tiene:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^5 \rightarrow f(-x) = -x^3 + x^5$$

Pero factorizando un -1 se tiene

$$f(-x) = -(x^3 - x^5) \text{ lo cual permite establecer que}$$

$$f(-x) = -f(x) \text{ y en consecuencia la función es impar.}$$

b. Realizando el mismo procedimiento para la segunda función se tiene:

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 \rightarrow f(-x) = x^2 + 1 = f(x)$$

Por tanto, la función es par. La figura 2.8., muestra estas dos gráficas.

Otra utilidad de las funciones es que con ella se pueden hacer composiciones, es decir, se puede hacer una función de otra función, lo que resulta una herramienta muy útil al momento de describir situaciones más complejas.

Definición 2.4. Función compuesta. Sean f y g dos funciones, la función dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ llamada función f compuesta g tiene como dominio el conjunto de todos los x en g , tal que $g(x)$ es el dominio de f .

Sección 2.1: Introducción al concepto de funciones

Ejemplo 2.7. Dada $f(x) = 2x + 1$ y la función $g(x) = x^2 - 3x + 1$
Encuentre la función compuesta $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

Solución: atendiendo a la definición de función compuesta se tiene:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^2 - 3x + 1) + 1 = 2x^2 - 6x + 3$$

Para el segundo caso, se tiene:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2 - 3(2x + 1) + 1$$

Simplificando.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4x^2 + 4x + 1 - 6x - 3 + 1$$

Para obtener finalmente.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4x^2 - 2x - 1$$

Note una particularidad interesante y es que $f \circ g \neq g \circ f$ es decir no hay equivalencia para una propiedad conmutativa.

Sección 2.1: Introducción al concepto de funciones

Ejercicios sección 2.1. Introducción al concepto de funciones.

Responda a las siguientes preguntas y cuestiones.

Así como se planteó en Murcia y Henao(2021), se pide:

1. ¿Qué similitudes y diferencias encuentra entre las funciones y las relaciones?
2. Establezca cuatro situaciones reales donde se vean claramente aplicadas relaciones y funciones de cualquier naturaleza.
3. Defina cuatro situaciones en el ámbito laboral, familiar o académico donde le gustaría aplicar modelación por funciones.
4. Qué otras singularidades matemáticas existen, aparte de las ya propuestas, que no estén definidas en la matemática real.
5. Proponga una tesis sobre por qué en funciones que tienen que ver con el tiempo, no se aceptan valores negativos.
6. Construya diversos diagramas de Ven para ilustrar relaciones y funciones.
7. Discuta la afirmación “existen funciones de conjuntos no vacíos en el dominio, con conjuntos vacíos en el rango”.
8. ¿Existen funciones que no sean pares ni impares? En caso afirmativo proponer algunas de ellas.
9. ¿El dominio de la función compuesta puede ser diferente al dominio de la función que la compone?
10. ¿El recorrido de la función compuesta puede ser diferente al recorrido de la función que la compone?

En los ejercicios siguientes evalúe la función en los puntos dados si es posible y simplifique el resultado.

Dado $f(x) = x + 1$ hallar:

11. $f(2)$
12. $f(x + 3)$
13. $f(x^2 + 1)$
14. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Dado $f(x) = x^2 - 2x + 1$ hallar:

15. $f(2)$
16. $f(x + 3)$
17. $f(x^2 + 1)$
18. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Dado $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$ hallar:

19. $f(2)$
20. $f(x + 3)$
21. $f(x^2 + 1)$
22. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Dado. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{Si } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{Si } x < 1 \end{cases}$ hallar:

23. $f(2)$
24. $f(-3)$
25. $f(1)$
26. $f(h + 1)$

Dado. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{Si } x \geq -1 \\ 1-x^2 & \text{Si } x < -1 \end{cases}$

Sección 2.1: Introducción al concepto de funciones

27. $f(-1)$

28. $f(-3)$

29. $f(1)$

30. $f(h + 1)$

Por medio de una tabla de valores, obtener las representaciones gráficas de las siguientes expresiones matemáticas.

31. $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

32. $f(x) = -3x + 4$

33. $f(x) = x^2 + 1$

34. $f(x) = -x^2 + x + 3$

35. $f(x) = x^3 - 1$

36. $f(x) = x^2 + x^3 - 1$

37. $f(x) = -x^5 + 6x^2$

38. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3$

39. $f(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$

40. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

41. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1}$

42. $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$

43. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

44. $f(x) = \frac{2 - x}{x^3 - 1}$

45. $f(x) = \frac{8 - x}{4 - x^2} + x$

46. $f(x) = \ln(x + 1)$

47. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

48. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)$

49. $f(x) = e^{x+1}$

50. $f(x) = e^{x^2+1}$

51. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

52. $f(x) = e^x + \ln x$

53. $f(x) = |x + 3|$

54. $f(x) = x + |x + 3|$

55. $f(x) = \frac{|x + 3|}{x + 3}$

56. $f(x) = \frac{|x + 3|}{x + 2}$

57. $f(x) = \llbracket x + 1 \rrbracket$

58. $f(x) = x \llbracket x \rrbracket$

59. $f(x) = |x| + x^2$

De las siguientes relaciones, determine cuál es función y cual no, justifique su respuesta

60. $y = 3$

61. $y^2 = 12x$

62. $f(x) = (16 - x^2)^{1/2}$

63. $g(x) = 2x^2$

64. $h(x) = \frac{x - 1}{2x + 5}$

65. $y = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

66. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

67. $\frac{y^3}{3} = x + 1$

68. $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$

69. $x = y$

70. $x = 2$

Dadas las siguientes funciones, encuentre el dominio y el rango (cuando sea posible). Posteriormente, encuentre la gráfica usando algún graficador y corrobore los resultados encontrados

71. $f(x) = 2x - 1$

72. $f(x) = 4 - x$

Sección 2.1: Introducción al concepto de funciones

73. $f(x) = 6 - 2x$

74. $f(x) = x^2 - 1$

75. $f(x) = x^2 + 1$

76. $f(x) = 5 - 4x + x^2$

77. $f(x) = \frac{1}{x}$

78. $f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$

79. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-16}$

80. $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$

81. $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

82. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

83. $f(x) = \frac{6-x}{x+3} - \frac{1}{x}$

84. $f(x) = \sqrt{x+1}$

85. $f(x) = \sqrt{3+x}$

86. $f(x) = \sqrt{8-2x}$

87. $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$

88. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

89. $f(x) = \sqrt{3 + \frac{2}{x}}$

90. $f(x) = \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1}$

91. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x-10}{x^3-4x}}$

92. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-16}}$

93. $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{5x-10}}$

94. $f(x) = \ln(x^2-9)$

95. $f(x) = e^{x+1}$

96. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

97. $f(x) = |x+3|^{ji}$

98. $f(x) = \frac{|x+3|}{x+3}$

99. $f(x) = (3x+2)^{1/2}$

100. $f(x) = (x^2-14)^{1/2}$

101. $g(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{9x^2-1}}$

102. $y = \frac{x+1}{x^2+x-2}$

103. $y = x^2 + 4x - 5$

104. $y = \frac{x+2}{x^2+5x-6}$

105. $g(x) = \frac{4}{4x+1}$

106. $h(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

107. $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2-16}{2x+4}}$

108. $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2-9}}$

109. $h(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+5x-14}}$

110. $h(x) = x - \frac{1}{x-1}$

111. $f(x) = -(25-x^2)^{1/2}$

112. $h(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+2}$

113. $g(x) = \left| \frac{x^2-5x+6}{x-2} \right|$

114. $y(x^2-1) = 2$

Sección 2.1: Introducción al concepto de funciones

115. $g(x) = \left| \frac{x}{x+2} \right|$

116. $f(x) = \frac{x}{|x-3|}$

117. $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$

118. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

En las siguientes funciones definidas a trozos, obtenga la gráfica, determine el dominio y el rango de estas.

119. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{Si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{Si } x \geq 1 \end{cases}$

120. $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{Si } x > 0 \\ 4-2x & \text{Si } x \leq 0 \end{cases}$

121. $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{Si } x < 1 \\ 2x+3 & \text{Si } x \geq 1 \end{cases}$

122. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \leq 1 \\ x & \text{Si } 1 < x \leq 3 \\ 6-x & \text{Si } 3 < x \leq 6 \\ 0 & \text{Si } x \geq 6 \end{cases}$

123. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{Si } x \leq -2 \\ x^2-4 & \text{Si } -2 < x \leq 3 \\ 8-x & \text{Si } x \geq 3 \end{cases}$

124. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x < 1 \\ 2 & \text{Si } x > 3 \end{cases}$

125. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{Si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$

126. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{Si } x < 0 \\ \sqrt{2x-x^2} & \text{Si } 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{Si } x > 2 \end{cases}$

127. $f(x) = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{Si } x > -1 \\ \frac{(x+1)(x+5)}{x^2+6x+5} & \text{Si } x \leq -1 \end{cases}$

128. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si } x \leq -1 \\ x & \text{Si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$

129. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{Si } x \leq -4 \\ 16-x^2 & \text{Si } -4 < x < 4 \\ 2-x & \text{Si } x \geq 4 \end{cases}$

En las siguientes funciones, determine si es función par, impar o ninguna de las dos, especificando las simetrías, si las tiene y corrobore sus resultados por medio de una gráfica.

130. $f(x) = x$

131. $f(x) = x^2$

132. $f(x) = x^3$

133. $f(x) = x+1$

134. $f(x) = x^2+1$

135. $f(x) = x^2-x$

136. $f(x) = x^3-x^2$

137. $f(x) = x^3-x$

En los ejercicios siguientes encuentre las funciones compuestas $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$ y determine el dominio y el rango, igualmente construya la gráfica

138. $f(x) = x+1$ $g(x) = x^2-3$

139. $f(x) = x^3$ $g(x) = x^2-3$

140. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $g(x) = x^2$

141. $f(x) = 3 + \frac{1}{2x^2+x}$ $g(x) = x-3$

142. $f(x) = x^2+3$ $g(x) = x^3+3$

143. $f(x) = 1-x^3$ $g(x) = 1-x^2$

Sección 2.1: Introducción al concepto de funciones

Problemas de aplicación

A continuación, se presentan una serie de situaciones problema en diferentes áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), las cuales requieren de su interpretación, modelado y resolución para llegar a una solución adecuada. Su trabajo consiste en ilustrar y explicar de manera clara los modelos propuestos, identificando las variables involucradas y puntualizando la estrategia utilizada para resolver cada problema, así como verificar la calidad de las soluciones encontradas.

144. **Depreciación:** en la actualidad, los equipos celulares han venido siendo cada vez cada vez más poderosas y compactos, de la misma manera el precio cae con el tiempo. Presuma que en x meses, el costo de cierto prototipo en dólares, será de:

$$C(x) = 50 + \frac{20}{x+2}$$

- ¿Cuál podría ser en 12 meses el costo?
- ¿Para el sexto mes, el costo será de cuánto?
- ¿En qué momento se alcanzaría el costo de USD 50?
- ¿En un mediano plazo, qué pasará con el costo?

145. **Contaminación ambiental:** en la época actual y con el cambio atmosférico, se ha podido comprobar que la media por día de óxido de carbono en el medio ambiente, sigue la siguiente función:

$$Q(n) = \sqrt{0.5n + 20}$$

Expresado en unidades, en el momento que la población expresada en n miles. Se puede decir que dentro de t años la población podría ser:

$$n(t) = 10 + 0.2t^2$$

- Expresar como función del tiempo el nivel de óxido de carbono en el aire.
- ¿En un periodo de 4 años cuál sería el nivel de óxido de carbono?
- ¿El nivel de óxido de carbono cuándo llegará a 7 unidades?

146. **Función de la demanda:** la demanda de consumo de cierto artículo, viene dada por:

$$D(p) = -50p + 800$$

Se expresa en N° de artículos por mes cuando el precio de mercado toma el valor de p dólares por unidad.

- Construya una gráfica de la función de demanda.
- Escriba el gasto total mensual de los compradores del artículo en términos de una función de p y realice su respectiva gráfica.
- Utilice la gráfica del literal b) para estimar el precio de mercado al cual el gasto total en el artículo es mayor.

147. **Oficina de viajes:** una agencia de viajes, ha estimado que el costo de un viaje para un grupo de x personas, según la siguiente función:

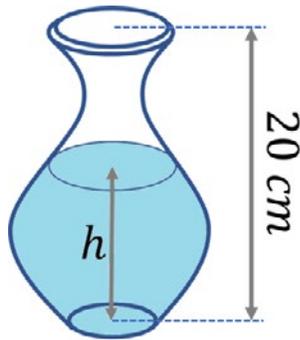
$$C(x) = 1800 + 30x$$

Expresado en miles de pesos. Un grupo de viaje, puede llegar a estar conformado máximo, por 60 personas. El precio del ticket por persona es \$100.000, más \$2.000 por cada ticket que no se vendió. Determinar:

- La función de incorporación, $I(x)$, de la compañía.
- La función de ganancia, $G(x)$, de la compañía.
- Cuál es la ganancia de la empresa con un viaje de 50 personas.

148. **Un líquido:** Una persona vierte cierto líquido dentro de un recipiente de 20 centímetros de altura a velocidad constante, llenándola de forma completa durante 8 segundos.

Sección 2.1: Introducción al concepto de funciones

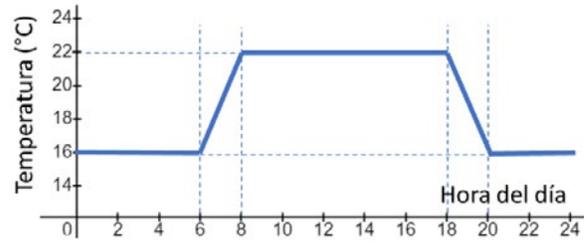


Según la figura anterior, teniendo en cuenta la forma del recipiente y definiendo h como el parámetro de profundidad del líquido medido en centímetros, además, sea t el tiempo que ha transcurrido, medido en segundos.

- Argumentar porque d , se considera una función de t .
- Definir de manera correcta el dominio y rango de esta función.
- Representar gráficamente la función planteada

149. **Desplazamiento:** un estudiante que viaja 12 kilómetros a velocidad constante cada día para asistir a la universidad se da cuenta tras llevar unos minutos conduciendo de que ha olvidado un trabajo que debía entregar. Conduciendo más rápido de lo habitual pero siempre a velocidad constante, regresa a casa, recoge el trabajo y parte de nuevo hacia la universidad. Asumiendo que los cambios se hacen de forma instantánea, dibujar una posible gráfica que representa el desplazamiento del estudiante durante este trayecto, en función del tiempo.

150. **Control de temperatura:** un termostato es un dispositivo electromecánico que controla la temperatura de una habitación de forma automática. La figura siguiente ilustra la forma como un termostato controla la temperatura de una casa



Donde T es la temperatura en Celsius y t , el tiempo en horas.

- Determinar aproximadamente $T(7)$ y $T(7)$.
- Si el dispositivo se programa nuevamente para producir una temperatura $H(t) = T(t - 1)$, ¿la gráfica sufriría cambios? Justificar la aseveración dada.
- Si se vuelve a programar el dispositivo para producir una temperatura $H(t) = T(t) - 1$, ¿la gráfica sufriría cambios? Justificar la aseveración dada.

151. **Las ondas en el agua:** en un lago con agua en reposo, se lanza a su centro un objeto produciendo ondas en forma de círculos concéntricos que van creciendo a medida que se acercan a la orilla. El radio (en centímetros) que produce la onda, viene dado por $r(t) = 4t$, allí el valor de t corresponde al tiempo en segundos pasado a partir de que el objeto golpea la superficie del lago (agua), por otro lado, el área del círculo viene dada por la función

$$A = \pi r^2$$

- Encontrar e interpretar la función $A(r(t))$
- Obtener una representación gráfica de la función compuesta.

152. **Automóviles y su forma dinámica.** La potencia P , en caballos de vapor, que necesita un tipo específico de vehículo para vencer la resistencia del aire es:

$$P(x) = 0,002v^2 + 0,005v - 0,029$$

con $10 \leq v \leq 100$

Sección 2.1: Introducción al concepto de funciones

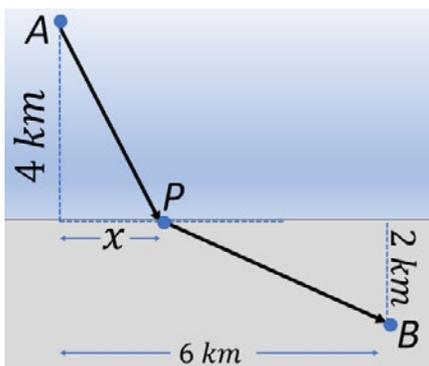
Donde v es la velocidad del coche en kilómetros por hora.

- Representar P usando algún graficador WEB.
- Reescribir la anterior expresión de forma tal que pueda recibir velocidades expresadas en millas por hora. NOTA. Una milla equivale a 1609 metros.

153. **Área de sitio de entrenamiento:** Se sabe que cuadrilátero –figura de cuatro lados– tiene un perímetro de 100 metros lineales.

- Bocetar una imagen que representa un rectángulo en la cual x sea la longitud de su base y h su ancho.
- Escribir el área A_r para el rectángulo estudiado en función de x y de h .
- Representar en forma gráfica la función área. ¿Cuál es el dominio que presenta esta función?
- Teniendo como referencia la gráfica anterior halle las dimensiones que originan la mayor área posible

154. **Tiempo.** Una persona que se encuentra en un bote en el punto A a 4 kilómetros del punto más próximo de la costa, se dispone a ir a otro punto B, situado a 6 kilómetros de recorrido por la costa y 2 kilómetro tierra adentro, tal como muestra la figura

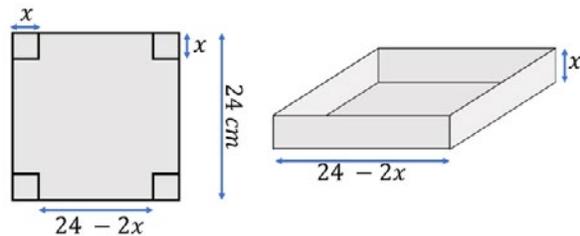


Si sabe que la persona tiene la capacidad de remar con una velocidad de 2 kilómetros por

hora y que tiene la capacidad de caminar a razón de 4 kilómetros por hora sobre tierra firme.

- Encuentre analíticamente una expresión algebraica que relacione el tiempo total que le toma a la persona ir del punto A al punto B en función del parámetro x .
- Por medio de una herramienta graficadora, encuentre el valor de x , que minimiza el tiempo de recorrido

155. **Volumen:** Se necesita elaborar una caja sin tapa de volumen máximo con una pieza de cartón corrugado cuadrado de 24 centímetros de lado, recortando pequeños cuadrados iguales de las esquinas para posteriormente doblar los lados hacia arriba, formando así la caja.



Una persona empieza a construir una tabla con diferentes valores de alto de la caja y así estimar la longitud y volumen de la misma.

Altura x	Longitud de la anchura	Volumen
0,5	$24 - 2(0,5) = 23 \text{ cm}$	$0,5 \cdot [24 - 2(0,5)]^2 = 264,5 \text{ cm}^3$
1,0	$24 - 2(1) = 22 \text{ cm}$	$1[24 - 2(1)]^2 = 484 \text{ cm}^3$
1,5	$24 - 2(1,5) = 21 \text{ cm}$	$1,5 \cdot [24 - 2(1,5)]^2 = 661,5 \text{ cm}^3$

- Completar la tabla usando una hoja de cálculo como Excel u otro programa similar.
- De forma gráfica obtenga el dominio y recorrido de la función
- Utilizar el resultado para estimar el volumen máximo y las dimensiones que lo hacen posible.

Sección 2.2: Función lineal

SECCIÓN 2.2	FUNCIÓN LINEAL
-----------------------	-----------------------

Una de las potencialidades del cálculo diferencial es su capacidad para encontrar razones de cambio en cualquier tipo de función, en ese sentido es importante analizar algunas propiedades de las funciones lineales y sus representaciones gráficas, –las líneas rectas– que corresponden a las funciones y ecuaciones lineales. La función lineal de hecho pertenece a un grupo de funciones denominadas polinomiales –analizadas con mayor detalle en la próxima sección–, sin embargo, se prefiere hacer un estudio más detallado de esta función, en esta parte del texto con el fin de poder comprender de forma más detallada conceptos importantes del cálculo.

La pendiente de una recta no vertical cuantifica el número de unidades que la recta desciende o asciende por cada unidad de desplazamiento horizontal a la derecha o a la izquierda. Supóngase la figura 2.9.

Al tomar dos puntos sobre la línea recta, es posible cuantificar cuando se avanza en las ordenadas Δy y cuando se avanza en las abscisas Δx , obteniéndose de la relación de estas dos cantidades, un valor constante en toda la línea, que realmente no depende de los puntos que se escoja siempre y cuando pertenezcan a la línea.

$$\text{Incremento de } y \rightarrow \Delta y = y_2 - y_1$$

$$\text{Incremento de } x \rightarrow \Delta x = x_2 - x_1$$

Por lo tanto, se puede definir la pendiente de una línea recta como

Definición 2.5. Pendiente. Sean dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) con $x_1 \neq x_2$ por donde pasa una única línea, cuya pendiente, entendida como la razón de cambio de las abscisas con el cambio de las ordenadas es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad [\text{Ec. 2.1}]$$

Adicionalmente, la pendiente de una recta, o un plano, está relacionado con su ángulo de inclinación, recordando la definición de tangente, la pendiente también puede definirse como

$$m = \tan \theta$$

Dada la naturaleza de m , es decir de su signo, la línea recta puede ser de tres tipos tal como se muestra en la figura 2.10.

$$\begin{aligned} m = 0 & \quad \text{Línea horizontal} \\ m > 0 & \quad \text{Línea creciente} \\ m < 0 & \quad \text{Línea decreciente} \end{aligned}$$

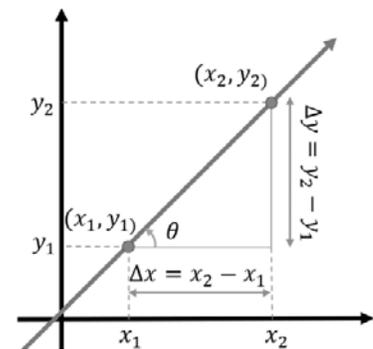


Figura 2.9. Pendiente de una línea recta

Sección 2.2: Función lineal

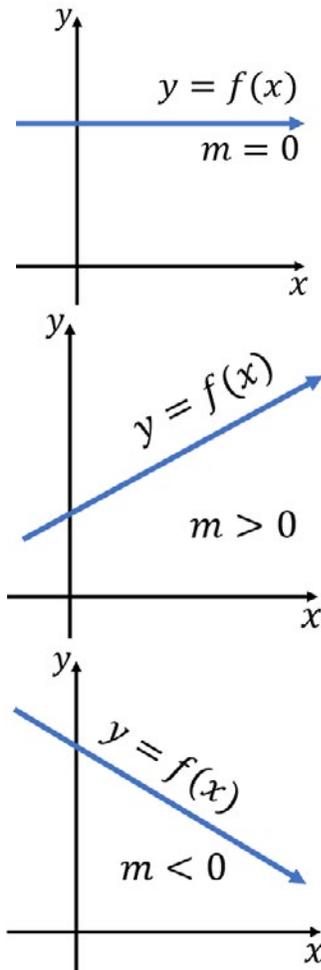


Figura 2.10. Representaciones gráficas de funciones lineales con los tres tipos de pendientes posibles.

Cuando se dice que una línea es creciente se está estableciendo que cuando la variable independiente aumenta, la variable dependiente también aumenta en magnitud, en su contraparte, cuando la función es decreciente, se está afirmando que cuando la variable independiente crece, la variable dependiente decrece. La figura 2.10., ilustra estas situaciones. Para definir todo el conjunto de puntos que representa la línea recta, que corresponde a encontrar la ecuación lineal, existen diversas estrategias, de las cuales se discuten algunas de las más utilizadas.

Teorema 2.1. Ecuación Punto Pendiente: La ecuación de la línea recta con pendiente m y que pasa por el punto (x_1, y_1) viene dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad [\text{Ec. 2.2}]$$

Esta relación establece que cuando se conoce la pendiente, y cualquier punto (x_1, y_1) por donde pasa la línea, es posible obtener la ecuación de esta, ahora, la pendiente se puede obtener de la relación anterior a esta conociendo dos puntos, lo que lleva a la expresión matemática:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad [\text{Ec. 2.3.}]$$

A continuación, se ejemplifican estas situaciones.

Ejemplo 2.8. Encuentre la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $(-1, -3)$ y $(2, 4)$.

Solución: utilizando simultáneamente las dos ecuaciones anteriores se tiene que:

$$y - (-3) = \frac{4 - (-3)}{2 - (-1)}(x - (-1))$$

simplificando se tiene:

$$y + 3 = \frac{7}{3}(x + 1)$$

que corresponde a:

$$y = \frac{7x}{3} - \frac{2}{3}$$

La anterior relación es la ecuación de la línea recta buscada.

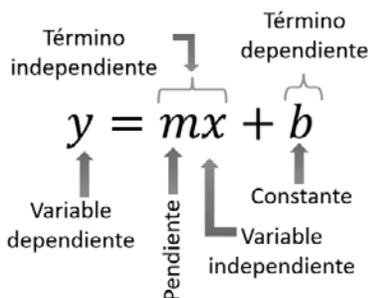


Figura 2.11. Representación canónica de la función lineal.

Teorema 2.2. Ecuación intercepto pendiente. La gráfica de una ecuación lineal de la forma:

$$y = mx + b \quad [\text{Ec. 2.4}]$$

Es una línea recta de pendiente m y que corta al eje de las abscisas en el punto $(0, b)$

Sección 2.2: Función lineal

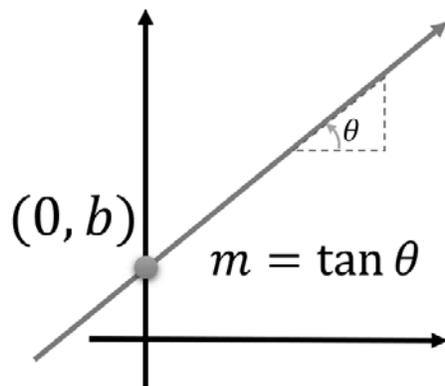


Figura 2.12. Intercepción de una ecuación con las ordenadas.

Todas las funciones lineales definidas en los reales cortan al eje Y sin excepción.

Algunas veces las ecuaciones lineales no están escritas en forma explícita sino implícita, lo que se conoce con el nombre de **forma general** y que tiene la estructura

$$Ax + By + C = 0$$

Nótese que los exponentes que acompañan a las variables son iguales a 1, lo que permite reconocerla como la ecuación de una función lineal.

Ejemplo 2.9. Encuentre la pendiente de la ecuación lineal

$$6x - 3y + 9 = 0$$

Solución: Basta con despejar la variable y en términos de x , así

$$6x + 9 = 3y$$

$$y = \frac{6x + 9}{3}$$

Finalmente

$$y = 2x + 3$$

La pendiente de esta línea recta es 2 y su intercepción con el eje Y es $(0,3)$

Razones de cambio

La pendiente de cualquier curva tiene muchas interpretaciones entre ellas sirve como razón o proporción y también como un ritmo o razón de cambio, que permite tomar acertadamente decisiones importantes. Cuando los ejes x e y tienen la misma unidad de medida, la pendiente no tiene unidad y la razón es una proporción; por otro lado, cuando los ejes tienen unidades diferentes, la pendiente es una tasa, ritmo o razón de cambio.

El Último Teorema de Fermat



Figura 2.12.1 Fermat.

Imagen tomada de:

<https://aprendiendomatematicas.com/el-ultimo-teorema-de-fermat/>

Pierre de Fermat fue un matemático francés del siglo XVII, famoso por su conjetura sobre ecuaciones diofánticas que se conoció como el "Último teorema de Fermat". La conjetura fue escrita en el margen de un libro llamado "Arithmetica", escrito por el matemático griego Diofanto; aquí Fermat anotó la conjetura en latín, y la traducción al español sería algo como:

"Es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados, y en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias de este exponente. No puedo probarlo ahora, pero tengo una prueba verdaderamente maravillosa para este teorema, que es demasiado grande para caber en este margen". Oré (2015).

En otras palabras, si n es un número entero mayor que 2, entonces no existen números enteros a , b y c distintos de 0, tales que se cumpla la igualdad:

$$a^n + b^n = c^n$$

En el año 1996 el matemático Andrew Wiles, demuestra el Teorema de Taniyama-Shimura, anteriormente una conjetura, que enlaza las formas modulares y las curvas elípticas con los cuales es posible la demostración del último teorema de Fermat

Sección 2.2: Función lineal

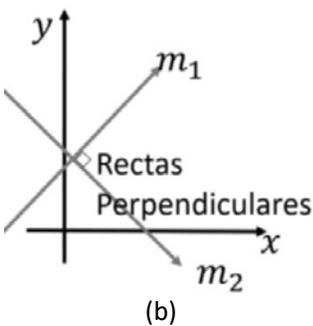
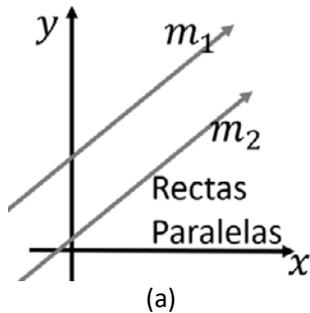


Figura 2.13. Rectas paralelas y rectas perpendiculares.

Una de las particularidades de las líneas rectas paralelas es que, al ser distintas, ellas nunca se interceptan. Por otro lado, en las rectas perpendiculares, el ángulo al cual se interceptan es de 90° .

Ejemplo 2.10. La intensidad de la señal de comunicación en cierto conductor decrece proporcionalmente con la longitud de este; se sabe que en los primeros $3m$ la señal cae un $4,5\%$. ¿Cuál es el ritmo de cambio de la señal respecto a la longitud? Y ¿cuánto habrá caído la señal los primeros $50m$?

Solución: lo primero es hallar la razón de cambio, haciendo uso de la pendiente

$$\text{Razón de Cambio} = \frac{\% \text{caída}}{\text{longitud}}$$

$$R. C = \frac{4,5\%}{3m}$$

$$R. C = 1,5 \frac{\%}{m}$$

Lo que significa que, por cada metro, la señal cae $1,5\%$. De esta manera es posible predecir el porcentaje de caída en $50m$, que corresponde a:

$$\text{Caída de señal} = 1,5 \frac{\%}{m} \times 50m = 75\%$$

La señal, en 50 metros habrá caído 75% .

Rectas paralelas y perpendiculares

En algunas ocasiones las líneas pueden ser paralelas o perpendiculares; en el caso de las rectas paralelas, sus pendientes son iguales, y no tienen punto de intersección; para las líneas perpendiculares, la intersección se realiza a un ángulo de 90° ; las representaciones gráficas de estas situaciones se muestran en la figura 2.13.

Teorema 2.3. Líneas Paralelas y Perpendiculares. Dos rectas son paralelas o perpendiculares si cumplen con las siguientes condiciones:

1. Dos líneas rectas no verticales son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.

$$m_1 = m_2 \quad [\text{Ec. 2.5}]$$

2. Dos líneas rectas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a -1 .

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad [\text{Ec. 2.6}]$$

Sección 2.2: Función lineal

Es importante recordar que, para encontrar el punto de corte de dos líneas rectas no paralelas, existen diversos métodos algebraicos como reducción por sustitución, igualación, determinantes e inclusive, para sistemas de 2×2 puede emplearse el método gráfico.

Las funciones lineales son ampliamente utilizadas en disciplinas como la ingeniería, la administración, la economía y los negocios, representan diversas situaciones donde las relaciones entre variables son directamente proporcionales y es en ese sentido que deben ser estudiadas con detenimiento.

Ejemplo 2.11. Dada la ecuación de la línea recta $6x - 3y + 9 = 0$, encontrar la ecuación de una línea recta que pase por el punto $(2,3)$ y que sea:

- a. Paralela. B. Perpendicular.

Solución: en el problema anterior, se obtuvo la ecuación canónica llegando a la expresión:

$$y = 2x + 3$$

Llegando a la conclusión que la pendiente es 2; en la primera situación, se tiene una línea recta paralela a esta y en consecuencia la pendiente debe ser también 2 y utilizando la ecuación punto pendiente anteriormente definida se logra:

$$y - 3 = 2(x - 2)$$

Simplificando se obtiene:

$$y = 2x - 1$$

Y expresándola en forma general se obtiene:

$$2x - y - 1 = 0$$

En la recta perpendicular, el producto de las dos pendientes debe ser -1 entonces:

$$m_1 m_2 = -1 \rightarrow m_1 2 = -1 \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

La pendiente de la recta perpendicular a la primera línea es $-\frac{1}{2}$, así, aplicando la ecuación punto pendiente se obtiene:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

Simplificando se obtiene:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Expresándola en forma general se logra:

Sección 2.2: Función lineal

$$2y + x - 8 = 0$$

La representación gráfica de estas tres funciones se muestra a continuación.

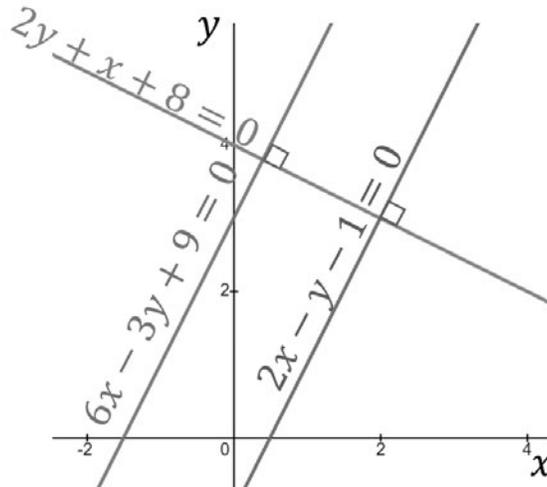


Figura 2.14. Rectas paralelas y perpendiculares del problema 2.11.

Nótese entre otras cosas, que los coeficientes de las variables son múltiplos entre sí y, de hecho, si se dividen estos coeficientes entre ellos, –los coeficientes de la variable x entre sí, y los coeficientes de la variable y entre sí–, deben dar valores iguales.

Ejemplo 2.12. La cerveza es un producto de alta demanda en todo el mundo, representando para Colombia casi el 70% del total del total del mercado de licores. En los últimos cuatro años el consumo promedio de cerveza medido en litros por persona se ha venido incrementando aproximadamente de forma lineal tal como muestra la figura siguiente.

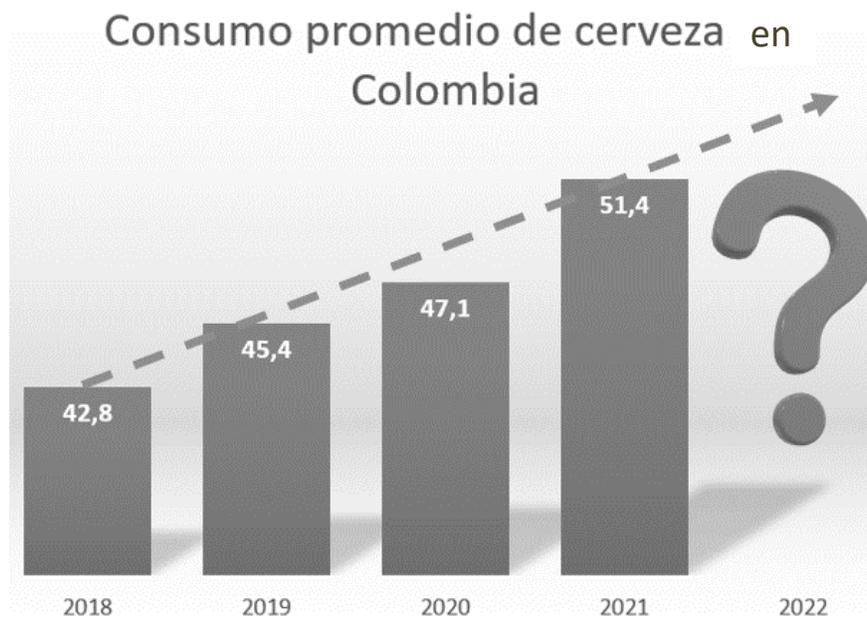


Figura 2.15. Consumo promedio en litros de licor por persona.

Sección 2.2: Función lineal

- a. Determinar la función lineal del consumo, tomando como referencia los años 2018 y 2021 y estimar el consumo esperado para el año 2022.

Solución: dado que el problema establece que se puede tener una función lineal que represente los datos, usando la ecuación 2.3., y los puntos de referencia (año, consumo) = $(x_1, y_1) = (2018, 48.8)$ y el punto $(x_2, y_2) = (2021, 51.48)$, se llega a la expresión:

$$y - 48,8 = \frac{51,48 - 48,8}{2021 - 2018}(x - 2018)$$

Simplificando se obtiene:

$$y - 48,8 = \frac{2,6}{3}(x - 2018) \rightarrow y - 48,8 = \frac{13}{15}(x - 2018)$$

Que equivale a:

$$y - 48,8 = \frac{13}{15}x - \frac{26234}{15} \rightarrow y = \frac{13}{15}x - \frac{25502}{15}$$

Reemplazando en la anterior expresión el año 2022, se obtiene:

$$y = \frac{13}{15}(2022) - \frac{25502}{15} = \frac{784}{15} \approx 52,27$$

Por tanto, para el literal a, se espera que el consumo de cerveza en Colombia, este alrededor de 52,27 litros por persona.

Se deja al lector encontrar la función lineal que representa el promedio en litros de consumo de cerveza en Colombia, tomando como referencia los años 2018 y 2020. ¿por qué la estimación no es igual a la anterior?



DEPRECIACIÓN

La depreciación es la forma contable y financiera mediante la cual se reconoce el desgaste y pérdida de valor que sufre un bien debido al uso, deterioro u obsolescencia que sufre este con el paso del tiempo.

En el año 2023 una empresa transportadora adquiere un vehículo nuevo por un valor de USD 24.000 y estima que este pierde su valor o deprecia totalmente a los 15 años. Si la depreciación ocurre de forma constante, obtener:

- La ecuación que representa el valor de vehículo en función del tiempo.
- El valor comercial del vehículo en el 2030.
- El momento para el cual el vehículo ha perdido el 60% de su valor inicial.

SOLUCIÓN



Sección 2.2: Función lineal

Ejercicios Sección 2.2. Función lineal.

Responda a las siguientes preguntas y cuestiones.

Responda a las siguientes preguntas y cuestiones justificando su respuesta

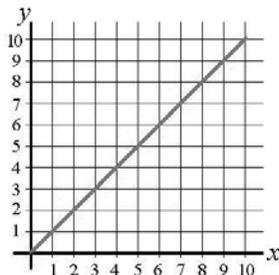
1. Explique desde un sustento teórico y geométrico, porque la pendiente en una línea recta es constante.
2. ¿Bajo qué circunstancias una línea recta no corta el eje X?
3. ¿Bajo qué circunstancias una línea recta no corta el eje Y?
4. Demuestre que la pendiente de una línea recta puede definirse en términos de la función tangente.
5. En términos matemáticos y geométricos, por qué no existe pendiente de una línea vertical.
6. Las ecuaciones de la línea recta que no muestran punto intercepto con el eje Y ¿es porque no tienen?
7. Enuncie y explique tres aplicaciones donde se evidencie las pendientes y las razones de cambio.
8. ¿Existen rectas paralelas que se corten?
9. ¿Existen rectas perpendiculares que no se corten?
10. ¿Qué condiciones deben tener dos curvas, para que se corten en más de un punto?

Ejercicios.

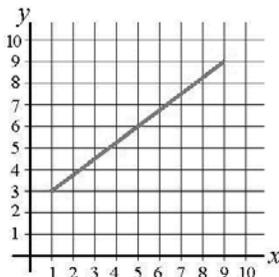
En esta sección usted va a encontrar una serie de problemas teóricos relacionados con el tema visto en la presente sección. Resuelva cada uno de la manera más precisa posible, indicando las propiedades, principios, teoremas y teorías aplicadas.

Para los problemas siguientes, estime el valor de la pendiente

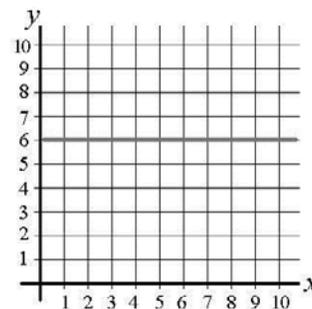
11.



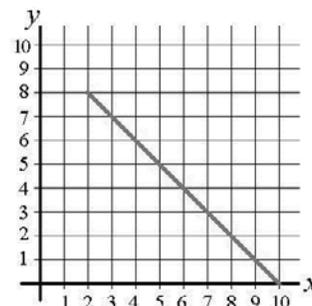
12.



13.

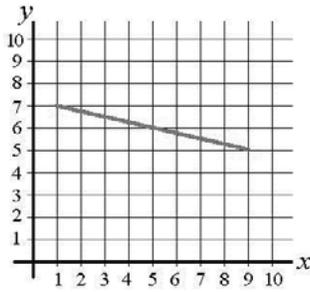


14.

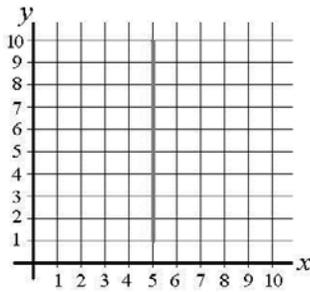


Sección 2.2: Función lineal

15.



16.



Para cada pareja de puntos, encuentre la función lineal que los representa

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| 17. $(0,1)$ y $(3,5)$ | 18. $(2,1)$ y $(-3,4)$ |
| 19. $(1,1)$ y $(-2,2)$ | 20. $(3,4)$ y $(1,2)$ |
| 21. $(-3,2)$ y $(5,-3)$ | 22. $(0,-1)$ y $(4,-4)$ |
| 23. $(10,3)$ y $(6,6)$ | 24. $(-8,-3)$ y $(7,2)$ |
| 25. $(-3,-1)$ y $(2,-5)$ | 26. $(6,-4)$ y $(-4,6)$ |
| 27. $(0,0)$ y $(2,6)$ | 28. $(-5,0)$ y $(-3,1)$ |

Grafique las siguientes funciones usando tabla de valores y saque sus propias conclusiones sobre la pendiente y los puntos de intercepción con los ejes coordenados.

29. $y = 2x + 2$
 30. $y = -\frac{1}{2}x - 2$
 31. $y = \frac{1}{2}x + 2$
 32. $y = -3x - 2$
 33. $y = 2x + 3$
 34. $y = \frac{1}{3}x + 3$

Problemas de Aplicación

A continuación, usted va a encontrar una serie de situaciones problema en diversas áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), las cuales debe interpretar, modelar y resolver para dar cuenta de la solución. Ilustre y explique claramente los modelos propuestos,

35. $y = -\frac{5}{2}x + 2$
 36. $y = 12x - 3$
 37. $y = \frac{2}{3}x$

A continuación, se muestran parejas de funciones lineales, grafique cada par en un mismo plano, encuentre el punto de corte y corrobórelolo de forma analítica

38. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -3x + 2 \end{cases}$
 39. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$
 40. $\begin{cases} y = \frac{x}{3} + 3 \\ y = x - 2 \end{cases}$
 41. $\begin{cases} y = x \\ y = 5x - 12 \end{cases}$

42. $\begin{cases} y = 5 - x \\ y = 4 + x \end{cases}$
 43. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = -x - 6 \end{cases}$
 44. $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 4 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$

Dado un punto sobre el plano, determine las ecuaciones que pasan por el punto de tal forma que una sea paralela y la otra perpendicular a la ecuación dada.

45. $2x + 3y = 4$ $(0,0)$
 46. $-x + 3y = 2$ $(5,2)$
 47. $6x - 3y = 0$ $(2,-2)$
 48. $3x - 5y = -1$ $(0,-4)$
 49. $-x + y = -6$ $(-2,-1)$
 50. $5x - 2y = -1$ $(-5,1)$

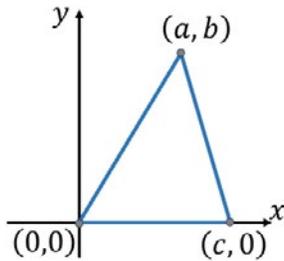
Sección 2.2: Función lineal

identificando las variables utilizadas, explicando también la estrategia de solución y la calidad de la solución encontrada

51. **Diseño de una banda transportadora.** Un ingeniero industrial quiere diseñar una banda transportadora que ascienda 1 metro por cada 6 m de avance horizontal.

- Determinar el valor numérico de la pendiente de la banda transportadora.
- Supóngase que la banda transportadora se necesita instalar en medio de dos niveles de una manufacturera, determine la longitud de la banda si el desnivel es de 6 metros.

52. **Algo de geometría.** La figura muestra un triángulo escaleno en el cual uno de los vértices está en el origen cartesiano y uno de sus lados es paralelo y está sobre el eje horizontal.



- Encuentre la ecuación de la línea recta que representa cada lado.
- Encuentre el intercepto (punto) de las medianas.
- Encuentre el intercepto (punto) de las alturas.

53. **Niveles de temperatura.** Las escalas de temperatura son sistemas de medición para cuantificar la intensidad del calor en un objeto y las tres escalas más conocidas son Celsius ($^{\circ}\text{C}$), Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) y Kelvin (K); por su parte Celsius y Fahrenheit miden la temperatura relativa a los puntos de congelación del agua que es 0°C o 32°F y el punto de ebullición 100°C o 212°F , ambos a una atmósfera de presión

- Encontrar una expresión a partir de la información dada, que relacione la escala Celsius ($^{\circ}\text{C}$) y la escala Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$)
- Convertir 77°F en grados Celsius.
- Convertir 50°C en grados Fahrenheit

54. **Niveles de temperatura.** La escala de temperatura Kelvin es una escala absoluta utilizada en ciencia y especialmente en la física y en la química; se basa en el concepto de cero absoluto, donde las moléculas de una sustancia no tienen movimiento térmico.

- Encontrar una expresión analítica que relacione la temperatura en grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$) con la temperatura en grados Kelvin (K), sabiendo que el agua se congela a 0°C o 273K y se evapora a 100°C o 373K :
- Convertir 300K en grados Celsius con la expresión anterior.
- Convertir 50°C en grados Kelvin a partir del resultado de la pregunta (a).

55. **Dilatación térmica.** Cierta forma de metal en forma de alambre se somete uniformemente al calor y sufre una dilatación lineal aumentando su longitud según la expresión matemática

$$L = L_0(1 + \alpha\Delta T)$$

Donde L_0 es la longitud inicial, α es una constante de dilatación y ΔT es el gradiente o cambio de temperatura. Si la variable dependiente es la longitud (L) y la independiente es la temperatura (T), determine la relación analítica para la pendiente de esta función lineal.

56. **Prevención.** Los viáticos son una asignación de dinero que una empresa, organización o institución proporciona a sus empleados o representantes para cubrir gastos de alimentación, transporte y alojamiento —entre

Sección 2.2: Función lineal

- otros— durante viajes de negocios o misiones de trabajo. Una empresa reembolsa a sus vendedores \$150.000 diarios por alojamiento y alimentación, a esto le suma \$5.000 por kilómetro recorrido. Obtener una función lineal que exprese el gasto diario G por cada vendedor en términos de los kilómetros recorridos.
57. **Oferta de ascenso.** Una empresa manufacturera le propone a uno de sus trabajadores un ascenso a través de dos ofertas; en la primera le pagan \$25000 por día más un incentivo de \$2500 por artículo producido, en la segunda propuesta, le ofrecen \$18000 por día más un incentivo de \$3200 por artículo producido.
- Encontrar expresiones lineales que relacionen los salarios por día en términos del número de artículos producidos, para cada oferta de la empresa.
 - Utilizar un graficador WEB para graficar cada una de estas expresiones y así encontrar el intercepto(punto) de estas.
 - Analizar el significado del punto de corte de las dos líneas y explicar el contexto en el cual es más favorable una de las ofertas con respecto a las otra.
58. **Devaluación lineal.** La depreciación es una disminución del valor de un activo, como maquinaria o equipo, debido al desgaste, obsolescencia o uso a lo largo del tiempo y por lo general se modela como una línea recta. Una empresa compra un equipo por USD 6.000 y transcurridos 10 años el equipo estará depreciado completamente.
- Escribir una ecuación lineal que relacione el costo del equipo C , con el número de años x , donde $0 \leq x \leq 10$.
 - Dibujar una gráfica de la función encontrada en el punto anterior.
- Estime el valor depreciado y el valor del equipo transcurrido dos años. Corrobore los datos analíticos con lo obtenido en la gráfica.
 - Estime el valor del equipo transcurrido 11 años, interprete su respuesta.
 - Estime en qué momento el equipo vale USD 4.500.
 - Estime en qué momento el equipo vale USD 3.500.
59. **Alquiler de automóviles.** Una agencia de vehículos tiene en patios 50 carros idénticos para alquilar. Cuando el valor del alquiler mensual de \$1,2 millones, todos los 50 vehículos están ocupados; sin embargo, cuando el precio del alquiler sube a \$1,5 millones, el número de vehículos alquilados desciende a 40 carros. Supóngase una relación lineal entre el número de unidades alquiladas (N) y el precio del alquiler (x).
- Escribir una ecuación lineal y obtener su entre precio y vehículos alquilados.
 - ¿Cuántos vehículos se pueden alquilar si el precio es de 1 millón de pesos?
 - ¿Cuántos vehículos se pueden alquilar si el precio es de 1,32 millones de pesos?
 - ¿Cuántos vehículos se pueden alquilar si el precio es de 3 millones de pesos?
 - ¿Si la empresa vende 12 vehículos, ¿Cuál es el costo del alquiler de los restantes para emplearlos a todos?
60. **Demostración.** Demuestre que la mínima distancia entre un punto (x_1, y_2) y la recta expresada de la forma $Ax + By + C = 0$ está dada por la expresión matemática:
- $$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
61. **Oferta.** Un almacén de cadena tiene una mega-promoción, en la cual reduce el precio de sus artículos un 10%, posteriormente el gerente decide para la semana siguiente, aplicar otra promoción sin eliminar la anterior

Sección 2.2: Función lineal

- promoción y que consiste en reducir el precio todos sus artículos en 5 dólares adicionales.
- Encuentre una expresión lineal que relacione el precio original de un artículo con su precio final para la primera semana
 - Encuentre una expresión lineal que relacione el precio original de un artículo con su precio final para la segunda semana.
 - Una persona compra cierto artículo por 35 dólares, determine su valor de venta para la primera semana de promoción.
 - Una persona compra cierto artículo por 40 dólares, determine su valor de venta para la segunda semana de promoción.
 - Supóngase que se compra un artículo en la primera semana de promoción, si el valor pagado es de 30 dólares, cuál es el valor original del mismo.
 - Supóngase ahora que el precio final de un artículo que se compró la segunda semana es de 31 dólares, encontrar el valor original de este artículo.
- Impuesto predial.** En 2024 el impuesto predial se ha incrementado de forma constante en un 6% cada año. Si en el 2018 una familia paga por predial un valor de \$2,000,000, determinar la cantidad que debe pagar en el 2022.
 - Cámaras fotográficas.** En una venta de Black Friday, un almacén de cadena reduce los precios de todas sus cámaras digitales en $\frac{1}{4}$, y después ofrece reducir \$500.000 al valor resultante. Si una persona adquiere una cámara digital por \$4.000.000 durante esta oferta, encuentre el precio original de la cámara.
 - Pinturas de arte:** Fernando estima que el precio de venta de cada una de las fotos que toma, es de US\$ 100 y para aumentar sus ventas se asocia con una galería de artes, la cual le cobra a Fernando US\$ 2.000 al mes por tener las fotos en exposición, más una comisión del 10% sobre las fotos que venda. Dado este contexto, ¿Cuántas fotos debe vender Fernando al mes para quedar para obtener alguna ganancia?
 - Propiedad.** Una finca agrícola se destina para el cultivo de café, plátano y mora. El área de la región destinada al cultivo de café es dos veces más grande que el área de la región destinada al cultivo de la mora, y el área de la región destinada al cultivo de plátano es 4 hectáreas menor que tres veces el área de la región destinada al cultivo de mora. Si el total de la superficie de la finca es de 512 hectáreas cultivables, encuentre el área de cada uno de los cultivos.
 - Parcela.** Un jardín tiene forma de rectángulo, con dimensiones de 20 metros de largo por 10 metros de ancho, y está segmentado en cuatro partes; se sabe que dos de las particiones, poseen la misma superficie, la siguiente partición tiene una superficie dos veces más grande que cualquier de las dos particiones iguales mencionadas anteriormente y por último, la cuarta partición tiene un área de 20 m² superior que cualquiera de las dos particiones que tiene la misma área y que fueron enunciadas al inicio del problema. Dadas estas condiciones, determine de forma precisa la superficie que tiene cada una de las particiones del jardín.
 - Llantas usadas.** El departamento de estadística de Estados Unidos, estima que anualmente se desechan aproximadamente 455 millones de llantas, las que, por políticas gubernamentales de los diferentes países, deben exclusivamente ya sea almacenarse (se apilan), reciclarse, incinerarse o exportarse. En el año 2022 el número de llantas incineradas fue de $\frac{1}{10}$ del total, por su parte los neumáticos que fueron exportados fue de $\frac{2}{7}$ también del

Sección 2.2: Función lineal

total y finalmente las llantas que tuvieron que almacenarse fue a su vez $\frac{2}{13}$. Dadas estas condiciones, determine de forma numérica la cantidad de neumáticos que se ubican en cada una de las anteriores categorías.

68. **Lámparas LED.** El valor de compra de una lámpara fluorescente convencional para utilizarla durante un periodo mayor a 10.000 horas es de \$9.000 y el valor de la factura de la electricidad consumida para esta lámpara durante este periodo es de \$150.000, por su parte, se conoce que el valor económico de la adquisición de una lámpara electrónica ahorradora (LED) con una duración equivale a las 10.000 horas es de \$25.000. Utilizando una lámpara LED en vez de una tradicional por 10.000 horas, lo que se ahorra en el valor de compra y el valor de la electricidad es de \$250.000. ¿Cuál es el valor de la energía utilizando la lámpara ahorradora durante este periodo?
69. **Bonos de Dotación:** En muchos países incluyendo Colombia existe para algunos trabajadores, un auxilio o bono de dotación, consistente al suministro económico, de elementos o prendas de vestir que un empleador proporciona a sus empleados para desempeñar sus labores de manera adecuada y segura. Estos elementos de dotación pueden incluir uniformes, calzado especializado, equipos de protección personal, y otros elementos necesarios para el desarrollo de la actividad laboral. Ana es una trabajadora que recibe subsidio de ropa y adicionalmente sobre este le otorgan una reducción sobre el IVA de forma tal que cuando gasta este dinero en vestuario, se le reduce en un 7%, sin embargo, en otras compras con el bono, debe pagar completamente el impuesto. Ana fue de compras a un almacén, donde utilizó su bono para adquirir vestuario, pero también adquiere otras cosas por las que le cobraron el

IVA completo. Si Ana gastó un total de \$650.000 antes de impuestos y pagó un impuesto total sobre las ventas de \$35.000, determine la cantidad de dinero gastado en sus compras.

70. **Problema de la Tienda:** Una pequeña tienda vende un producto en particular, para analizar la relación entre el precio de venta y la cantidad de unidades vendidas, el gerente realiza un estudio durante varios meses, recopilado los siguientes datos:

Cantidad Vendida (unidades)	Precio de Venta (en euros)
0	500
5	450
10	400
15	350
20	300

- a. Sobre un plano cartesiano, ubique los puntos y trace una gráfica que mejor una los puntos.
- b. Explique cómo es la correspondencia entre las dos variables de la tabla.
- b. Obtenga un modelo matemático que relacione la cantidad de productos vendidos con el precio de venta de los mismo.
- c. Si el precio de venta es de 200 €, cuántos productos se pueden vender.
- d. Si la tienda pretende vender 25 artículos, cuál debe ser el precio de venta de los mismos.
71. **Santuario de Vida Animal:** En un santuario de conservación de vida silvestre, se ha llevado a cabo un estudio durante varios años para monitorear la población de cierta especie de animal en peligro de extinción. Se han recopilado los siguientes datos sobre la cantidad de animales en el santuario en diferentes años:

Año	Cantidad de Animales

Sección 2.2: Función lineal

2010	50
2012	70
2014	90
2016	110
2018	130

- a. Obtener en un plano cartesiano, la representación de los puntos, donde el eje horizontal corresponda al año y en el eje vertical la cantidad de individuos.
 - b. Explicar el tipo de relación entre estas dos variables.
 - c. Obtener un modelo matemático a partir del análisis anterior, que relacione el año del análisis y la cantidad de individuos.
 - d. Cuántos individuos hubo en el 2022.
 - f. Cuántos individuos habrá en el 2025
 - g. En qué año, la cantidad de individuos llegará a los 300 especímenes.
72. Una empresa del sector tecnológico, fabrica celulares y logra estimar que su función de

costo de producción viene dada por la función lineal:

$$C(n) = 4500 + 0,5n$$

Donde C es el costo expresado en millones de pesos y n es el número de celulares fabricados y vendidos; por otro lado, el precio de venta de cada celular es de \$4.000.000 de pesos.

- a. Obtenga la función de ingresos de la empresa tecnológica por la venta de celulares.
- b.Cuál es el dominio de la función, para el cual la empresa no tiene ganancia.
- c. El punto de equilibrio en economía es el nivel de producción o ventas en el cual los ingresos totales son iguales a los costos totales, para el problema dado, encontrar el punto de equilibrio.
- d.Cuál es el intervalo de ventas para el cual la empresa tendrá ganancia.
- e. Obtenga una expresión matemática para la función ganancia.

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

SECCIÓN 2.3 FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

En la sección anterior se hace una pequeña introducción al concepto de las funciones matemáticas con énfasis en las funciones lineales; en esta sección y en las próximas se hace una revisión de algunos tipos de funciones de uso frecuente en las matemáticas, las ciencias y las ingenierías.

Las funciones polinomiales de las que trata el cálculo elemental son de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde las constantes a son números reales y la constante n es un número natural, el exponente más grande al cual llegue la función determina su grado y comportamiento:

Función constante	$f(x) = a_0$	Con $a_0 \neq 0$
Función lineal	$f(x) = a_1 x + a_0$	Con $a_1 \neq 0$
Función cuadrática	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	Con $a_2 \neq 0$
Función cúbica	$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	Con $a_3 \neq 0$
Función 4° grado	$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	Con $a_4 \neq 0$

En esta sección se analizan las funciones polinomiales haciendo énfasis en las funciones cuadráticas o de segundo grado.

Función Cuadrática.

Otra de las funciones ampliamente utilizadas en diversas disciplinas del conocimiento es la función cuadrática; esta función tiene como particularidad que el exponente de mayor grado es 2.

Definición 2.6. Función cuadrática: las funciones polinomiales de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad [\text{Ec. 2.7}]$$

Representan en forma general, la función cuadrática, donde a, b y c son constantes reales y $a \neq 0$.

La representación gráfica de la función cuadrática se obtiene haciendo la transformación $y = f(x)$ obteniendo así una parábola ahora, dependiendo de la naturaleza de la constante a , la parábola puede abrir hacia arriba o hacia abajo, cuando $a > 0$ la parábola abre hacia arriba –ver figura 2.16.a–, cuando $a < 0$ la parábola abre hacia abajo; por otro lado, la magnitud de $|a|$ determina la abertura de la parábola, entre más grande sea el valor, más cerrada es la parábola; la figura 2.16.b., ilustra tres funciones parabólicas con diferente valor de a , nótese la abertura de las curvas.

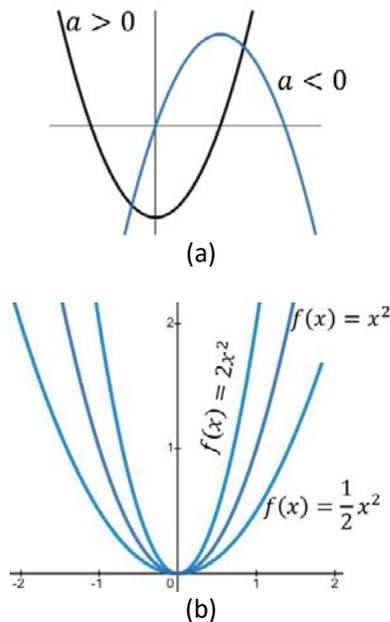


Figura 2.16. Naturaleza de las gráficas de las funciones cuadráticas. (a). Sentido de la apertura de las parábolas. (b). Magnitud de la apertura de las parábolas.

El valor $-a-$ en funciones cuadráticas es un parámetro importante y determina la naturaleza de esta. Valores positivos hacen que la gráfica de la función sea cóncava hacia arriba, valores negativos hacen que la función sea cóncava hacia abajo. Valores grandes de $-a-$ hacen la curva más cerrada (menor radio de curvatura), valores cercanos a cero hacen la curva más abierta (radios de curvatura grandes)

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

Solución de una ecuación de segundo grado.

Para que una función se convierta en ecuación, es necesario que la variable dependiente, tome algún número real, el cual por lo general es cero; una vez hecho esto, se precisa encontrar el valor de la variable independiente tal que se cumpla la igualdad.

$$f(x) = y = 0$$

Y, en consecuencia

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para resolver esta última expresión, existen muchas alternativas, sin embargo, una de las más simples e igualmente utilizadas es la **fórmula general**.

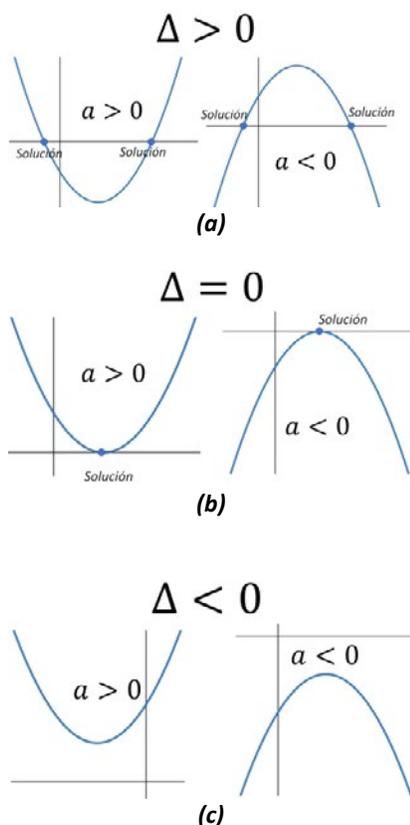


Figura 2.17. Naturaleza gráfica de las posibles soluciones de una ecuación de segundo grado

Teorema 2.4. Soluciones de una ecuación de segundo: toda ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones dadas por:

$$x_I = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad [\text{Ec. 2.8}]$$

$$x_{II} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$

La expresión dentro del radical recibe el nombre de discriminante, simbolizado por la letra griega Δ y determina la naturaleza la solución

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

En consecuencia, existen tres posibles resultados para la solución de una ecuación de segundo grado:

1. **Discriminante mayor a cero ($\Delta > 0$):** en este caso, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales diferentes.
2. **Discriminante igual a cero ($\Delta = 0$):** en este caso, la ecuación cuadrática tiene una solución real.
3. **Discriminante menor a cero ($\Delta < 0$):** en este caso, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones complejas¹.

En términos gráficos, solucionar una ecuación implica encontrar los puntos de corte con el eje de las abscisas; dada la naturaleza de estos discriminantes, pueden ocurrir tres casos

¹ Es común afirmar que cuando el discriminante de una ecuación de segundo grado es menor a cero, no tiene solución real, y aunque esto es cierto es más preciso afirmar que las soluciones son complejas, es decir la solución tiene parte real y parte imaginaria.

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

Ejemplo 2.13. Dadas las siguientes funciones, transformar en ecuaciones y resolverlas.

$$(a). \quad f(x) = x^2 + 3x - 4$$

$$(b). \quad f(x) = 5x^2 + 2x + 2$$

Solución: para convertir una función en ecuación, es necesario primero igualarla a una constante, por lo general cero, en consecuencia:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Aplicando la fórmula general con $a = 1, b = 3, c = -4$ se tiene:

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 - 5}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

Para la segunda expresión se tiene que $a = 5, b = 2, c = 2$ y aplicando la fórmula general

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{(2)^2 - 4(5)(2)}}{2(5)} = \frac{-2 - \sqrt{-36}}{10} = \frac{-2 - 6i}{10} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{(2)^2 - 4(5)(2)}}{2(5)} = \frac{-2 + \sqrt{-36}}{10} = \frac{-2 + 6i}{10} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Nótese en el primer problema que el discriminante es mayor que cero y en consecuencia se tienen dos soluciones reales diferentes, lo que corresponde a la intersección de la función, con el eje x , en dos puntos. Para la segunda función, se tienen dos soluciones complejas, lo que implica que la ecuación no corta al eje x . En la figura 2.18., se pueden ver las representaciones gráficas de estas ecuaciones.

Puntos extremos de una función cuadrática.

Los puntos extremos, también conocidos como los puntos de mínima o máxima para funciones reales, son valores definidos en un intervalo cerrado, tal que la función en ese punto tenga una imagen de mayor valor que en cualquier otro punto o también puede suceder que tenga la imagen más pequeña que cualquier otra en otro punto diferente.

En disciplinas como la ingeniería, las ciencias económicas y administrativas, es especialmente útil encontrar los puntos extremos; supóngase, por ejemplo, que por algún medio una empresa obtiene la expresión que relaciona las utilidades semanales dadas las unidades que se fabriquen de cierto producto, resulta muy deseable encontrar la cantidad precisa de unidades de tal forma que se maximicen las ganancias, en este caso el problema consiste en encontrar un punto de máxima. Supóngase ahora en

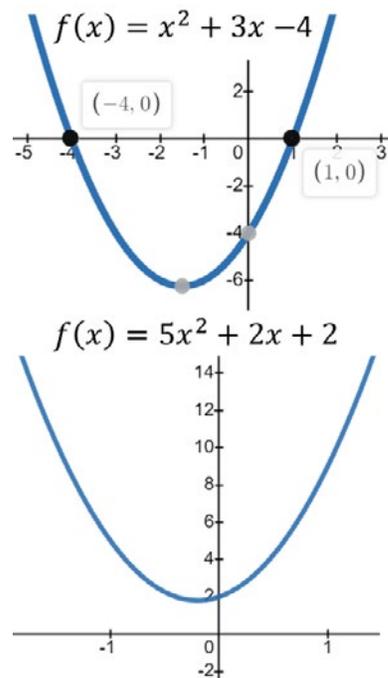


Figura 2.18. Representaciones gráficas de las funciones del problema 2.10.

Nótese que la primera gráfica corta al eje de las x en los puntos $(0, -4)$ y $(0, 1)$, lo que corresponde a las dos soluciones encontradas. Por otro lado, la segunda ecuación tiene dos soluciones complejas, lo que se establece que la gráfica NO corta al eje de las x en ningún punto.

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

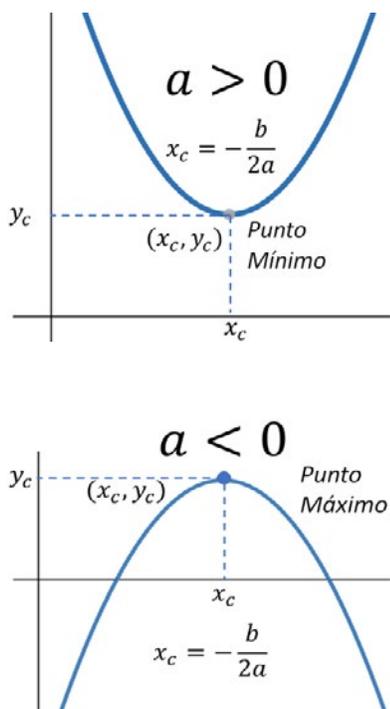


Figura 2.19. Puntos extremos de funciones cuadráticas.

Las funciones cuadráticas o polinómicas de segundo grado poseen puntos extremos relativos que pueden ser de máxima o mínima. Empleando la expresión mostrada en la ecuación 2.9., es posible encontrar estos puntos.

otro escenario que se tiene que diseñar un circuito integrado de baja potencia y que se cuenta con la función de transferencia de potencia en términos de la resistencia eléctrica, en este caso, se precisa hallar un punto de mínima o baja operación. En la sección de diferenciación y derivación, se evalúan algunas estrategias para encontrar de forma analítica estos puntos.

Definición 2.7. Extremos relativos: Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ que contiene el punto x_0 .

1. La función tiene un mínimo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$ si para cualquier otro punto se cumple que:

$$f(x) \geq f(x_0)$$

2. La función tiene un máximo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$ si para cualquier otro punto se cumple que:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

En el caso de las funciones cuadráticas, fácilmente se puede ver que, si la parábola abre hacia arriba, existe un único punto de mínima, mientras que, si la función abre hacia abajo, la función tiene un punto de máxima. Este punto se puede hallar:

Teorema 2.5. Puntos extremos: dada la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ esta tiene un punto extremo absoluto en:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad [\text{Ec. 2.9}]$$

El cual:

1. Es un punto extremo de mínima si $a > 0$
2. Es un punto extremo de máxima si $a < 0$

Esta situación fácilmente se puede apreciar en la figura 2.18.

Ejercicio 2.14. Un granjero utiliza 180 metros de cerca para encerrar una región rectangular con una división paralela a uno de los lados, como muestra la figura, determinar:

- a. El ancho a de la región en función del largo l , de la región.
- b. El área total A de la región, en función de l .
- c. Las dimensiones que dan, a la región encerrada y dividida, la mayor área.

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

Solución: Los 180 metros de cerca corresponden al perímetro de la región y a la longitud del cable que divide los dos terrenos, en consecuencia, dados los parámetros del problema, se puede decir:

$$2l + 3a = 180 \text{ lo que corresponde } a = 60 - \frac{2l}{3}$$

b. Sabiendo que el área de una figura rectangular es lado por lado, se tiene entonces que:

$$A = l \cdot a = l \left(60 - \frac{2l}{3} \right) = -\frac{2}{3}l^2 + 60l$$

Donde $l \in [0,90]$... ¿por qué?

c. De la última expresión se tiene el área en términos de la longitud del terreno y que corresponde a una función polinómica de segundo grado cuyos coeficientes son $a = -\frac{2}{3}$, $b = 60$ y $c = 0$, así, como $a < 0$ y aplicando el teorema de los puntos extremos se tiene que:

$$l = -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{-2 \cdot \frac{2}{3}} = 45m \quad \text{y} \quad a = 60 - \frac{2 \cdot 45}{3} = 30m$$

La figura 2.20., muestra la gráfica correspondiente a la función que representa el área del terreno en términos de su longitud. Nótese que solo existe un único valor para el cual el área es máxima

Funciones polinomiales de orden superior.

Las funciones algebraicas se clasifican en funciones polinomiales y racionales, las primeras inician desde la función constante hasta las funciones n -ésimas de orden superior; en las secciones anteriores se analizaron la función constante, la función lineal y la función cuadrática como primeras funciones polinomiales, a continuación, se establecen algunas propiedades y características para las funciones de tercer y cuarto orden.

Definición 2.8. Función polinomial. Expresiones algebraicas de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ con } a_n \neq 0$$

Son funciones polinomiales, donde los términos $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_3, a_2, a_1, a_0$ son los coeficientes de la expresión y el número entero positivo n , determina el grado del polinomio

Expresiones con un solo término reciben el nombre de monomios.

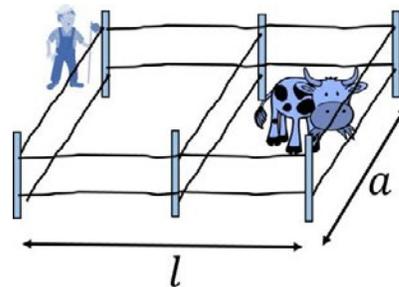


Figura 2.20. Situación de problema 2.11.

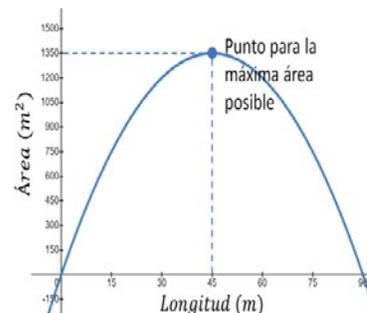


Figura 2.21. Comportamiento del área de un terreno, en función de su longitud. Problema 2.11.

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

Ejercicios 2.15. Grafique cada una de las siguientes funciones.

$$f(x) = x \quad f(x) = x^2 \quad f(x) = x^3$$

$$f(x) = x^4 \quad f(x) = x^5$$

Solución: La tabla de valores muestra algunos puntos característicos de estas funciones; se han escogido valores positivos para tabular, sin embargo, también es preciso encontrar valores negativos para obtener una buena representación gráfica.

Tabla 2.2. Valores característicos de las funciones del problema 2.12.

x	x	x ²	x ³	x ⁴	x ⁵
0,0	0,0	0,00	0,000	0,0000	0,00000
0,1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
0,2	0,2	0,04	0,008	0,0016	0,00032
0,5	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125
0,7	0,7	0,49	0,343	0,2401	0,16807
1,0	1,0	1,00	1,000	1,0000	1,00000
1,2	1,2	1,44	1,728	2,0736	2,48832
1,5	1,5	2,25	3,375	5,0625	7,59375
1,7	1,7	2,89	4,913	8,3521	14,19857
2,0	2,0	4,00	8,000	16,0000	32,00000

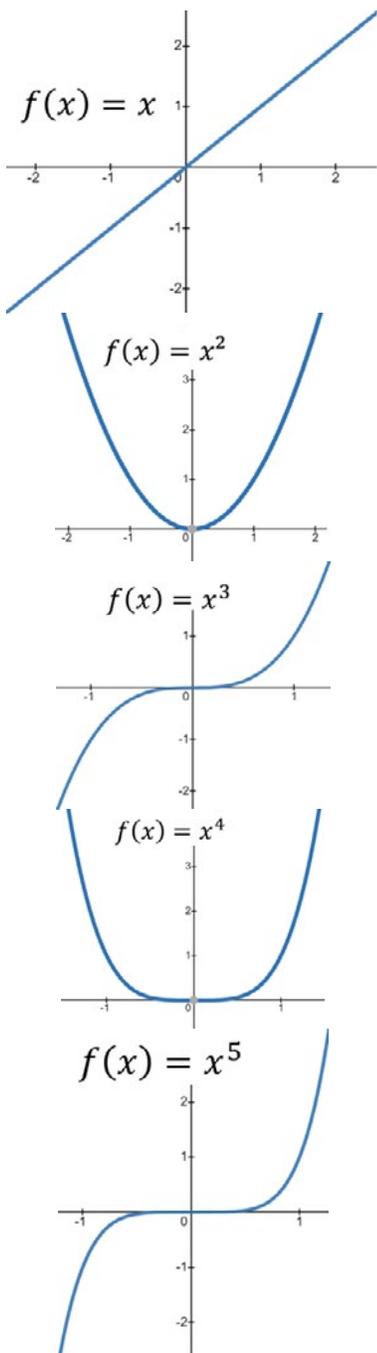


Figura 2.23. Representaciones gráficas de varias funciones monómicas.

Estas funciones reciben el nombre de funciones monomiales o de un solo término. Cuando el exponente es par, la función monomial es par e igual sucede para las funciones impares.

El grado del polinomio permite predecir aproximadamente el comportamiento de este y el coeficiente de la variable con este exponente a su vez permite aproximar el sentido las concavidades. La figura 2.22., muestra estos comportamientos.

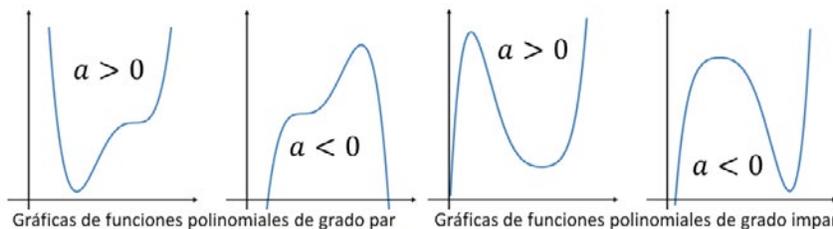


Figura 2.22. Características gráficas generales de las funciones polinomiales

Para las funciones polinomiales se tiene que su dominio son todos los números reales.

$$Df = \mathbb{R}$$

El rango de las funciones polinomiales de grado impar también son todos los reales, pero en las funciones de grado par, el rango si está restringido a ciertos valores.

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

Ceros polinomiales

En la sección anterior se analizan los puntos de corte de las ecuaciones cuadráticas con el eje de las abscisas y se llega a una expresión denominada fórmula general; en el caso de los polinomios de grado tres, cuatro, quinto grado o mayor no existen expresiones directas² con las cuales se puedan encontrar estas soluciones por lo cual es común acudir a estrategias como la división sintética o a métodos numéricos.

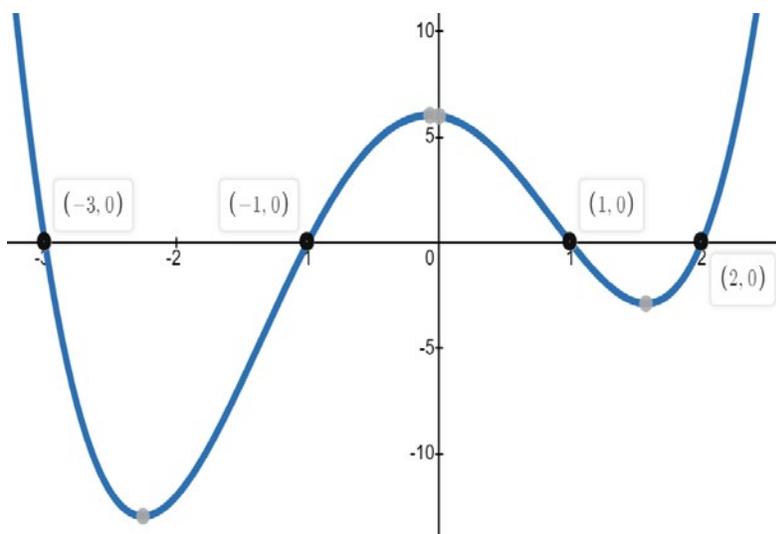


Figura 2.24. Gráfica de una función polinomial de cuarto grado

Cuando se menciona los ceros polinomiales –también conocidos como raíces, polos o soluciones–, se está indagando por los valores de la variable independiente tal que reemplazados en el polinomio lo convierta en cero. La figura 2.22., muestra la representación gráfica de una función polinomial de cuarto grado

$$f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$$

Nótese que la gráfica corta al eje x en cuatro puntos, $x = -3$; $x = -1$; $x = 1$ y $x = 2$; estos son los ceros polinomiales, ya que reemplazados en la función original hace que esta sea igual a cero; a estos valores también se les denomina raíces y constituyen lo que se denomina factores lineales.

$$f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x + 3)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

Otra particularidad que muestra la gráfica es que la función tiene tres puntos extremos, uno es un mínimo absoluto, otro es un mínimo relativo y el otro es un máximo relativo; estos temas se tratan con mayor profundidad en la sección de la derivada.

PAUTAS PARA GRAFICAR UN POLINOMIO

1. Factorizar el polinomio para hallar las raíces reales, estas corresponden a las intersecciones con el eje x de la gráfica.
2. Elaborar una tabla de valores del polinomio donde se evalúe la variable x en función de y , tanto a la izquierda como a la derecha de los ceros determinados en el paso N° 1. Agregue a la tabla el intercepto con el eje y .
3. Graficar los interceptos y los puntos ilustrados en el paso N° 2.
4. Establecer la tendencia final del polinomio.
5. Trazar suavemente una curva que cruce por cada uno de los puntos señalados en el paso N° 3, la cual represente la trayectoria final de la gráfica



Dada la siguiente función de cuarto grado, obtener los ceros o raíces polinomiales.

$$f(x) = x^4 - 25x^2 + 144$$



² La metodología de Cardano y Tartaglia son alternativas para encontrar las soluciones a ecuaciones polinómicas de tercer y cuarto grado respectivamente.

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

Funciones racionales.

En aritmética, los números racionales son aquellos que se pueden escribir como el cociente de dos números reales; de la misma manera, una función racional es aquella que se puede escribir como el cociente de dos funciones polinómicas.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{con } q(x) \neq 0$$

Son ejemplos de funciones racionales

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 3}{x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 6x - 4} \quad f(x) = \frac{3x + 2}{x^3 + 10x^2 - 6x - 8}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x^5 - 2x^3 + x - 1} \quad f(x) = \frac{2x + 5}{x^4 - 12x^2 - 3x + 10}$$

Las funciones polinomiales y racionales son ejemplos de funciones algebraicas. Una función algebraica de x , es cualquier función que puede ser expresada con un número finito de operaciones como sumas, restas, multiplicaciones, cocientes y radicales que involucren x^n , son ejemplos de funciones algebraicas las ya vistas, pero también pueden ser:

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 3} \quad f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

Ejemplo 2.16. Graficar la función:

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3x - 4}$$

Solución: al factorizar la expresión del denominador, se tiene que

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

y así la función no está definida ni para $x = 4$ ni para $x = -1$, puesto que ocurriría división por cero, el dominio de $f(x)$ es el conjunto de los números reales salvo $x = 4$ y $x = -1$. El único intercepto de la gráfica con el eje X está en $(-3, 0)$ que corresponde al cero del denominador.

Para encontrar el intercepto con el eje Y basta tomar a X como cero con lo cual se llega al punto $(0, -\frac{3}{4})$.

Los signos de $f(x)$ se analizan de acuerdo con las siguientes posibilidades:

- ✓ Si x en valor absoluto toma valores muy grandes, entonces $S(x)$ se aproxima a 0.

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

- ✓ Si se toman valores de x aproximándonos a -1 por la izquierda, la función crece sin parar.
- ✓ Si se toman valores de x aproximándonos a -1 por la derecha, la función $f(x)$ decrece sin parar.
- ✓ Si se toman valores de x aproximándonos a 4 por la izquierda, los valores correspondientes a la función $f(x)$ decrecen sin parar.
- ✓ Si se toman valores de x aproximándonos a 4 por la derecha, los valores correspondientes a la función $f(x)$ crecen sin parar.
- ✓ Las rectas verticales $x=-1$ y $x=4$ son asíntotas verticales de $S(x)$.

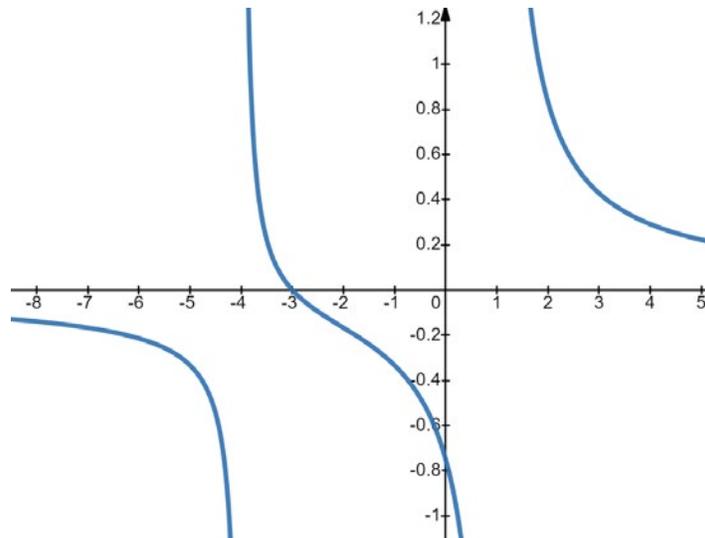


Figura 2.25. Gráfica del problema 2.13.

No todas las funciones racionales tienen asíntotas verticales, tómese como ejemplo la función racional

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

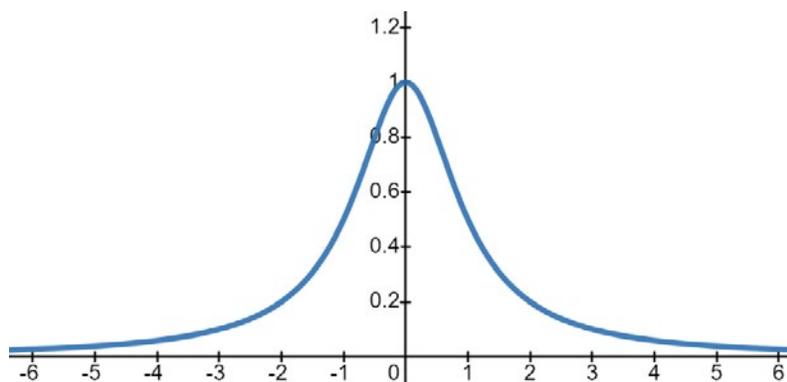


Figura 2.26. Gráfica de una función que no posee asíntotas verticales.

Claramente se puede apreciar que el dominio de la función son todos los números reales, mientras que el rango está en el intervalo $(0,1)$. Queda como ejercicio para el lector corroborar este hecho.

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

Ejercicios Sección 2.3. Funciones polinomiales y racionales

Responda a las siguientes preguntas y cuestiones.

- ¿Qué semejanzas y diferencias encuentra entre las funciones y las relaciones?
- Identifique los elementos presentes en cualquier expresión matemática del tipo polinomial.
- Cuál sería el grado de la expresión matemática $x^2y^3z^4$, justificando su escogencia.
- La función lineal puede considerarse de naturaleza polinomial?
- Cuando dos polinomios son sumados o restados, qué condiciones se deben tener en cuenta para su reducción.
- Explique la estrategia convencional para clasificar las funciones polinomiales y proponga una alternativa para una nueva clasificación de estas funciones.
- Qué son los polinomios completos o en su defecto, los polinomios incompletos. Establezca algunos ejemplos de cada una de estas categorías.
- Cuándo una función polinomial tiene la característica de ser función par. Establezca algunos ejemplos.
- Cuándo una función polinomial tiene la característica de ser función impar. Establezca algunos ejemplos.
- Describa las características de las funciones cuadráticas y como se asocian estas con las parábolas.

Para los siguientes ejercicios, encuentre el grado del polinomio.

- $p(x) = x^2 + 3x + 5$
- $p(x) = 6x^5 - 4x^3 + 8x + 1$
- $p(y) = 6y^4 + 5y^3 - 2y^2 + y + 1$
- $p(z) = \frac{1}{2}z^4 + 3z^3 - \frac{3}{2}z^2 + 5z$
- $p(x, y) = 6x^2y^3 - y^2 - 6yx - 4x^4y$
- $p(x, y, z) = x^2y^3z + z^4yx^5$
- $p(x) = 3x^6 - 5x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 7$
- $p(x) = \pi x^3 + ex^2 - \sqrt{2}x + 1$
- $p(x, y) = x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 3y^2$
- $p(m) = mn + m^2n^2 + 1$

Dadas las siguientes funciones cuadráticas, determine su concavidad.

- $f(x) = 2x^2 + 1$
- $f(x) = 5x^2 + 3x + 1$
- $f(x) = 6x - 2x^2$

- $f(x) = \frac{1}{2}x - 3 - \frac{5}{2}x^2$
- $f(m) = m^2 + 3m - 1$
- $g(n) = \sqrt{2}n^2 - 5n + \frac{\pi}{2}$
- $P(x) = \frac{5 - x^2}{\sqrt{3}}$
- $f(x) = 16 - \sqrt[3]{-8x^2}$
- $f(x) = -[x^2 + 2x - 1]$
- $p(x) = (5 - x)^2$
- $p(x) = -(5 + x)^2$

Convierta las siguientes funciones en ecuaciones y emplee el método de factorización para hallar los ceros.

- $f(x) = x^2 + 4x + 3$
- $f(x) = x^2 + 2x - 3$
- $f(x) = x^2 - 4x + 3$
- $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$
- $f(x) = 6x^2 + 3x - 3$
- $f(x) = 2x^2 - 5x - 12$
- $f(x) = 2x^2 - 9x + 10$

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

39. $f(x) = 12x^2 - 31x + 20$

40. $f(x) = 6x^2 - 11x - 10$

41. $f(x) = 18x^2 + 21x + 5$

42. $f(x) = 3x + 2x^2$

43. $f(x) = 4x^2 - 1$

44. $f(x) = 2x^2 - 3$

45. $f(x) = 5x - 2x^2$

46. $f(x) = 6x - 2x^2$

47. $f(x) = 12x - 3x^2$

Resuelva las siguientes ecuaciones empleando el método de fórmula general para hallar los ceros.

48. $x^2 + 2x + 3 = 0$

49. $x^2 - 2x + 3 = 0$

50. $x^2 - 2x - 6 = 0$

51. $x^2 - 2x - 3 = 0$

52. $2x^2 - 2x - 5 = 0$

53. $3x^2 - 4x - 5 = 0$

54. $2x^2 - 3x - 7 = 0$

55. $3x^2 - 6x + 2 = 0$

56. $\frac{1}{3}x^2 + 2x - 12 = 0$

57. $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 = 0$

58. $-\frac{2}{3}x^2 + 4x - 1 = 0$

59. $x^2 + 1 = 0$

60. $x^2 + x + 1 = 0$

61. $-x^2 + x - 3 = 0$

Dadas las siguientes funciones cuadráticas, encontrar sus puntos críticos de máxima o de mínima según corresponda.

62. $f(x) = 2x^2$

63. $f(x) = x^2 - 4x + 1$

64. $f(x) = 3 + 2x - x^2$

65. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$

66. $f(x) = x + 2x^2 - 3$

67. $f(m) = -3m^2 - 4m + 5$

68. $f(n) = 4 - 12n^2$

69. $f(x) = 1 - 5x^2$

70. $f(x) = 3x - 2x^2$

71. $f(x) = x^2 + 2x$

72. $f(p) = 2p^2 - 4p + 3$

73. $f(x) = 24 - 9x + 2x^2$

Dadas las siguientes funciones cuadráticas, determine su concavidad, su punto crítico y resuelva las ecuaciones correspondientes. Corrobore sus resultados con la gráfica o representación geométrica.

74. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

75. $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

76. $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$

77. $f(x) = 3x^2 - 8x + 4$

78. $f(x) = 4 - x + x^2$

79. $f(x) = 4 - x^2$

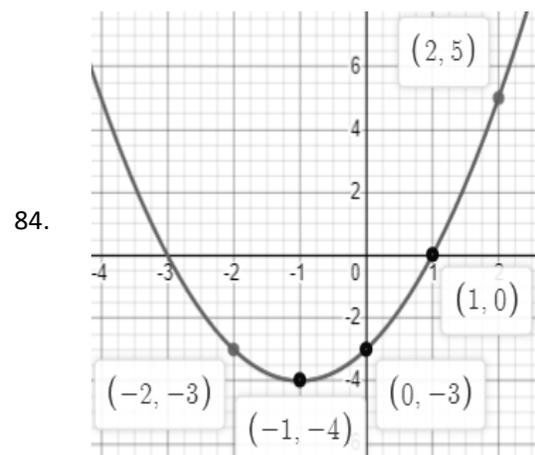
80. $f(x) = x^2 - 9$

81. $f(x) = x - x^2$

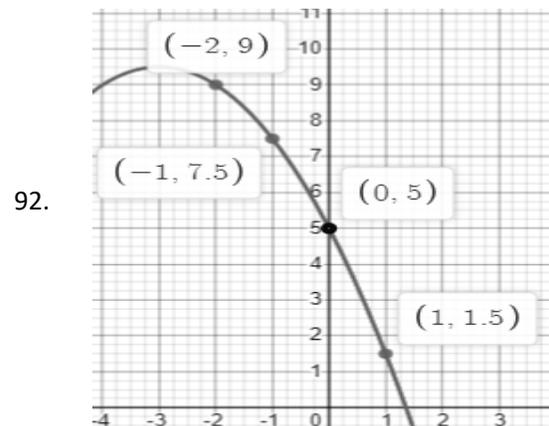
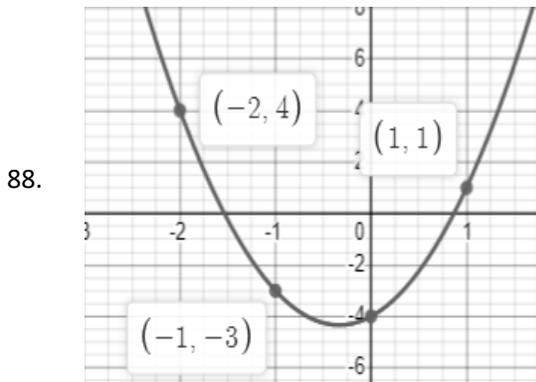
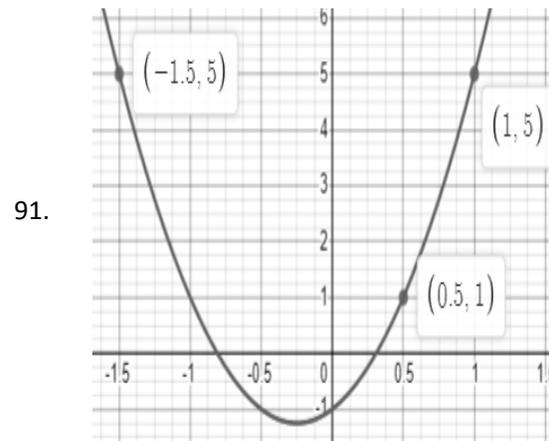
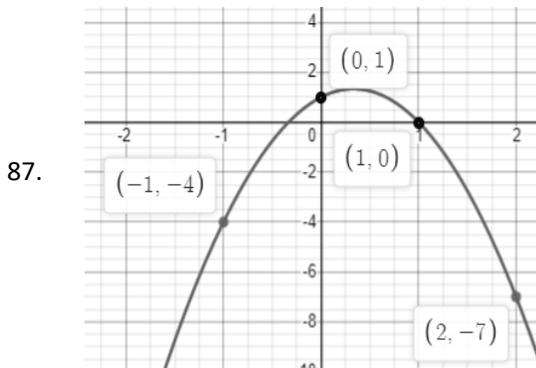
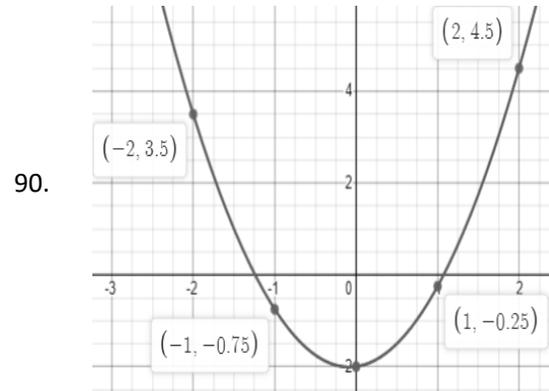
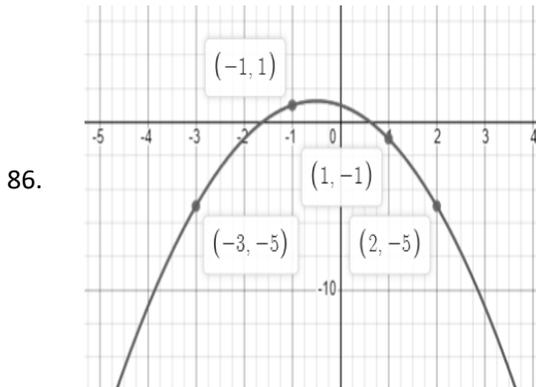
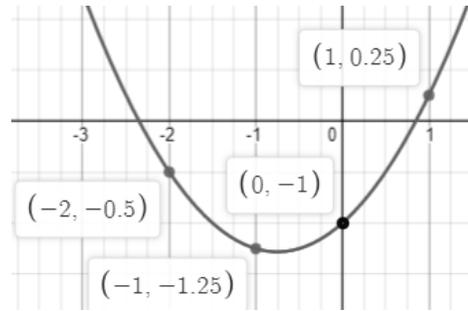
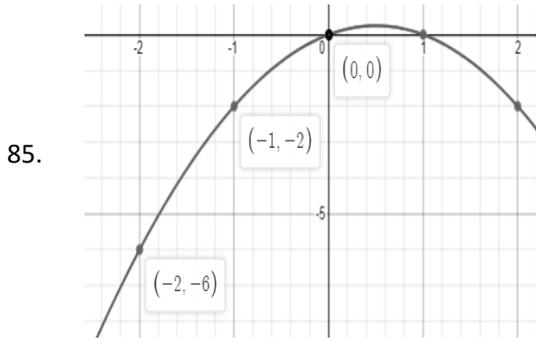
82. $f(x) = 3x^2$

83. $f(x) = -10 + 8x + 2x^2$

Las siguientes representaciones ilustran funciones cuadráticas. Dados los puntos por donde pasa la gráfica, encuentre analíticamente la función que la representa.



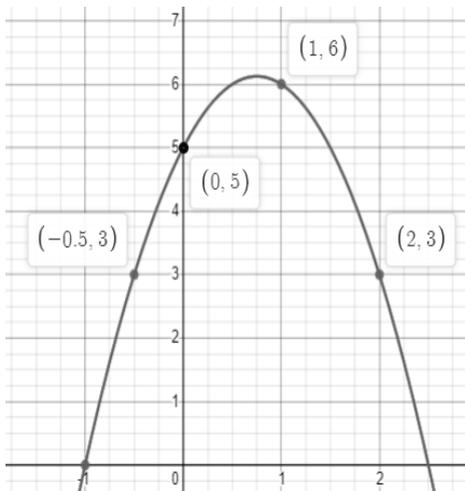
Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales



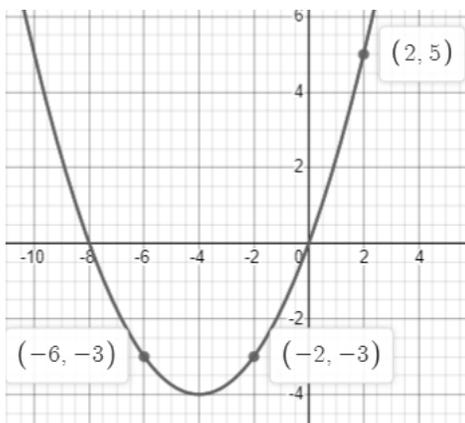
89.

93.

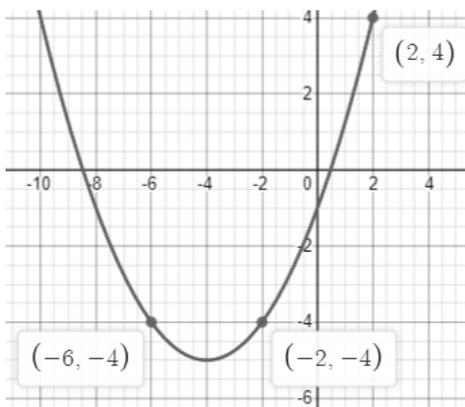
Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales



94.



95.



Los siguientes ejercicios muestran un sistema de ecuaciones 2×2 , encuentre de forma analítica los puntos de corte.

96.
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$
97.
$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$
98.
$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

99.
$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = 2x^2 - 3x \end{cases}$$
100.
$$\begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$
101.
$$\begin{cases} y = 5x - 1 \\ y = 2x^2 - x + 3 \end{cases}$$
102.
$$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = x^2 + 3x - 2 \end{cases}$$
103.
$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = x^2 + 3x - 2 \end{cases}$$
104.
$$\begin{cases} y = -2x^2 + x - 1 \\ y = 3x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$
105.
$$\begin{cases} y = -4x^2 + 3x + 6 \\ y = x^2 + x - 1 \end{cases}$$
106.
$$\begin{cases} y = 6x^2 + 4x - 11 \\ y = 2x^2 + x - 4 \end{cases}$$
107.
$$\begin{cases} y = 4x^2 + 4x - 9 \\ y = x^2 + x - 3 \end{cases}$$

En los siguientes ejercicios, obtener la solución para el conjunto de ecuaciones, realizar en un mismo plano sus representaciones geométricas e interpretar la respuesta

108.
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$$
109.
$$\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = x + 2 \end{cases}$$
110.
$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ y = -x^2 - x \end{cases}$$
111.
$$\begin{cases} y = x^2 + x + 2 \\ y = -x^2 - 3x - 1 \end{cases}$$
112.
$$\begin{cases} y = x^2 + x + 2 \\ y = -x \end{cases}$$

Describe el comportamiento de cada una de las funciones siguientes

113.
$$f(x) = x^3 + 5x$$
114.
$$f(x) = -x^3 + x$$
115.
$$f(x) = x^3 + x^5$$
116.
$$f(x) = -x^3 + 2x^5$$
117.
$$f(x) = x^4 + x^2$$

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

118. $f(x) = -x^4 + x^2$

119. $f(x) = x^6 + x^4$

120. $f(x) = x^4 - x^2$

Encuentre los ceros polinomiales de las siguientes funciones

121. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

122. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

123. $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

124. $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 3)$

125. $f(x) = x^3 - 4x$

126. $f(x) = x^3 - x^2 - 12x$

127. $f(x) = x^3 - x^2 - 12x$

128. $f(x) = 2x^4 - 8x^2$

129. $f(x) = (x^2 + x)(x^2 - 9)$

130. $f(x) = 5x^4 - 20x^2$

131. $f(x) = 1 - x^4$

En los ejercicios siguientes, encuentre la función polinomial de grado n que tiene los ceros polinomiales dados. (Hay múltiples respuestas válidas)

132. Grado 2; ceros (-1,1)

133. Grado 2; ceros (2,3)

134. Grado 2; ceros (-3,1)

135. Grado 3; ceros (-2,1,3)

136. Grado 3; ceros (-1,2,4)

137. Grado 3; ceros (-3,0,1)

138. Grado 4; ceros (-2,-1,0,3)

139. Grado 4; ceros (-3,-1,1,2)

140. Grado 4; ceros (-2,0,1,3)

Problemas de aplicación.

A continuación, usted va a encontrar una serie de situaciones problema en diversas áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), las cuales debe interpretar, modelar y resolver para dar cuenta de la solución. Ilustre y explique claramente los modelos propuestos, identificando las variables utilizadas, explicando también la estrategia de solución y la calidad de la solución encontrada.

141. **Función de demanda.** Una empresa dedicada a la comercialización de relojes inteligentes determina que su función de demanda para una determinada marca está dada por la expresión matemática:

$$p = d(x) = -0,05x^2 + 0,5x + 60$$

Donde x representa la cantidad de relojes vendidos mensualmente y expresado en cientos de unidades, y $p = d(x)$ representa el valor de cada reloj expresado en dólares. Para esta situación determine:

- El precio de cada reloj para el cual ya no habrá demanda.
- La cantidad mensual de relojes que se deben producir para maximizar su precio.

142. **Función de oferta.** la misma empresa del problema anterior logra determinar que su función de oferta para la comercialización de relojes inteligentes de baja gama está dada por la expresión matemática:

$$p = O(x) = 0,05x^2 + 30$$

Donde p corresponde con el precio por unidad de cada equipo y x representa la cantidad de artículos comercializados, expresado en cientos de unidades. para las condiciones planteadas en el problema determine cuál es el precio más bajo al cual esta empresa comercializadora introducirá los relojes al mercado.

143. **Punto de equilibrio:** En condiciones ideales de mercado y competencia, el precio de un

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

producto tenderá a estabilizarse en relación con el equilibrio entre la oferta de este y la demanda que se haga de él; si el precio es muy alto, en condiciones normales las ventas tienden a bajar porque el consumidor no lo comprará, si por el contrario el precio es muy bajo, el comerciante o el fabricante no lo producirá porque no tendrá margen de ganancia. El equilibrio de mercado es el resultado de encontrar el punto óptimo donde la cantidad producida es igual a la cantidad demandada, Siendo para este punto de artículos producidos y vendidos, la cantidad de equilibrio y el precio que se asocia a esto se denomina el precio de equilibrio. Para los dos problemas anteriores, con sus respectivas funciones de demanda y oferta, determine la cantidad y el precio de equilibrio para la comercialización de celulares de gama baja. Obtenga una gráfica del problema.

144. **Movimiento Parabólico:** Un arma dispara una bala con una rapidez de 10 m/s a un ángulo de 45° , cuyo movimiento se puede describir mediante la ecuación parabólica

$$h = x - 0,098x^2$$

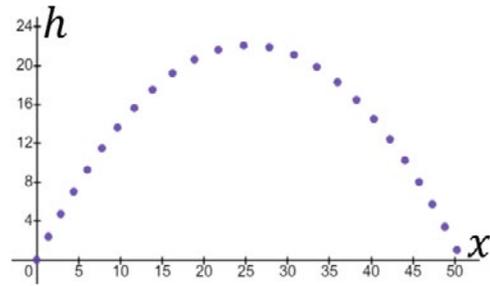
Donde x representa el espacio recorrido y h la altura a la cual sube la bala. Para la situación anterior determine:

- La altura cuando $x = 2m$
- La altura cuando $x = 6m$
- La altura cuando $x = 12m$
- La altura mayor a la cual sube la bala
- El alcance máximo de la bala
- Obtenga una representación geométrica de la función y ubique las respuestas anteriores

145. **Movimiento Parabólico:** Un cañón dispara una bala con una rapidez de 24 m/s a un ángulo de 60° , cuyo movimiento se puede describir mediante la ecuación parabólica

$$h = 1,73205x - 0,03402x^2$$

Donde x representa el espacio recorrido y h la altura a la cual sube la bala y cuya representación geométrica se muestra a continuación:



Para la situación anterior determine:

- La altura cuando $x = 12 \text{ m}$
 - La altura cuando $x = 36 \text{ m}$
 - La altura cuando $x = 50 \text{ m}$
 - La altura mayor a la cual sube la bala
 - El alcance máximo de la bala
146. **Procesadores de computadoras.** Una empresa se dedica a la comercialización de procesadores para computadores de alto rendimiento y estima que la rentabilidad está dada por la expresión matemática

$$R(x) = -10x^2 + 2000x$$

Donde x simboliza la cantidad de unidades vendidas, y $R(x)$ la rentabilidad expresada en dólares. Bajo las condiciones planteadas por el problema determine la cantidad de procesadores que debe vender esta empresa comercializadora para maximizar su utilidad o rentabilidad.

147. **Calzado masculino.** Una fábrica de zapatos deportivos para hombres determine que la rentabilidad por la venta de estos elementos está dada por la expresión matemática

$$y = -0,02x^2 + 200x$$

Donde x representa la cantidad de unidades vendidas, y $R(x)$ la rentabilidad expresada en dólares. Bajo las condiciones planteadas por el problema determine la cantidad de zapatillas que debe fabricar esta empresa para maximizar su utilidad o rentabilidad.

Sección 2.3: Funciones polinomiales y racionales

148. **Velocidad del flujo sanguíneo.** La velocidad con que circula el flujo sanguíneo en el interior de la arteria en $\frac{cm}{s}$ para un ser humano, está dada por la ecuación de Poiseuille que establece:

$$v = k(R^2 - r^2)$$

Donde k es un valor fijo, R el radio de la arteria (expresado en centímetros), r es el punto donde se quiere determinar la velocidad del flujo sanguíneo y que se mide con respecto al centro de la arteria. Para esta configuración dado que $k=1000$ y se tiene una arteria de 2 milímetros de radio, estime la velocidad con que viaja el flujo sanguíneo a 1 milímetro del centro de la arteria.

149. **Velocidad del flujo sanguíneo.** Para el problema anterior, conociendo la ecuación de Poiseuille:

$$v = k(R^2 - r^2)$$

Obtenga para $k = 800$, y $R = 4$ milímetros:

- La representación gráfica de velocidad del flujo sanguíneo contra posición de la medida.
- La velocidad del flujo sanguíneo en el centro de la arteria.
- La velocidad del flujo sanguíneo en el extremo del radio de la arteria.
- La velocidad del flujo sanguíneo en el punto medio de la arteria.

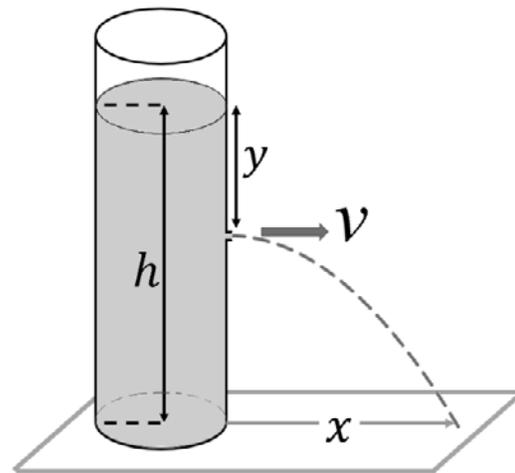
150. la figura muestra un tanque en forma cilíndrica que contiene agua hasta una altura h medida desde la base del cilindro. En este se perfora un pequeño agujero a una distancia y medida desde el nivel del agua, por lo que el líquido empieza a salirse con una velocidad dada por la ecuación de Bernoulli.

$$v = \sqrt{2gy}$$

Y el chorro cae a una distancia x de la base del cilindro, que se puede modelar por la relación matemática:

$$x = 2\sqrt{y(y-h)}$$

Donde g es la gravedad –considérese igual a 10 m/s^2 –, las distancias expresadas en metros y la velocidad de salida del líquido en el agujero dado en m/s. (Ver figura)



Con las expresiones definidas anteriormente y un cilindro que tiene agua con una profundidad de 1 m, encuentre:

- La representación geométrica de la velocidad de salida en función de la altura o de nivel de líquido.
- La representación geométrica del alcance del chorro en función de la altura o nivel de líquido.
- La posición del agujero para que el chorro de agua caiga lo más lejos posible del cilindro.

SECCIÓN

2.4

FUNCIONES Y ECUACIONES
TRIGONOMÉTRICAS

La trigonometría es una disciplina en las matemáticas, que en primera instancia estudia las relaciones geométricas entre lados y ángulos en triángulos, pero que se extiende a diversas disciplinas y puede aplicarse tanto en contextos académicos, pero también en contextos situacionales reales. El estudio de la trigonometría inicia con el concepto del ángulo y las diversas formas que existen para medirlo.

Definición 2.9. El **ángulo**: es la amplitud de rotación que describe un segmento rectilíneo en torno de uno de sus extremos tomado como vértice desde una posición inicial hasta una posición final.

Si la rotación es en sentido levógiro (contrario a las manecillas del reloj), se considera el ángulo positivo. Si la rotación es en sentido dextrógiro (conforme a las manecillas del reloj), el ángulo se considera negativo. Existen tres formas básicas de medir ángulos, el sistema sexagesimal, el sistema radian y el sistema hexagesimal.

El sistema sexagesimal, divide la circunferencia en 360 partes iguales y cada parte la denomina grado, posteriormente toma cada grado y lo divide en 60 partes iguales y a cada una se le da el nombre de minuto, cada minuto a su vez es dividido en 60 partes y cada parte recibe el nombre de segundo.

El sistema radián, es el sistema natural de medida de ángulos y se define como:

Definición 2.10. El **radián**: es la unidad de ángulo plano equivalente a un ángulo cuyo arco posee igual longitud que el radio.

Uno de los aspectos interesantes es que, si se toma media circunferencia de cualquier radio, sin importar el tamaño, siempre hay el mismo número de radios y a este número se le asignó un símbolo, $\pi = \pi$. Una forma equivalente de verlo es tomar el perímetro de la circunferencia –la longitud total de la circunferencia– y se divide entre el diámetro, sin importar las dimensiones de esta circunferencia, el cociente siempre es el mismo.

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510 = 180^\circ$$

Conversión entre sistemas para medir ángulos

En la conversión de un sistema de medida angular a otro se pueden usar diversas estrategias, sin embargo, recordando que $\pi = 180^\circ$, es posible usar este factor de conversión.

Ángulo: es la abertura entre dos líneas de cualquier tipo que concurren en un punto común llamado vértice.

Según la abertura los ángulos se clasifican en:

Águdos: ángulos menores a 90°

Rectos: ángulos iguales a 90°

Obtuseos: ángulos mayores a 90° pero menores a 180°

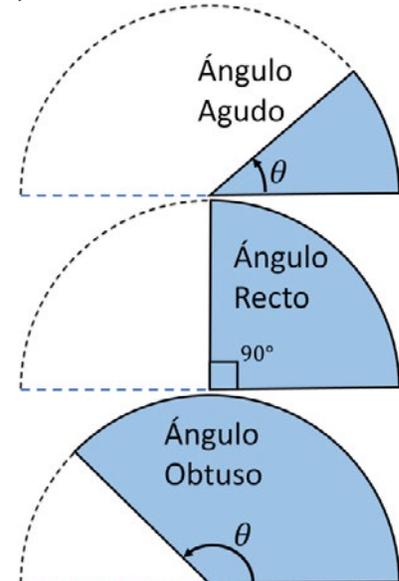


Figura 2.27. Tipos de ángulos



Figura 2.28. El número π

$$\frac{\text{Perímetro}}{\text{Diámetro}} = 3,14159 \dots$$

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

Ejemplo 2.17. Pasar a grados, los siguientes ángulos expresados en radianes:

$$\frac{3\pi}{2}, \frac{4\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$$

Solución: recordando que $\pi = 180^\circ$ se tiene entonces que:

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{3 \cdot 180}{2} = 270^\circ \quad \frac{4\pi}{5} = \frac{4 \cdot 180}{5} = 144^\circ \quad \frac{\pi}{3} = \frac{180}{3} = 60^\circ$$

Aunque este ejemplo da como resultado valores enteros, no necesariamente las respuestas a todos los problemas dan de esta manera.

A continuación, se plantea un ejemplo de conversión de sistema radián a sistema sexagesimal

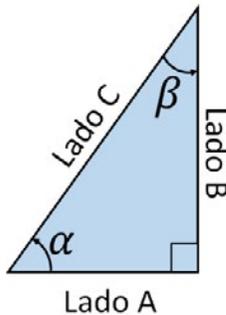


Figura 2.29. Lados en un triángulo rectángulo.

Si se toma el ángulo α como ángulo de medida, entonces

Lado A = Cateto adyacente
Lado B = Cateto opuesto
Lado C = Hipotenusa

Por otra parte, si se toma el ángulo β como ángulo de medida entonces

Lado A = Cateto opuesto
Lado B = Cateto adyacente
Lado C = Hipotenusa

Ejemplo 2.18. Pasar a radianes, los siguientes ángulos expresados en grados:

$$135^\circ, 220^\circ, 45^\circ$$

Solución: empleando el factor de conversión se tiene:

$$135^\circ = 135^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) = \frac{135^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4}$$

$$220^\circ = 220^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) = \frac{220^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{11\pi}{9}$$

$$45^\circ = 45^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) = \frac{45^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$$

Nótese que las conversiones de un sistema al otro se pueden hacer por medio de una regla de tres simple directa.

Las Funciones trigonométricas

Hay dos formas de definir las funciones trigonométricas, una es empleando las razones entre dos lados en un triángulo rectángulo, la otra es usando el punto terminal de un segmento que describe una circunferencia en un plano cartesiano. Dado que se pueden tener hasta seis relaciones para un triángulo entonces existen ser relaciones trigonométricas: seno (sen), coseno (cos), tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (csc), las cuales se definen a continuación.

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

Definición 2.11. Las funciones trigonométricas dado un triángulo rectángulo. Dado un triángulo rectángulo, donde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}} & \cot \theta &= \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{cat. opuesto}} \\ \cos \theta &= \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}} & \sec \theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. adyacente}} & [\text{Ec. 2.10}] \\ \tan \theta &= \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{Adyacente}} & \csc \theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. opuesto}} \end{aligned}$$

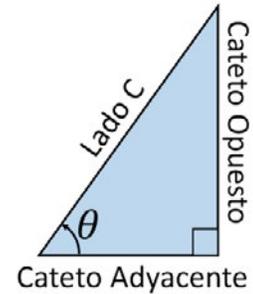


Figura 2.30. Triángulo rectángulo para la definición 2.11.

En los problemas de aplicación normalmente se utilizan las tres primeras relaciones trigonométricas.

Definición 2.12. Las funciones trigonométricas circulares. Dada una circunferencia de radio r , donde θ es cualquier ángulo entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{r} & \cot \theta &= \frac{x}{y} \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} & \sec \theta &= \frac{r}{x} & [\text{Ec. 2.11}] \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} & \csc \theta &= \frac{r}{y} \end{aligned}$$

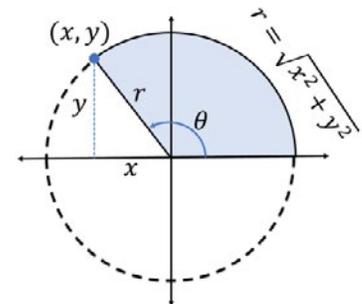


Figura 2.31. Círculo trigonométrico para la definición 2.12.

SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO

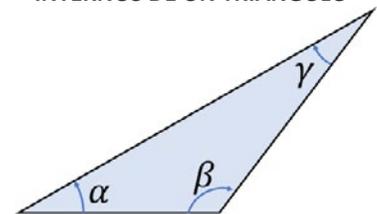


Figura 2.32. La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a π o 180°

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

Resolución de triángulos rectángulos usando trigonometría

Tal como se expresó anteriormente las funciones trigonométricas tienen un campo de aplicación muy amplio en las matemáticas, en las ingenierías y las tecnologías especialmente, por tanto, la comprensión de los contextos donde se desarrollan facilita la solución de diversos problemas de naturaleza académica o práctica. El siguiente ejemplo pide solucionar un triángulo lo que implica determinar el valor exacto de todos los ángulos y de todos los lados de la figura.

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

Teorema de Pitágoras

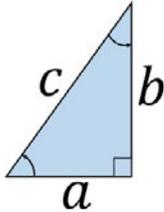


Figura 2.33. Triángulo rectángulo

Para un triángulo rectángulo la semisuma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Funciones
Trigonométricas
inversas

Al igual que las funciones polinomiales, las funciones trigonométricas tiene inversa en regiones específicas de su dominio; a manera de ejemplo considérese la función trigonométrica seno

$$y = \text{sen } x$$

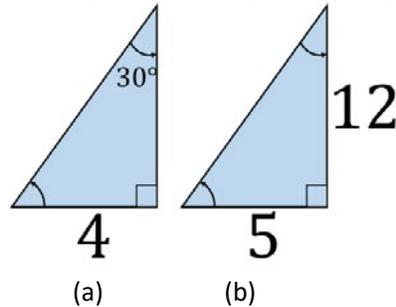
La función inversa del seno es

$$\text{sen}^{-1} y = x$$

Que también se abrevia como arcoseno

$$\text{arcsen } y = x$$

Ejemplo 2.19. Resolver los siguientes triángulos rectángulos



Solución: para el primer triángulo nótese que se tiene un ángulo y el lado opuesto, renombrando los datos desconocidos se obtiene:

Dado el ángulo y el lado opuesto, se puede usar la relación seno

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{4}{m}$$

Despejando se obtiene

$$m = \frac{4}{\text{sen } 30^\circ} = 8$$

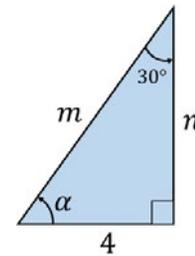


Figura 2.34.

Con los datos que se tienen, existen diversas formas de encontrar el lado restante.

$$\cos 30^\circ = \frac{n}{m}$$

Pero como se conoce a m , despejando a n se obtiene:

$$n = m \cos 30^\circ = 8 \cos 30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6,93$$

Finalmente, el ángulo restante se puede obtener por medio de una relación inversa –que se ve en el siguiente problema– o usando el teorema de la suma interna de los ángulos de un triángulo.

$$30^\circ + 90^\circ + \alpha = 180 \quad \rightarrow \quad \alpha = 60^\circ$$

B. Renombrando los lados se logra.

La hipotenusa h se puede obtener usando el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

Por tanto

$$h = \sqrt{169} = 13$$

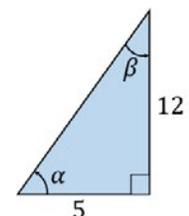


Figura 2.35.

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

Sin embargo, para los ángulos, se debe usar una relación trigonométrica inversa, que puede ser:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{5}{12} \approx 22,62^\circ$$

Finalmente, el ángulo restante se puede obtener por medio de la suma de los ángulos internos:

$$22,62^\circ + 90^\circ + \beta = 180 \rightarrow \beta = 67,38^\circ$$

Con lo cual el triángulo queda totalmente resuelto

Ejemplo 2.20. Desde lo alto de un cerro Pilón de 240 m.s.n.m en la Guajira colombiana, se sitúa un puesto de vigía para monitorear los barcos que pasan frente a la costa. En un determinado día el vigía divisa dos embarcaciones con ángulos de depresión de 15° y 23° respectivamente. Encuentre la distancia entre las dos embarcaciones.

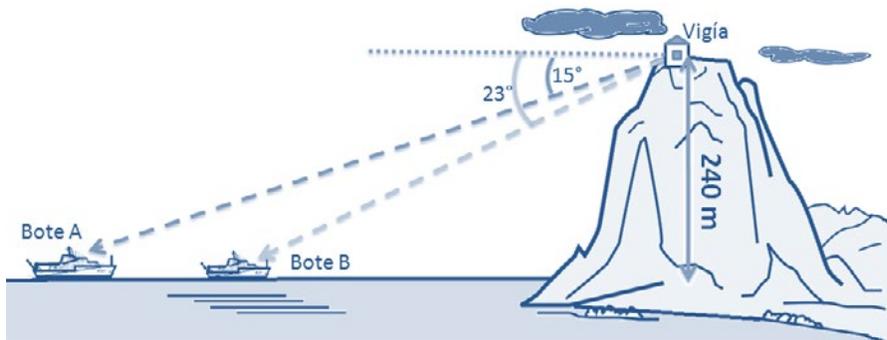


Figura 2.36. Gráfico del problema 2.16.

Imagen adaptada de : <https://www.uaeh.edu.mx/docencia>

Solución: como puede apreciarse, existen dos triángulos rectos y sabiendo que los ángulos alternos internos entre líneas paralelas son iguales entonces se tiene la siguiente figura.

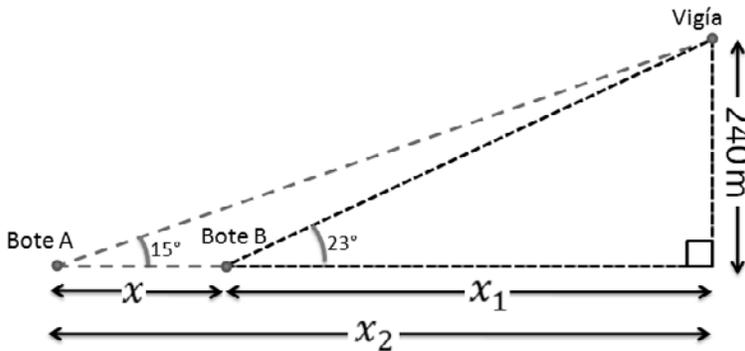


Figura 2.37. Interpretación gráfica del problema 2.16.

Es de interés para el problema encontrar la distancia x que se puede obtener de la expresión

Tabla 2.3. Relaciones trigonométricas para ángulos notables

	30°	45°	60°
Sen	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

	0°	90°	180°	270°
Sen	0	1	0	-1
Cos	1	0	-1	0
Tan	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

$$x = x_2 - x_1$$

Por tanto, se debe encontrar las distancias x_2 y x_1 y usando la definición 2.11., o 2.12, se tiene

$$\tan 15 = \frac{240}{x_2}$$

$$x_2 \tan 15 = 240$$

$$x_2 = \frac{240}{\tan 15}$$

$$x_2 \approx 895,69 \text{ m}$$

$$\tan 23 = \frac{240}{x_2}$$

$$x_2 \tan 23 = 240$$

$$x_2 = \frac{240}{\tan 23}$$

$$x_2 \approx 561,41 \text{ m}$$

La diferencia entre estas dos distancias es la distancia que existe entre los botes

$$x \approx 895,69 - 561,41 \approx 330,29 \text{ m}$$

Es un valor aproximado ya que se usa una aproximación a al centésima.

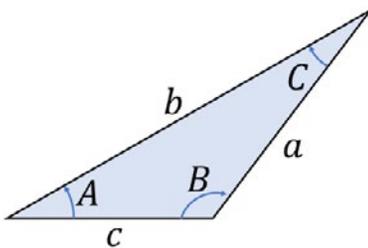


Figura 2.38. Teoremas Trigonométricos

Teoremas Trigonométricos

Las relaciones trigonométricas en su presentación más simple permiten resolver exclusivamente triángulos rectángulos, para triángulos que no son rectángulos, se deben aplicar dos teoremas a saber:

Teorema 2.6. Teorema del seno: para todo triángulo se cumple la relación –ver figura 2.38–

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad [\text{Ec. 2.12}]$$

En el teorema se aprecian dos igualdades y según la naturaleza del problema se puede escoger cual igualdad utilizar; por otro lado, en teorema se aplica especialmente cuando se tienen dos ángulos y un lado o cuando se tiene dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

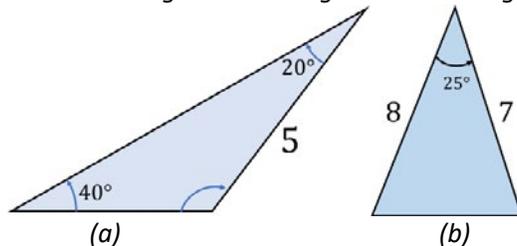
Teorema 2.7. Teorema del coseno: para todo triángulo se cumple la relación:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \quad [\text{Ec. 2.13}]$$

Una consecuencia de las definiciones anteriores, son las identidades trigonométricas, estas son relaciones entre las diferentes funciones, que son de mucha utilidad al momento de simplificar expresiones o de resolver ecuaciones.

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

Ejemplo 2.21. Resuelva los siguientes triángulos NO rectángulos.



Solución: recordando que solucionar un triángulo implica encontrar el valor de todos los lados y todos los ángulos, para el caso (a) se tienen dos ángulos y un lado siendo viable el teorema del seno.

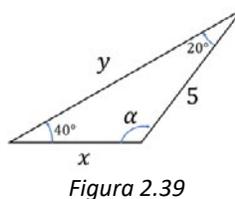
$$\frac{5}{\operatorname{sen} 40} = \frac{x}{\operatorname{sen} 20}$$

Despejando

$$\frac{5 \operatorname{sen} 20}{\operatorname{sen} 40} = x$$

Reduciendo

$$x \approx 2,66$$



Sabiendo que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° , el ángulo $\alpha = 120^\circ$ y aplicando de nuevo el teorema del seno –se puede igualmente aplicar el teorema del coseno y se llega al mismo resultado–, se obtiene:

$$\frac{5}{\operatorname{sen} 40} = \frac{y}{\operatorname{sen} 120}$$

Despejando

$$\frac{5 \operatorname{sen} 120}{\operatorname{sen} 40} = x$$

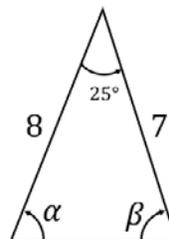
Reduciendo $x \approx 6.73$

Para el segundo triángulo, resulta conveniente usar el teorema del coseno.

$$x^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos 25 \approx 11.49$$

Cuya raíz es $x = 3,39$

Para sacar los ángulos internos se puede usar tanto el teorema del coseno despejando, como el teorema del seno, sin embargo, se prefiere este último por la simplicidad al momento de hacer los cálculos



$$\frac{3.39}{\operatorname{sen} 25} = \frac{7}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{8}{\operatorname{sen} \beta}$$

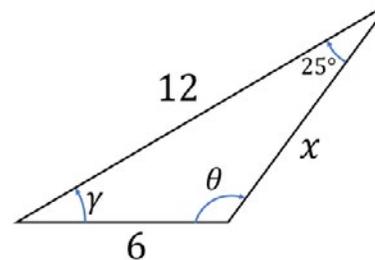
Despejando se obtiene:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{7 \operatorname{sen} 25}{3,39} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha \approx 0,873$$

Por tanto $\alpha \approx \operatorname{arcsen} 0,873 \approx 60,77^\circ$



Resolver el siguiente triángulo no rectángulo



SOLUCIÓN



Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

Con un procedimiento similar se puede obtener el ángulo que da $\beta = 94.23^\circ$

Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas son relaciones matemáticas de igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas; su importancia radica en el hecho que permite hacer transformaciones de una expresión en otra que explica mejor el comportamiento de un sistema o de un objeto, por otro lado, desarrolla habilidades de pensamiento como análisis y la síntesis entre otras, fundamentales para la comprensión y solución de problemas.

Las identidades se agrupan por funcionalidad tal como se muestra en las siguientes relaciones

Identidades recíprocas

$$\begin{aligned} \cot \theta &= \frac{1}{\tan \theta} \\ \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} \\ \csc \theta &= \frac{1}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Identidades de cociente

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ \cot \theta &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Fórmulas de ángulo medio

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \end{aligned}$$

Identidades pitagóricas

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ \tan^2 \theta + 1 &= \sec^2 \theta \\ 1 + \cot^2 \theta &= \csc^2 \theta \end{aligned}$$

Suma o diferencia de dos ángulos

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \beta \sin \alpha \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

Reducción

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta & \sin \theta &= -\sin(\theta - \pi) \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta & \cos \theta &= -\cos(\theta - \pi) \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta & \tan \theta &= \tan(\theta - \pi) \end{aligned}$$

En las identidades trigonométricas se busca demostrar, por medio de procedimientos analíticos que un lado de la ecuación es igual al otro lado, sin trasponer términos de un lado al otro –no porque sea incorrecto sino para poder demostrar la equivalencia–, a continuación, se muestran algunos ejemplos.

Ejemplo 2.22. Demuestre la siguiente identidad:

$$\frac{1 + \sec \alpha}{1 - \sec \alpha} = \frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha - 1}$$

Solución: una recomendación que frecuentemente resulta útil es llevar todas las funciones a términos de senos y coseno. Por tanto, usando las identidades recíprocas se tiene:

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

$$\frac{1 + \frac{1}{\cos \alpha}}{1 - \frac{1}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha - 1}$$

Sumando las fracciones se llega a:

$$\frac{\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha - 1}$$

Aplicando la ley de extremos y medios se obtiene:

$$\frac{(\cos \alpha + 1) \cos \alpha}{(\cos \alpha - 1) \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha - 1}$$

Cancelando los factores en el numerador y denominador se obtiene

$$\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha - 1} = \frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha - 1}$$

Que es una igualdad y comprueba la identidad.

Ejemplo 2.23. Demuestre la siguiente identidad.

$$\frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \cos \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta} = \cot \theta$$

Solución: organizando el denominador se obtiene:

$$\frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \cos \theta}{(1 - \cos^2 \theta) - \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} = \cot \theta$$

Aplicando una de las identidades trigonométricas

$$\frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} = \cot \theta$$

Reduciendo

$$\frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \cos \theta}{2 \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen} \theta} = \cot \theta$$

Factorizando

$$\frac{\cos \theta (2 \operatorname{sen} \theta - 1)}{\operatorname{sen} \theta (2 \operatorname{sen} \theta - 1)} = \cot \theta$$

Cancelando los paréntesis se comprueba finalmente la identidad

$$\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \cot \theta$$

Que corresponde a igualdad

Acertijo

Imagen tomada de :

<https://clipart-library.com/>

1. Un oso camina 10 km hacia el sur, luego, 10 kilómetros hacia el oeste, finalmente otros 10 km hacia el norte. ¿De qué color es el oso?

Ingenio.



Imagen adaptada de :

<https://pixabay.com/es>

2. De un solo trazo recto, tache dos cifras y deje cortado el reloj en dos partes, tal que manera que la suma de los números de un lado de igual que la suma de los del otro.

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

Solución de ecuaciones trigonométricas.

Resolver o solucionar una ecuación, es encontrar todos los valores que vuelven cierta una expresión; en el caso de las funciones trigonométricas, se debe prestar mayor atención puesto que por lo general, se involucran diversas funciones.

Estrategia para resolver una ecuación trigonométrica.

1. Identificar muy bien la variable de interés.
2. Cuando existan más de un tipo de función trigonométrica, escoger una sola y transformar las demás funciones en la función escogida; para eso se pueden usar las identidades.
3. Simplificar la expresión, reduciéndola al máximo posible.
4. Resolver la ecuación, teniendo en cuenta soluciones en otros cuadrantes.
5. Probar cada una de las soluciones en la ecuación original para analizar si son consistentes.

Ejemplo 2.24. Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica.

$$\cos^2 \theta + \operatorname{sen} \theta = 1$$

Solución: De las identidades pitagóricas se lleva la expresión a términos de senos.

$$1 - \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen} \theta = 1$$

Reduciendo esta expresión se llega:

$$-\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen} \theta = 0$$

Al factorizar:

$$\operatorname{sen} \theta (-\operatorname{sen} \theta + 1) = 0$$

Con lo cual se tienen factores igualados a cero, lo que implica que para que la ecuación sea cierta, cada factor, o todos, tienen que ser cero, así:

$$\operatorname{sen} \theta = 0,$$

Lo cual es cierto para:

$$\theta = 0 \text{ y } \theta = \pi$$

El segundo factor también se iguala a cero, lo cual lleva a:

$$-\operatorname{sen} \theta + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \theta = 1$$

Esta última expresión es cierta para:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

Finalmente, la ecuación tiene tres soluciones en el intervalo de $[0, 2\pi)$

$$\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \pi$$

Ejemplo 2.25. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica.

$$3 \tan x = 2 \cos x$$

Solución: llevando todos los términos a senos y cosenos se tiene:

$$\frac{3 \operatorname{sen} x}{\cos x} = 2 \cos x$$

Despejando

$$3 \operatorname{sen} x = 2 \cos^2 x$$

Usando las identidades trigonométricas se obtiene

$$3 \operatorname{sen} x = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x)$$

Reorganizando se obtiene:

$$2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$$

Esta ecuación se puede resolver tanto factorizando como utilizando la fórmula general cuadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-2)}}{4}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

Lo que lleva a plantear dos soluciones posibles

$$\operatorname{sen} x = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

Como la función seno nunca es mayor a 1 o menor a -1, esta respuesta no tiene solución

$$\operatorname{sen} x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia:

$$x = \operatorname{arcsen} \frac{1}{2}$$

Tiene dos soluciones a saber: $x = 30^\circ$ o $x = 150^\circ$



Resolver la siguiente ecuación trigonométrica.

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

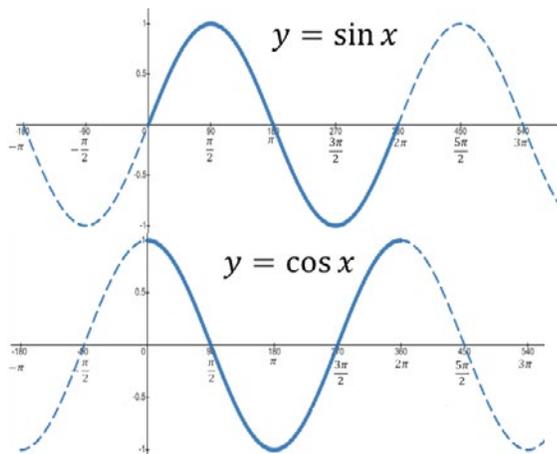
SOLUCIÓN



Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

Gráficas de las funciones trigonométricas

Se dice que una función es periódica si se repite cada cierto momento, es decir, tiene las mismas características en determinadas partes de su dominio. Las funciones trigonométricas tienen una particularidad, y es que son periódicas; la función seno, coseno, secante y cosecante tienen como periodo 2π , mientras que las funciones tangente y cotangente tienen como periodo π . A continuación, se muestran las gráficas de las seis funciones trigonométricas.

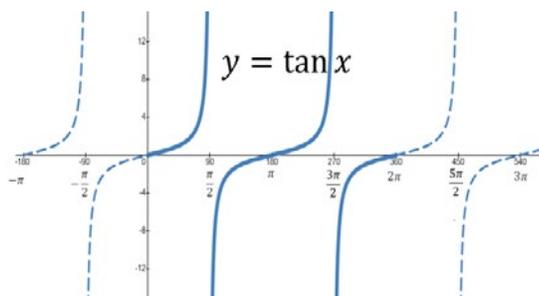


Función seno

Continua
Oscilante
Dominio: \mathbb{R}
Rango: $[-1, 1]$
Periodo: 2π

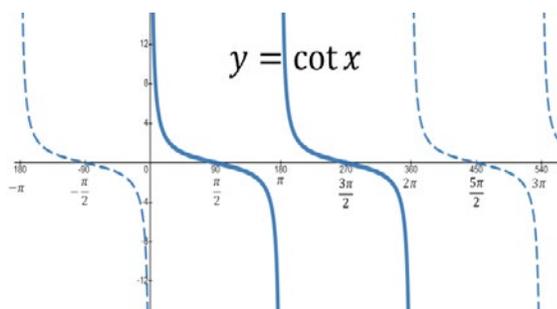
Función coseno

Continua
Oscilante
Dominio: \mathbb{R}
Rango: $[-1, 1]$
Periodo: 2π



Función tangente

Discontinua
Creciente
Dominio: $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$
Rango: \mathbb{R}
Periodo: π



Función cotangente

Discontinua
Creciente
Dominio: $\mathbb{R} - \{0, \pi\}$
Rango: \mathbb{R}
Periodo: π

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

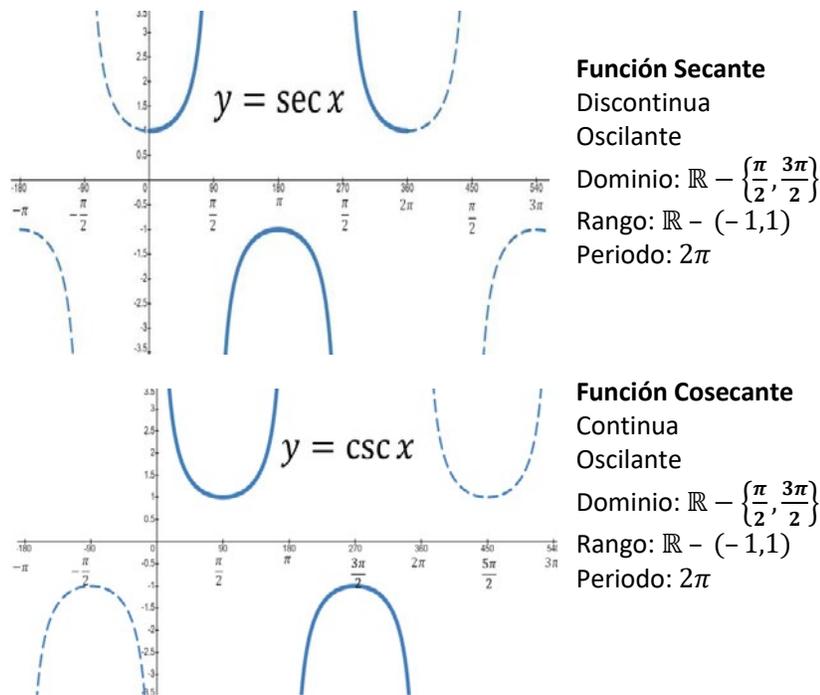


Figura 2.41. Gráficas de las seis funciones trigonométricas.

Las gráficas mostradas en la figura 2.41., son las formas de las curvas más generales cuando las funciones son simples. Cuando aparecen constantes numéricas en las expresiones, es posible que cambien las amplitudes o las longitudes, sin embargo, las formas de las curvas se conservan, de ahí la importancia de estudiar el comportamiento de las seis funciones trigonométricas.

Ejemplo 2.26. Analizar el comportamiento de las funciones.

$$f(x) = \sin x \quad f(x) = \sin 2x$$

Solución: graficando estas funciones se obtiene.

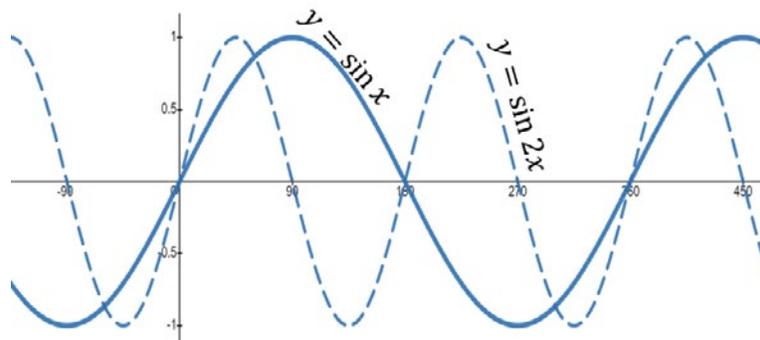


Figura 2.42. Gráfica del ejercicio 2.22.

Se aprecia que entre más grande sea el factor del argumento –parte interna de la función que en algunas disciplinas recibe el nombre de frecuencia angular–, más oscilaciones da la misma.

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

Ejemplo 2.27. Analizar el comportamiento de las funciones:

$$f(x) = \text{sen } x \quad f(x) = 2 \text{sen } x$$

Solución: Graficando estas funciones se obtienen.

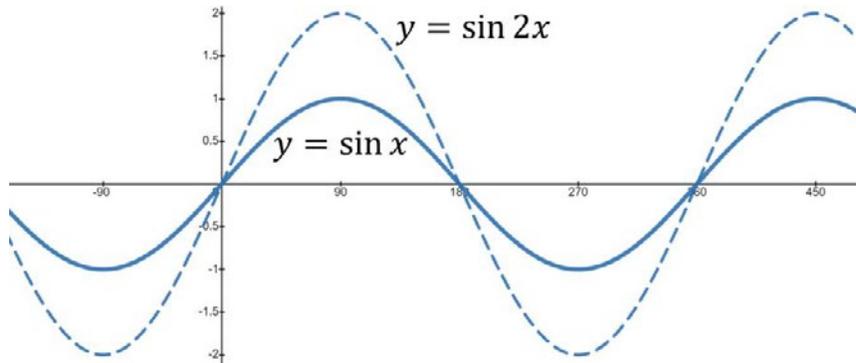


Figura 2.43. Gráfica del ejercicio 2.24.

Como conclusión, al multiplicar por una constante la función aumenta su rango o amplitud;

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

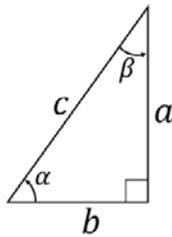
Ejercicios sección 2.4. Funciones y ecuaciones trigonométricas.

Expresar en radianes, cada uno de los siguientes ángulos

1. $\theta = 25^\circ$
2. $\theta = 72^\circ$
3. $\theta = 24^\circ$
4. $\theta = 225^\circ$
5. $\theta = 330^\circ$
6. $\theta = 150^\circ$
7. $\theta = 180^\circ$
8. $\theta = 45^\circ$
9. $\theta = 200^\circ$

Expresar en grados cada uno de los siguientes ángulos.

10. $\theta = \frac{3\pi}{2}$
11. $\theta = \frac{2\pi}{3}$
12. $\theta = \frac{4\pi}{3}$
13. $\theta = \frac{6\pi}{5}$
14. $\theta = \frac{\pi}{2}$
15. $\theta = \frac{8\pi}{3}$
16. $\theta = \frac{\pi}{3}$
17. $\theta = \frac{\pi}{4}$
18. $\theta = \frac{7\pi}{5}$

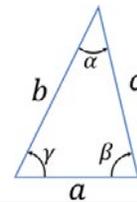


Para cada situación, encuentre los datos faltantes de tabla que se muestra a continuación. Recuerde que la imagen no está a escala y tampoco es proporcionada con los valores de cada punto.

	a	b	c	α	β
19.	1			45°	
20.	3			30°	
21.	6			37°	
22.		5			45°
23.		9			20°
24.			12		
25.			40	40°	
26.			48	38°	
27.	6				35°
28.	9				23°
29.		50		40°	
30.		16		53°	

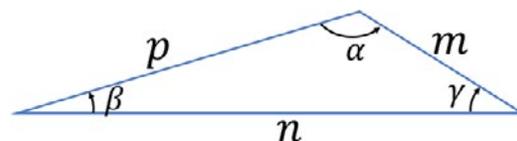
31.			12		70°
32.			28		30°
33.	12	16			
34.	10	15			
35.		12	18		
36.		20	36		
37.	24		28		
38.	16		20		

Los triángulos que se muestran a continuación no son rectángulos. Con los datos indicados, encuentre el valor de todos los lados y de todos los ángulos. Recuerde que la imagen no está a escala y tampoco es proporcionada con los valores de cada punto.



	a	b	c	α	β	γ
39.	1	1		50°		
40.	7	6		75°		
41.	12	11			60°	
42.	40	50				80°
43.		12	14	70°		
44.		8	7		74°	
45.		10	12			65°

Los triángulos que se muestran a continuación no son rectángulos. Con los datos indicados, encuentre el valor de todos los lados y de todos los ángulos. Recuerde que la imagen no está a escala y tampoco es proporcionada con los valores de cada punto.



Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

	m	n	p	α	β	γ
46.	8	12		100°		
47.	8	14		120°		
48.	12	20			18°	
49.	4	7				20°
50.		300	280	140°		
51.		12	8			24°
52.		12	10		16	

Compruebe de forma analítica las siguientes identidades trigonométricas

53. $\cos \theta \tan \theta = \sin \theta$
54. $1 + \sin \theta = \frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin \theta}$
55. $\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$
56. $\frac{\sec \theta - 1}{\sec^2 \theta} = \sin \theta$
57. $\frac{\sec \theta}{\tan \theta + \cot \theta} = \sin \theta$
58. $\cot \theta = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}$
59. $\sec \theta + \tan \theta = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}$
60. $2 \tan \theta + \cos \theta = \frac{\cos^2 \theta + 2 \sin \theta}{\cos \theta}$
61. $\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = -\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$
62. $\frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{\cot \theta} = \tan \theta + \cot \theta$
63. $\sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$
64. $(\tan^2 \theta + 1)(1 - \cos^2 \theta) = \tan^2 \theta$
65. $\frac{\tan \theta - \sin \theta}{\sin^3 \theta} = \frac{\sec \theta}{1 + \cos \theta}$
66. $2 \sin^2 \theta - 1 = \sin^4 \theta - \cos^4 \theta$
67. $\cot^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) = \csc^2 \theta$

Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas

68. $\sin x - \cos x = 0$
69. $\sin^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$
70. $\csc x = \sec x$
71. $\sin x - \sqrt{2} = -\sin x$
72. $\cos^2 \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$
73. $\sin x + \cos 2x = 1$
74. $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$
75. $\cos x - \sin x = 1$
76. $\sin x - 2 \cos 2x = -\frac{1}{2}$
77. $\tan 2\theta = -\tan \theta$
78. $\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0$
79. $\cos \frac{\theta}{2} - \cos \theta = 1$
80. $\cos x + 2 \sin^2 x = 1$
81. $2 \cos^2 x = 3 - 3 \sin x$
82. $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$
83. $4 \sin^2 x \tan x - 4 \sin^2 x - 3 \tan x + 3 = 0$
84. $4 \sin(x - 30) \cos(x - 30) = \sqrt{3}$
85. $2 \sin^2 x = 2 + \cos x$
86. $\tan^2 x + 4 \tan x - 4 = 0$
87. $4 \cos^2 x - 4 \cos x - 1 = 0$

Realice sobre un mismo plano, las gráficas de las funciones que se muestran a continuación, posteriormente analice el comportamiento de cada una y concluya las variaciones que se obtienen cuando se cambian los parámetros.

88. $\begin{cases} y = \sin x \\ y = \sin 2x \\ y = \sin 3x \end{cases}$
89. $\begin{cases} y = 0.5 \sin x \\ y = \sin x \\ y = 2 \sin x \end{cases}$
90. $\begin{cases} y = -\cos x \\ y = \cos x \end{cases}$
91. $\begin{cases} y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ y = \cos x \\ y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$
92. $\begin{cases} y = \sin x \\ y = \sin(-x) \end{cases}$
93. $\begin{cases} y = \cos x \\ y = \cos(-x) \end{cases}$

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

Problemas de aplicación

A continuación, usted va a encontrar una serie de situaciones problema en diversas áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), las cuales debe interpretar, modelar y resolver para dar cuenta de la solución. Ilustre y explique claramente los modelos propuestos, identificando las variables utilizadas, explicando también la estrategia de solución y la calidad de la solución encontrada

94. El Big Ben es gran campana del reloj situado Palacio de Westminster en Londres, sede del Parlamento del Reino Unido. Un observador se encuentra a 55 metros de la base central de la cúpula del reloj y observa la punta del palacio con ángulo de elevación de 60° tal como muestra la figura.

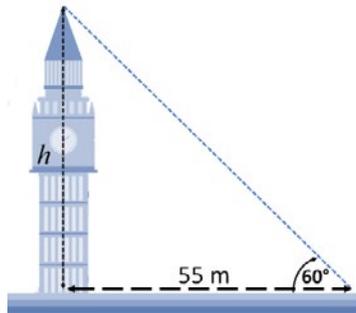


Imagen adaptada de : <https://brainly.lat>

Determine la altura del punto más alto de la torre del reloj.

95. La Torre Eiffel es un monumento de hierro pudelado, diseñada inicialmente por los ingenieros civiles Koechlin y Nougier y construida, tras su rediseño por el ingeniero civil francés Alexandre Gustave Eiffel y sus colaboradores para la Exposición Universal de 1889 en París.

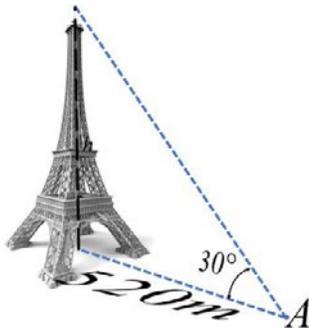


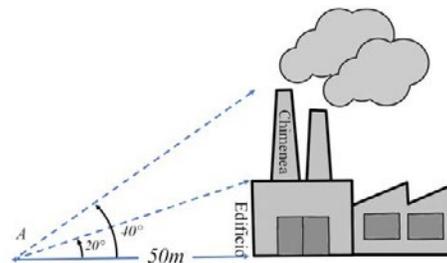
Imagen adaptada de :

<https://recursoslibres.reformamatematica.net/>

Una persona se encuentra a 520 metros del punto central exactamente debajo de la torre, y observa desde A, el punto más alto de la misma con un ángulo de elevación de 30° . Dada esta configuración determine –El dibujo no está a escala y corresponde a una proyección oblicua–:

- La altura de la torre.
- Otra persona situada a 400 metros del punto central de la base de la torre, con qué ángulo vería el punto más alto de la torre.

96. Una persona situada en el punto A, a 50 metros lineales de la estructura de una fábrica, nota el punto superior del edificio con un ángulo de elevación de 20° y el punto más alto sobre la chimenea, con un ángulo de elevación de 40° tal como se aprecia en la figura.



Determine de forma analítica:

- La altura del edificio
 - La altura de la chimenea
97. El piloto de un avión comercial que vuela a 3000 m de altura divisa el centro de dos ciudades perfectamente alineadas con ángulos de depreciación de 50° y 35° respectivamente tal como muestra la figura.

Sección 2.4: Funciones y ecuaciones trigonométricas

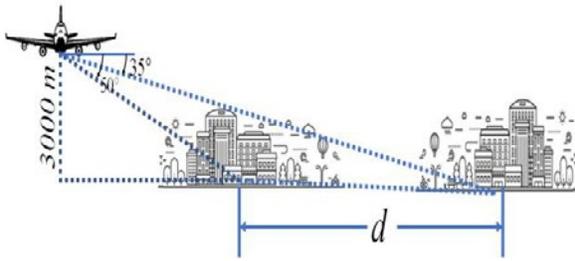
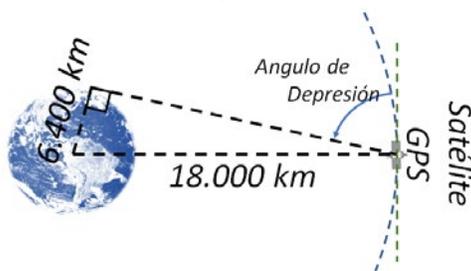


Imagen adaptada de : <https://espanol.libretexts.org/>

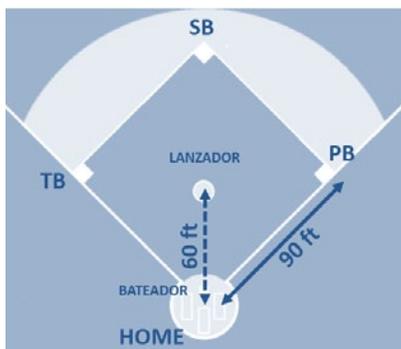
Dada la configuración determine la distancia que hay entre los centros de las dos ciudades.

98. Un satélite GPS –Sistema de Posicionamiento Global– gira alrededor de la Tierra en una órbita estable de 18.000 km del centro, tal como muestra la figura (no está a escala).



Dada la anterior representación geométrica, encuentre el ángulo de depresión con que está girando el satélite GPS.

99. Un juego de béisbol se juega en una cancha, con un campo interior formado por un cuadrado de 90 pies de lado, tal como muestra la figura. El lanzador se ubica en el montículo el cual está sobre la línea que une el bateador y la segunda base a 60 pies del bateador –pero no está en la mitad de esa distancia–.



Encuentre la distancia en pies, a la cual está el lanzador de cada una de las bases y el ángulo de los triángulos internos que se forman entre el bateador y las cuatro esquinas para este juego popular en los Estados Unidos.

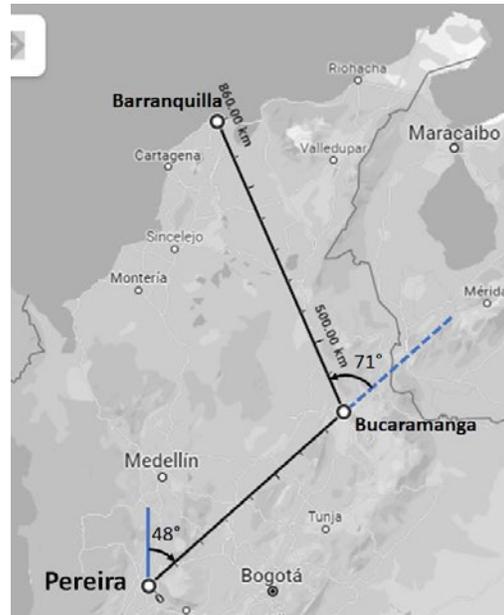


Imagen adaptada de : <https://es.wikipedia.org/>

100. Un avión que sale de Pereira, vuela directamente a la ciudad de Bucaramanga que está a una distancia de 390 km lineales con una dirección de 48° norte-este, posteriormente cuando el avión llega a Bucaramanga, gira a su izquierda 71° con respecto a su dirección inicial para dirigirse directamente a la ciudad de Barranquilla que se encuentra a 470 km en dirección norte-oeste, tal como muestra la figura.

Encuentre la distancia lineal y la dirección con respecto al norte en la que debe volar un avión, si desea ir directamente desde la ciudad de Pereira hasta la ciudad de Barranquilla. (El dibujo no está a escala ni es proporcional)

SECCIÓN 2.5 **FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES**

En el campo de las Ciencias Económicas y Administrativas, es muy frecuente plantear soluciones a situaciones de tipo económico y de producción, donde se tiene que recurrir a modelos matemáticos que involucren variables independientes en los exponentes –tal es el caso del interés continuo o compuesto, donde los periodos de tiempo son una variable exponencial–, en ingeniería también es muy frecuente esta situación –mitigación de campos, caída de intensidades eléctricas o sonoras– de ahí la importancia de analizar el comportamiento tanto de la función exponencial como de la función logarítmica.

Función exponencial

La función exponencial es de la forma $y = f(x) = a^x$, donde a es un número positivo que recibe el nombre de base. El exponente es la variable independiente. Esta expresión es muy diferente al concepto de potenciación pues es la variable la que se eleva a una potencia conocida.

Definición 2.13. Función exponencial: toda función de la forma:

$$f(x) = a^x \quad [\text{Ec. 2.14}]$$

Con $a > 0$ y $a \neq 1$ es una función exponencial.

La figura 2.44., muestra la representación gráfica de la función exponencial canónica.

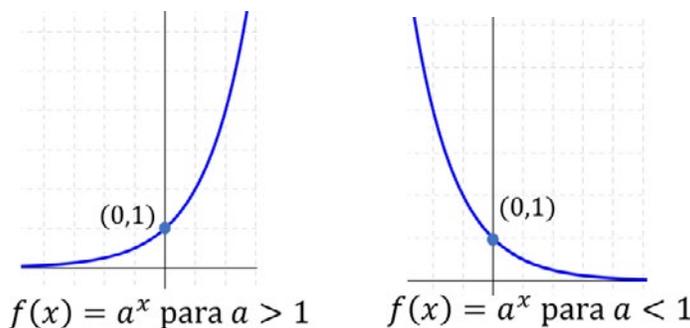


Figura 2.46. Gráficas de la función exponencial.

Nótese en la figura que la función exponencial como se define inicialmente siempre corta el eje de las ordenadas en (0,1), por otro lado, $y=0$ es una asíntota horizontal, lo que significa que nunca corta al eje $-X-$. El dominio de la función exponencial y el rango son respectivamente.

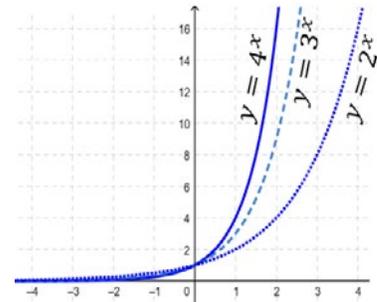


Figura 2.44. Varias funciones exponenciales.

Nótese que a medida que la base se va volviendo más grande, la función crece más rápido.

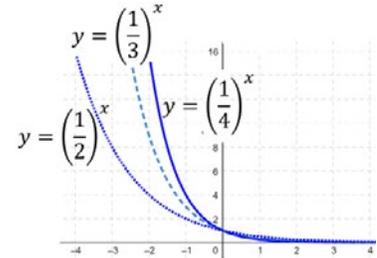


Figura 2.45. Varias funciones exponenciales.

¿Qué puede concluir del comportamiento de estas funciones exponenciales, cuando la base está entre cero y uno?



Resolver la siguiente ecuación

$$2^{x+5} - 2^{x+3} - 2^{x+1} = 88$$

SOLUCIÓN



Sección 2.5: Funciones logarítmicas y exponenciales

La Identidad de Euler.

Una de las curiosidades de la matemática, es la identidad de Euler relaciona perfectamente las cuatro constantes más importantes del cálculo.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Y aún se discuten algunas propiedades del número Neperiano.

Aunque el número $-e-$ no se puede obtener de forma exacta con ninguna expresión algebraica, si existe una relación que obtiene de forma aproximada el número, esta se muestra a continuación:

Tabla 2.4. Número de Neper

N	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2,000000000
10	2,593742460
100	2,704813829
1000	2,716923932
10000	2,718145927
100000	2,718268237
1000000	2,718280469
10000000	2,718281694
100000000	2,718281786
1000000000	2,718282031

Nótese que entre más grande sea el orden en la tabla, más se aproxima la relación a la constante neperiana.

$$Df = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

$$Rf = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$$

Teorema 2.8. Propiedades de los exponentes: Sea a y b dos números reales positivos mayores que cero y n y m dos números enteros, que cumplen con las siguientes propiedades:

Exponente cero	$a^0 = 1$	
Producto	$a^m a^n = a^{m+n}$	
Cociente	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	
Potencia	$(a^m)^n = a^{mn}$	
Raíz	$\frac{m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$	
Distributiva del producto	$(ab)^m = a^m b^m$	[Ec. 2.15]
Distributiva del cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	
Invertida	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	
Invertida	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$	

Estas propiedades son ampliamente utilizadas en la reducción y solución de problemas que involucren cantidades con potencias o cantidades exponenciales.

Función exponencial natural

En la matemática, existen números muy importantes con los cuales se definen otras propiedades o cantidades, entre ellos están el 0 , 1 , π y el número imaginario $-i$ y ahora se introduce otro número importante, el número e , conocido como número de Euler o también como constante neperiana. Este número curiosamente aparece frecuentemente en muchos fenómenos naturales, sirve para explicar y predecir el comportamiento de algunos sistemas eléctricos, electrónicos y mecánicos, también aparece en fenómenos sociales como el crecimiento de poblaciones, en fenómenos económicos, por citar tan solo algunos y de ahí la importancia de su estudio en el cálculo. Por otro lado, el número $-e-$ como el número $-\pi-$ son números trascendentales, es decir, no pueden obtener por la resolución de una ecuación algebraica y su valor exacto no puede expresarse como un número finito de cifras decimales o con decimales periódicos, por lo tanto, solamente se puede trabajar con valores aproximados.

$$e \approx 2,71828182845904523536$$

Sección 2.5: Funciones logarítmicas y exponenciales

Aunque en primera instancia, resulte aparentemente más sencillo trabajar con exponentes de base 10, en muchas aplicaciones reales es más práctico usar directamente el número neperiano.

Definición 2.14. Función exponencial natural: dada la función de la forma:

$$f(x) = e^x \quad [\text{Ec. 2.16}]$$

Recibe el nombre de función exponencial natural, la cual tiene como base el número neperiano.

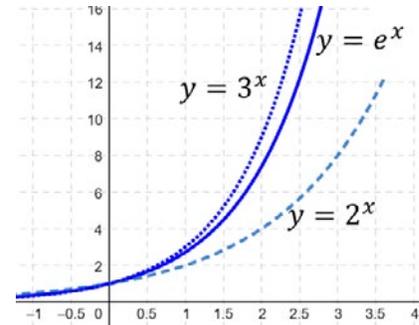


Figura 2.47. Comparación de la función exponencial natural con otras funciones exponenciales.

Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de la función exponencial natural se encuentra entre las gráficas $y = 2^x$ y la gráfica $y = 3^x$. La figura 2.45., ilustra esta situación.

Interés.

El interés es un concepto financiero que expresa el costo de usar dinero o el beneficio de prestarlo durante cierto tiempo. Si un monto de dinero P denominado capital, se invierte a una tasa de **interés simple** r , al final del plazo, el dinero se ha transformado en:

$$A = P(1 + r) \quad [\text{Ec. 2.17}]$$

Si esos intereses no se retiran, sino que se invierten de nuevo al capital, durante un número seguido de n periodos de tiempo, entonces lo que se obtiene producto de ese **interés compuesto** es:

$$A = P(1 + r)^n \quad [\text{Ec. 2.18}]$$

Ahora, en un contexto más real y práctico, supóngase que ese interés se calcula n veces en un año, entonces en cada periodo la tasa de interés es $\frac{r}{n}$ y existen n periodos en t años, lo cual permite obtener una expresión para el monto de capital después de t años—esta expresión es conocida como la tasa de interés anual nominal—.

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \quad [\text{Ec. 2.19}]$$

Que es por lo general, la estrategia financiera aplicada por bancos y demás entidades.

Ejemplo 2.28. Una persona hace un préstamo de 20 millones en un banco que le ofrece un interés de 12% anual, encuentre el costo final que debe pagar este usuario si el interés se lo liquida anual, semestral, trimestral, mensual y diariamente.

Solución: La tabla 2.5., muestra los resultados de las operaciones



Sección 2.5: Funciones logarítmicas y exponenciales

Tabla 2.5. Capital invertido después de N periodos de tiempo.

Periodos de Composición	N	Monto después de 10 años
Anual	1	$20 \left(1 + \frac{0,12}{1}\right)^{1(10)} = \$62.116.964$
Semestral	2	$20 \left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{2(10)} = \$64.142.709$
Trimestral	4	$20 \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{4(10)} = \$65.240.756$
Mensual	12	$20 \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12(10)} = \$66.007.737$
Diario	365	$20 \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{4(10)} = \$66.389.244$

Nótese que la expresión con la que se calcula el interés compuesto es muy similar a la expresión con que se obtiene el número neperiano, y de esta forma es posible definir una expresión para el **interés continuamente compuesto**.

$$A = Pe^{rt} \quad [\text{Ec. 2.20}]$$

Donde A es el capital al final de los periodos de tiempo, r el interés en el periodo de tiempo y t los periodos de tiempo.

Ejemplo 2.29. Con los datos de problema anterior, determine el monto de dinero, pero usando un interés continuamente compuesto:

Solución: aplicando la expresión anterior, se obtiene:

$$A = Pe^{rt} = 20e^{0,12 \cdot 10 \text{ años}} = \$66.402.338$$

Que corresponde al monto de dinero con un interés calculado cada instante de tiempo.

Tabla 2.6. Comportamiento en valores de la función logaritmo decimal

X	x	Log ₁₀ X
10 ⁻³	0,001	-3
10 ⁻²	0,01	-2
10 ⁻¹	0,1	-1
10 ⁰	1	0
10 ¹	10	1
10 ²	100	2
10 ³	1000	3

Función logarítmica

Las funciones exponenciales vistas anteriormente son funciones inyectivas o uno a uno y en consecuencia es posible obtener su función inversa, así, la función inversa de la exponencial es la función logarítmica. Supóngase que se tiene $y = 2^x$, cuando $x = 3$, reemplazando $y = 8$, es decir $8 = 2^3$, ahora supóngase que se quiere hallar el exponente, teniéndose el número, lo que en términos matemáticos implica plantear que

$$2^x = 8$$

Sección 2.5: Funciones logarítmicas y exponenciales

Fácilmente se puede resolver esta expresión, pero situaciones más complejas precisan definir una operación que permita realizar los cálculos; esta es la tarea de los logaritmos

Definición 2.15. Función logarítmica: sea a un número positivo con $a \neq 1$. La función logaritmo con base a , denotada por $\log_a x$ se define como:

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x$$

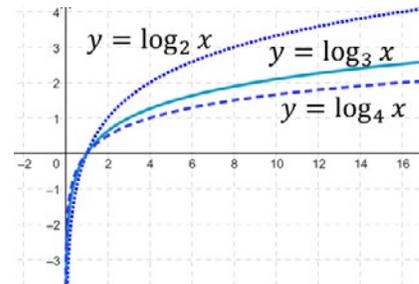


Figura 2.48. Varias curvas para la función logaritmo.

Lo anterior, es equivalente a decir que el logaritmo de un número corresponde al exponente al cual debe elevarse una base, para obtener el número.

Ejemplo 2.30. Obtener los siguientes logaritmos.

- $\log_2 1.024$
- $\log_3 243$
- $\log_5 125$
- $\log_{10} 1.000.000$

Solución: expresando cada número como una potencia, es posible reducir estas cantidades:

- $\log_2 1.024 \rightarrow 2^x = 1024 \rightarrow 2^x = 2^{10} \rightarrow x = 10$
- $\log_3 243 \rightarrow 3^x = 243 \rightarrow 3^x = 3^5 \rightarrow x = 5$
- $\log_5 125 \rightarrow 5^x = 125 \rightarrow 5^x = 5^3 \rightarrow x = 3$
- $\log_{10} 1.000.000 \rightarrow 10^x = 1.000.000 \rightarrow 10^x = 10^6 \rightarrow x = 6$

Recordando que la función logarítmica es la función inversa a la función exponencial, es posible obtener una gráfica. La figura 2.49., muestra la situación.

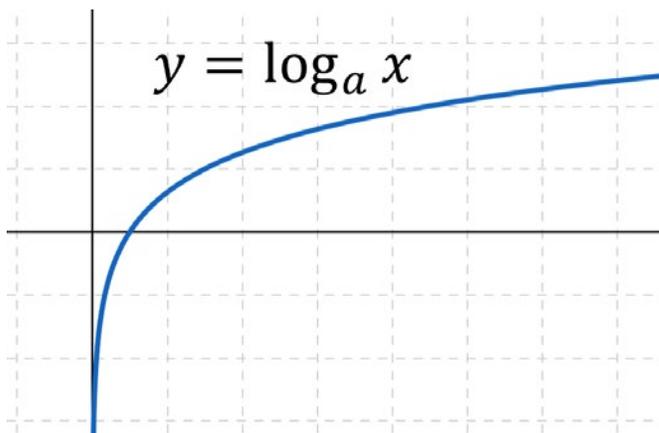


Figura 2.49. Curva característica para $f(x) = \log_a x$ para $a > 1$

La gráfica muestra que entre mayor sea la base del logaritmo, la función tiende a ser cada vez más horizontal. Otra particularidad es que, en la forma estándar, un logaritmo no corta al eje Y y corta al eje X en (1,0).

Sección 2.5: Funciones logarítmicas y exponenciales

Errores comunes que se cometen en matemáticas

Es frecuente encontrar errores que se cometen con las propiedades de los exponentes y de los logaritmos, razón por la cual se invita al lector a ser muy cuidadoso al momento de aplicarlas y tener en cuenta que:

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

$$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

$$\log(ab) \neq \log a \log b$$

$$\log(a \pm b) \neq \log a \pm \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) \neq \frac{\log a}{\log b}$$

Igual aplica para las funciones trigonométricas

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

$$\frac{ab}{c} \neq \frac{a}{c} \frac{b}{c}$$

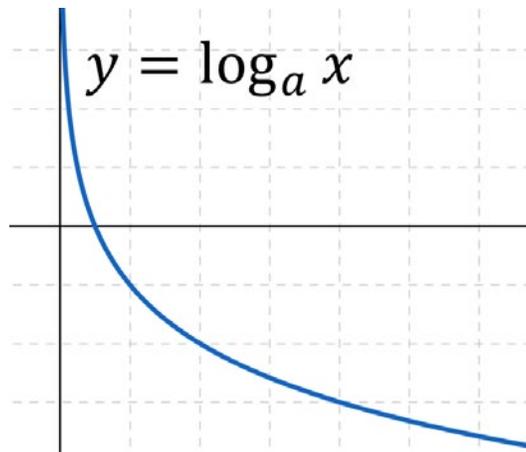


Figura 2.50. Curva característica para $f(x) = \log_a x$ para $0 < a < 1$

Nótese en la figura que la función logarítmica como se define en primera instancia siempre corta el eje de las abscisas en $(1, 0)$, pero este varía si el argumento se le adicionan constantes, por otro lado, para la función mostrada en la figura 2.48., $x = 0$ es una asíntota vertical, lo que implica que nunca corta al eje $-Y$; así el dominio de la función exponencial y el rango son respectivamente.

$$Df = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$$

$$Rf = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Contrario como se había definido para la función exponencial.

Teorema 2.9. Propiedades de los logaritmos: sean a y b números reales positivos diferentes de cero y n un número entero positivo, las siguientes son propiedades para los logaritmos:

- | | |
|------------------------------|--|
| 1. Log de una multiplicación | $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ |
| 2. Log de un cociente | $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ |
| 3. Log de una potencia | $\log_a(x^n) = n \log_a x$ |
| 4. Log de un radical | $\log_a \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} \log_a x$ |
| 5. Inv de la base | $\log_{\frac{a}{b}} x = -\log_b x$ |
| 6. Inv de la base | $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$ |

Otras Identidades con logaritmos

- | | |
|--------------------------|--|
| 7. Logaritmo de 1 | $\log_a 1 = 0$ |
| 8. Igual base y número | $\log_a a = 1$ |
| 9. Exp de un logaritmo | $a^{\log_a x} = x$ |
| 10. Log de iguales bases | $\log_a a^x = x$ |
| 11. Cambio de base | $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ |
| 12. Cambio de base | $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ |
| 13. Cambio de base | $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$ |
| 14. Cambio de base | $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ |

Sección 2.5: Funciones logarítmicas y exponenciales

Los logaritmos pueden tener cualquier base que sea positiva y diferente de 1, sin embargo, es común emplear dos bases, una es la base decimal y la otra es la base neperiana. Las calculadoras científicas modernas, traen incorporadas en sus funciones ambos tipos de logaritmos, lo que simplifica mucho las operaciones.

El logaritmo con base 10, se le conoce como logaritmo común o logaritmo decimal y se denota omitiendo las bases:

$$\log_{10} x = \log x$$

Cuando un logaritmo no tiene base, se supone inmediatamente que es un logaritmo común o decimal. La otra clase de logaritmo, que aparece con gran recurrencia en las situaciones reales, es el logaritmo de base e , conocido como logaritmo natural y se denota por \ln .

$$\log_e x = \ln x$$

Las calculadoras científicas por lo general traen la operación logaritmo natural como segunda función de la tecla logaritmo decimal.

Ejemplo 2.31. Una muestra de 10 miligramos de polonio radiactivo decrece de acuerdo con el siguiente modelo matemático:

$$Q(t) = Q_0 e^{-0,00502t}$$

Donde $Q(t)$ es la cantidad de masa presente después de t días, Q_0 es la masa inicial de la muestra y t el tiempo transcurrido. Dada una muestra de 10 mg, determine la cantidad presente de dicho material 120 días después.

Solución: Para determinar la cantidad presente de material en un instante de tiempo cualquiera, es suficiente reemplazar las cantidades en la ecuación dada

$$Q(120) = 10e^{-0,00502 \times 120} = 5,47 \text{ mg}$$

Por tanto, al cabo de 120 días, el material ha liberado 4,53 mg

Ejemplo 2.32. La vida media de cualquier sustancia se define como el tiempo necesario para que una muestra de material se desintegre hasta llegar a la mitad de la cantidad inicial. Dada la ecuación del problema anterior, determine la vida media del polonio.

Solución: El problema plantea claramente que se debe buscar el momento de tiempo para el cual $Q(t) = \frac{Q_0}{2}$ reemplazando en la ecuación se tiene entonces que:

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-0,00502t}$$

Sección 2.5: Funciones logarítmicas y exponenciales



Resolver el siguiente problema

La cantidad (en mg) de isótopo de carbono-14 en una muestra orgánica que se descompone en el tiempo está dado por $C(t) = C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$ donde t es el tiempo en años y C_0 es la cantidad inicial de este isótopo. (a). Determine la cantidad de material presente después de 1200 años de una muestra que contenía inicialmente 10mg de C-14. (b). Determine el tiempo transcurrido de una muestra que inicialmente tenía 12mg de C-14 y actualmente tiene 7 mg.

SOLUCIÓN



Simplificando se llega a:

$$\frac{1}{2} = e^{-0,00502t}$$

Aplicando logaritmo natural a ambos lados de la última expresión y usando la propiedad 8 y 10 se obtiene:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{-0,00502t}) \rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0,00502t \ln(e^1)$$

Con lo cual se puede despejar a t ,

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0,00502} = 138,1 \text{ días}$$

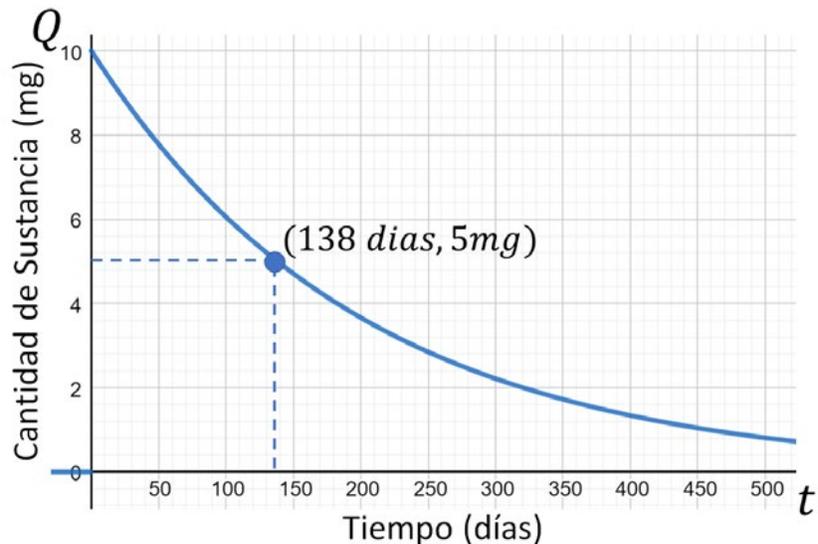


Figura 2.51. Desintegración de una sustancia para el problema 2.29

La vida media del polonio radiactivo es de 138,1 días, tal como se muestra en la figura.

El problema anterior contiene una ecuación de tipo exponencial, la cual se resolvió usando las propiedades de los exponentes y logaritmos, sin embargo, es conveniente tener presente algunas reglas que pueden simplificar las operaciones.

Estrategia para resolver una ecuación con logaritmos o exponentes.

1. Identificar muy bien la variable de interés.
2. Reducir el número de variables empleando algún método algebraico.
3. Simplificar toda la expresión, reduciéndola al máximo posible, usando las propiedades de los logaritmos y de los exponentes.
4. Resolver la ecuación, despejando la variable de interés. Posiblemente se deba usar algunas de las propiedades.
5. Probar cada una de las soluciones en la ecuación original para analizar si son consistentes.

Sección 2.5: Funciones logarítmicas y exponenciales

Ejemplo 2.33. Resolver la ecuación:

$$\log_2 x = 5 - \log_2(2x + 5)$$

Solución: aquí la variable de interés es $-x$, se pasan entonces las variables a un lado de la ecuación y las demás cantidades quedan al otro lado:

$$\log_2 x + \log_2(2x + 5) = 5$$

Aplicando la propiedad 1 se obtiene:

$$\log_2(x(2x + 5)) = 5$$

Lo que puede reducirse con la propiedad 9.

$$2^{\log_2(x(2x+5))} = 2^5$$

Simplificando se llega

$$2x^2 + 5x - 32 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, se tienen dos respuestas:

$$x \approx 3 \text{ y } x \approx -5,5$$

La solución al problema es $x=3$, la segunda respuesta NO es solución ¿por qué?



Resolver la siguiente ecuación

$$\log_2 x + \log_2(x + 8) = 7$$

SOLUCIÓN



Sección 2.5: Funciones logarítmicas y exponenciales

Ejercicios Sección 2.5. Funciones logarítmicas y exponenciales

Trace en un mismo plano, las siguientes gráficas; analice el comportamiento de cada una y saque sus propias conclusiones

1.
$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{2x} \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = 3^x \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} y = e^x \\ y = 2e^x \\ y = \frac{1}{2}e^x \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} y = e^{2x} \\ y = -e^{2x} \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{x+1} \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} y = e^{3x} \\ y = e^{-3x} \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} y = e^{2x} \\ y = -e^{2x} \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} y = \log x \\ y = \log 2x \\ y = \log 3x \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} y = 2 \log x \\ y = -2 \log x \\ y = 0.5 \log x \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} y = \log(x+1) \\ y = \log x \\ y = \log(x-1) \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} y = \log_2 x \\ y = \log_3 x \\ y = \log_4 x \end{cases} \quad \begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y = \operatorname{sen}(-x) \end{cases}$$

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales.

12. $2^{x+1} = 10$

13. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} = 4$

14. $3^{2x+3} = 3^{-x-3}$

15. $7 + 3(4^{x+1}) = 12$

16. $3^{x+4} = 6^x$

17. $e^{x+1} = 2^{-3x+4}$

18. $4^{2x} = 5^{3x}$

19. $\left(\frac{1}{2}\right)^{6x+1} = e$

20. $2^{x^2-4} = 2^{3x}$

21. $\frac{1}{2} = 3^{x^2-1}$

22. $e^{3x}e^{5x} = e^{14}$

23. $\frac{1}{e^{2x}} = 6e^{3x}$

24. $8^x = \left(\frac{1}{32}\right)^{x-2}$

25. $2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$

26. $3^{5x-4} = 3^{11}$

27. $2^x + 4^x = 72$

28. $3^x + 9^x = 90$

29. $2^{-x} \sqrt{25^{\frac{2x+1}{2}}} = \frac{1}{5}$

30. $\sqrt[3]{(-8)^{3x-2}} = -(2)^x$

31. $3^{2x-1} - 3^x = 18$

Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas

32. $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = x$

33. $\ln \frac{1}{e^5} = x$

34. $2 \log x - \log(x+6) = 0$

35. $\log(4x-1) - \log(x-2) = \log 5$

36. $\log x^2 - \log x = 2$

37. $\log x^2 - \log x = 3$

38. $\log(2x+1) = \log(x-6)$

39. $\log_2(x+1) = 2$

40. $\log_3(12-3x) = 3$

41. $\ln(x+1) = 2$

42. $\log x - \log(x+1) = \log 4$

43. $\log_2(x) + \log_2 2 = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)$

44. $\ln(-x) = \ln(x^2-6)$

45. $\ln(4-x) + \ln 3 = 2 \ln x$

46. $\log_2(x+1) - \log_2(2x-3) = 1$

47. $\log_7 x = \frac{3}{2} \log_7 64$

48. $\log(3x-1) + \log 4 = \log(9x+2)$

49. $\log_4 x = \log_2(x-1)$

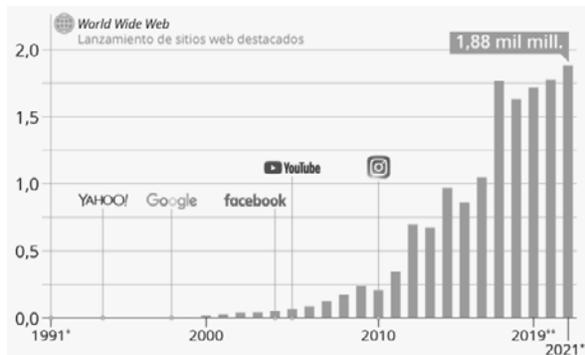
50. $\log_2 x^2 = \log_3 x$

Sección 2.5: Funciones logarítmicas y exponenciales

51. **GPS.** Una empresa de rastreo satelital ha estimado qué número de vehículos seguidos a través de los sistemas GPS (sistema de posicionamiento global) crece en razón a la siguiente expresión matemática:
- $$N(t) = 0.72e^{0.25t} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 10$$
- Donde $N(t)$ es el número total de rastreadores instalados, expresados en miles de unidades y t es el tiempo medido en años siendo el año inicial 2020. Para lo anterior:
- Trace una gráfica de N en función de t .
 - Cuántos rastreadores instalará la empresa en el año 2020
 - Cuántos rastreadores instalar a la empresa en el año 2023
 - Cuántos rastreadores instalara la empresa en junio del 2024
 - Para que momento la empresa estima que podrá instalar 5800 rastreadores.
52. **Curva de aprendizaje:** La productividad de un operario se puede aproximar a una función exponencial que relaciona su capacitación y el tiempo que lleva haciendo la labor. Entre más tiempo se entrene, mayor será su capacidad para producir, pero esta crecerá hasta cierto valor y luego se estabiliza, debido a limitaciones humanas, técnicas y de maquinaria –entre otras–. El departamento de recursos humanos de una empresa que ensambla computadores logra determinar que un operario después de realizar su entrenamiento está en capacidad de ensamblar CPU a un ritmo diario dado por la expresión matemática
- $$N(t) = 50 - 20e^{-0.2t} \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 26$$
- Donde N es la cantidad CPU ensambladas diariamente y t el tiempo en semanas.
- Obtenga la representación gráfica de la cantidad de CPU ensambladas por unidad de tiempo.
 - Determine cuantas CPU arma el operario en su primer día de trabajo
 - Determine cuantas CPU arma por día el operario a las 5 semanas de trabajo.
 - Cuánto tiempo de experiencia necesita el operario para ensamblar 30 CPU por día.
 - La empresa determina que el operario pasa el periodo de prueba si después de 3 meses (12 semanas) es capaz de ensamblar como mínimo 45 CPU. Dada esta condición, determine si el operario pasa o no el periodo de prueba.
53. **Ciencias forenses:** Las ciencias forenses usa la ley de enfriamiento de Newton para determinar el momento de muerte de una persona adulta, a partir de las temperaturas de los cuerpos.
- $$T = T_0 + (36.5 - T_0)(0.95)^t$$
- Donde T_0 es la temperatura del ambiente y t el tiempo transcurrido entre el momento de la muerte y el momento en que se toma la temperatura al cuerpo.
- Si una persona muere, calcule la temperatura del cuerpo pasadas 6 horas si la habitación tiene una temperatura de 22°C.
 - En la escena de un crimen, la viuda le dice al CTI que se despidió de su esposo y salió a las 7:00 am, pero cuando volvió a las 6:00 pm su esposo ya estaba muerto. Determine si la viuda dice la verdad o miente si la temperatura del cuerpo a las 6:00pm era de 27.26°C y la habitación tenía una temperatura de 20°C.
54. **Portales WEB.** En el año 1991, no existía ni un solo portal WEB accesible sin embargo esta

Sección 2.5: Funciones logarítmicas y exponenciales

situación cambio el 6 de agosto con el lanzamiento del **World Wide Web** por parte del físico inglés Tim Berners-Lee y desde entonces su número ha crecido exponencialmente. La figura muestra este crecimiento y los momentos en los cuales aparecen algunas de los portales más reconocidos



Fuente: Internet Live Stats

El modelo matemático que predice este comportamiento corresponde con la expresión:

$$N(t) = 0,0028e^{0,2155t}$$

Donde N represente el número de portales WEB en miles de millones y t el tiempo iniciando en 1991 como año cero.

- Estime la cantidad de páginas WEB en 2020
 - Estime el número de páginas WEB en 2021.
 - Estime el número de páginas WEB en 2025
 - En qué momento se alcanzarán los 3000 millones de páginas WEB en el mundo.
55. **Curva logística.** En la UCP de Pereira hay 3000 estudiantes en todos sus programas académicos de pregrado y posgrado, y en cierto momento llega a la Universidad un virus de gripa común pero altamente contagioso, cuya tasa de transferencia se puede aproximar

al modelo matemático denominado curva logística.

$$N(t) = \frac{3000}{1 + 1499e^{-0.1t}}$$

Donde N representa la cantidad de alumnos contagiados y t el tiempo en días después de iniciado el primer contagio. Para esto determine:

- La cantidad inicial de personas contagiadas.
- La cantidad de estudiantes contagiados al cabo de 50 días.
- Si las clases inician el primero de febrero y la universidad toma la decisión de suspenderlas cuando se llegue al 50% de contagios, en qué momento deberá hacerlo.

56. **Publicidad:** El departamento de mercadeo de una importante empresa de tecnología, estima que t semanas después de terminada una campaña publicitaria, las ventas pueden aproximarse a la siguiente expresión matemática:

$$V(t) = 1000 + Be^{-kt} \text{ con } 0 \leq t \leq 6$$

- Encuentre el valor de la constante B y k sabiendo que las ventas al final de la primera y tercera semana son 1600 y 1200 respectivamente.
- Determine la cantidad de ventas al final de la cuarta semana.

57. **Crecimiento logístico:** Dada la función de crecimiento logístico:

$$Q(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Donde la población es Q_1 cuando $t = t_1$ y Q_2 cuando $t = t_2$, demuestre ampliamente que el valor de la constante k está dado por la expresión matemática

$$k = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \left[\frac{Q_2(A - Q_1)}{Q_1(A - Q_2)} \right]$$

SECCIÓN

2.6

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

En la sección anterior se revisó el concepto de interés compuesto como una aplicación de las funciones y ecuaciones logarítmicas y exponenciales, sin embargo, este es un tema cuyas aplicaciones son muy importantes para sectores relacionados con la economía, las finanzas, la contabilidad; de una manera u otra, de forma directa o indirecta nos vemos afectados o beneficiados por los intereses causados por el uso del capital. En esta sección se hablará con un poco de más detalle de conceptos como los capitales, las anualidades y las amortizaciones, pero para ello es importante primero establecer algunas definiciones que se trabajarán a lo largo de la presente sección.

El **interés (r)** es el costo o beneficio que se obtiene por prestar un dinero a una cierta cantidad de tiempo. Típicamente se usa un índice en escala porcentual conocida como **tasa de interés (%)** que establece la expectativa de quien presta el capital para que este sea devuelto con un beneficio adicional. En este libro el dinero o capital inicial prestado se identificará con la letra P o VP , y el valor devuelto que incluye el capital prestado y los intereses generados, que en conjunto se denomina **valor acumulado**, VF .

El **capital inicial** prestado (P) otros autores lo denominan valor presente (VP) y el valor **acumulado** lo llaman valor futuro (VF)

Interés Simple

El interés simple (I) es la aplicación de las funciones lineales útiles para determinar los valores futuros de los capitales prestados; el cálculo del interés se hace exclusivamente sobre el capital inicial, independientemente del instante de tiempo donde se capitalicen¹ de forma proporcional al tiempo según la expresión:

$$I = P \cdot r \cdot t \quad [\text{Ec. 2.20}]$$

El valor I es la cantidad de dinero adicional que se recibe o se debe pagar – según sea el caso – por la utilización en el tiempo de ese capital. Por tanto, el valor total a pagar, puede calcularse como se define en el teorema siguiente:

Teorema 2.10. Cálculo del valor acumulado para el interés simple: sea P un capital puesto a una tasa de interés simple anual r , durante t años. El valor acumulado o valor futuro es:

$$A = P(1 + rt) \quad [\text{Ec. 2.21}]$$

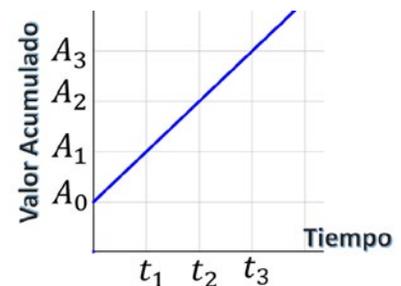


Figura 2.52. Representación gráfica para interés simple

¹ La capitalización se refiere al momento en el cual se recibe o se paga un capital más los intereses que este generó.

Sección 2.6: Matemáticas financieras

El teorema anterior supone una tasa de interés r , en años y un plazo también en años, sin embargo, también es posible hablar de plazos más largos y cortos, por ejemplo, intereses causados semestralmente, trimestral, mensual, semanal y diario. El siguiente ejercicio ilustra un problema de un préstamo a tasas de interés en diferentes lapsos de tiempos.



USD es el símbolo ISO para dólares americanos.

En algunos problemas se usará esta moneda en vez del peso colombiano **COP**, para obviar la necesidad de usar tantos ceros.



Ejemplo 2.34. Interés Simple. Un estudiante ahorrador decide poner un capital de USD 1.000 en una entidad financiera que le brinda un interés simple de 5% anual. Si el estudiante no retira ese capital durante cuatro años, cuánto dinero recibe en total.

Solución: el interés que recibe al final de cada periodo es de un 5%, por tanto:

$$I = 1.000 * \frac{5}{100} = \text{USD } 50$$

Tabla 2.7. Crecimiento de un capital a interés simple.

Año	Capital	Intereses
0	1.000	50
1	1.000	50
2	1.000	50
3	1.000	50
4	1.000	0
Total		200

Que corresponde a un valor acumulado de $A = 1.000 + 200 = \text{USD } 1.200$. Esto quiere decir que el banco le reconocerá al estudiante USD 200 más por permitirle utilizar su dinero. Este reconocimiento se le conoce con el nombre de **rendimiento financiero**.

Usando la expresión del teorema anterior se obtiene

$$A = 1.000(1 + 0.05 \times 4) = \text{USD } 1.200$$

Nótese que en la fórmula se usa 0.05, que corresponde al 5% eliminando el porcentaje que se hace dividiendo entre 100, el valor.

Este estudiante recibirá 1.200 dólares al finalizar el cuarto año de su inversión.

Interés compuesto

El interés compuesto, es la figura financiera que más se aplica en el comercio cuando se manejan capitales o recursos. A diferencia del interés simple, el interés compuesto agrega al capital el interés generado al cabo de cada periodo, sobre este nuevo valor acumulado se genera un nuevo interés que de nuevo se va sumando al capital. Para esto, considérese el ejemplo anterior.

Sección 2.6: Matemáticas financieras

Ejemplo 2.35. Interés Compuesto: Un estudiante ahorrador decide poner un capital de USD 1.000 en una entidad financiera que le brinda un interés compuesto de 5% anual. Si el estudiante no retira ese capital ni los intereses durante cuatro años, cuánto dinero recibe en total al finalizar el cuarto año.

Solución: Recordando que los intereses se suman al capital en cada periodo, se tiene entonces que, al finalizar cada periodo de tiempo, los intereses generados el capital actual son:

Primer año

$$\begin{aligned} \text{Intereses generados:} & I_1 = 1.000 \times 0,05 = \text{USD } 50 \\ \text{El valor acumulado} & A_1 = 1.000 + 50 = \text{USD } 1.050 \end{aligned}$$

Segundo

$$\begin{aligned} \text{Intereses generados:} & I_2 = 1.050 \times 0,05 = \text{USD } 52,5 \\ \text{El valor acumulado} & A_2 = 1.050 + 52,5 = \text{USD } 1.102,5 \end{aligned}$$

Tercer año

$$\begin{aligned} \text{Intereses generados:} & I_3 = 1.102,5 \times 0,05 = \text{USD } 55,125 \\ \text{El valor acumulado} & A_3 = 1.102,5 + 55,125 = \text{USD } 1.157,625 \end{aligned}$$

Cuarto año

$$\begin{aligned} \text{Intereses generados:} & I_4 = 1.157,625 \times 0,05 = \text{USD } 57,88125 \\ \text{El valor acumulado} & A_4 = 1.157,625 + 57,88125 = \text{USD } 1.215,5062 \end{aligned}$$

Resumiendo, se tiene:

Tabla 2.8. Crecimiento de un capital a Interés compuesto.

Año	Capital	Intereses
0	\$1.000	\$50
1	\$1.050	\$52,5
2	\$1.102,5	\$55,125
3	\$1.157,625	\$57,88125
4	\$1.215,50625	
Total		\$215.50325

Nótese que el estudiante al finalizar el cuarto año recibe USD 1.215,5, más dinero en comparación a si lo hubiera invertido en un banco que le da interés simple. El rendimiento financiero del banco que ofrece tasas con interés compuesto es de 215,5 dólares.

Se pensaría que no hay diferencia significativa entre aplicar interés simple e interés compuesto, sin embargo, la realidad es que la diferencia se vuelve muy significativa cuando los plazos son cada vez más grandes, tal como se ilustra en los problemas que vienen a continuación.

Sección 2.6: Matemáticas financieras



Asúmase que se tiene un capital de \$5.000.000 el cual tiene la posibilidad de ser colocado en un CDT que da un interés del 4% anual compuesto mensual o en una cuenta de ahorros que rinde con un interés del 1% anual compuesto mensual. Determine el valor futuro o de retorno de ese capital al cabo de 5 años y compare el mismo si esa cantidad la hubiese prestado un banco con una tasa de interés del 10% anual compuesto mensual.

SOLUCIÓN



Teorema 2.11. Cálculo del valor acumulado para el interés compuesto: sea P un capital puesto a una tasa de interés compuesto i , durante t años. El valor acumulado A o valor futuro es:

$$A = P(1 + i)^n \quad [\text{Ec. 2.22}]$$

Con $i = \frac{r}{m}$; $n = mt$ y donde

- $r \rightarrow$ Tasa nominal anual de interés
- $m \rightarrow$ Número de periodos de conversión anual
- $t \rightarrow$ Plazo (medido en años)
- $n \rightarrow$ Número total de veces que se hace efectivo el interés

Ejemplo 2.36. Interés Compuesto: Resuelva el problema anterior, pero considerando ahora que el interés es compuesto.

Solución: aplicando la expresión del teorema 2.11., se tiene:

$$A = 1.000(1 + 0.05)^4 = 1000(1.21550625) = \text{USD } 1.215,50625$$

El problema asume que el interés estaba compuesto anualmente, sin embargo, en la práctica las entidades financieras hacen efectivo los intereses, más veces al año, por ejemplo, mensualmente; el intervalo de tiempo entre los cálculos de intereses sucesivos se llama **periodo de conversión**.

Ejemplo 2.37. Determinar el valor futuro de un préstamo de USD 4.000 si este se pacta con un interés compuesto del 12% anual durante 3 años, compuesto: (a). anual. (b). semestral. (c). trimestral. (d) mensual. (e) quincenal. (f) semanal. (g) diario. (h). por hora. (i). por minuto. (j). por segundo

Solución: para el problema, $P = 4.000$; $t=2$, $i=12\%=0,12$, lo que cambia en el problema es la forma en la cual se hace efectivo el interés;

a. Anual $m = 1$. Solo se cobra el interés una vez cada año

$$A = 4000 \left(1 + \frac{0,12}{1}\right)^{1 \times 2} = \text{USD } 5017,6$$

b. Semestral $m=2$. Cada seis meses se cobra el interés, por tanto, en un año se cobra dos veces.

$$A = 4000 \left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{2 \times 2} = \text{USD } 5049,90784$$

c. Trimestral $m=4$. Se cobran los intereses cada tres meses y como en un año hay cuatro trimestres, entonces

$$A = 4000 \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{4 \times 2} = \text{USD } 5067,080326$$

Sección 2.6: Matemáticas financieras

- d. Mensual $m=12$. Se cobra mensualmente el interés y ya que en un año hay 12 meses, entonces:

$$A = 4000 \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12 \times 2} = \text{USD } 5078,938594$$

- e. Quincenal $m=24$. Se cobran cada quincena el interés y ya que en un año hay 24 quincenas, entonces:

$$A = 4000 \left(1 + \frac{0,12}{24}\right)^{24 \times 2} = \text{USD } 5081,956644$$

- f. Semanal $m=52$. Un año tiene aproximadamente 52 semanas y al final de cada una se hace efectivo el interés, entonces:

$$A = 4000 \left(1 + \frac{0,12}{52}\right)^{52 \times 2} = \text{USD } 5083,590805$$

- g. Diario $m=365$. Un año normal tiene 365 días y al final de cada día se cobra el interés:

$$A = 4000 \left(1 + \frac{0,12}{365}\right)^{365 \times 2} = \text{USD } 5084,796036$$

- h. Hora $m=8,760$:

$$A = 4.000 \left(1 + \frac{0,12}{8760}\right)^{8760 \times 2} = \text{USD } 5084,988242$$

- i. Minuto $m=525,600$:

$$A = 4000 \left(1 + \frac{0,12}{525,600}\right)^{525600 \times 2} = \text{USD } 5084,988242$$

- j. Segundo $m=31.536,000$:

$$A = 4000 \left(1 + \frac{0,12}{31536000}\right)^{31536000 \times 2} = \text{USD } 5084,9966$$

Como se puede notar, cada vez que el interés se compone en periodos más pequeños, el monto total acumulado crece, sin embargo, tiende a estabilizarse y ese es el principio del interés compuesto continuo.

Interés compuesto continuo.

Como se ilustró en el problema anterior, cuando aumenta la frecuencia con la cual se capitalizan los intereses, el valor acumulado tiende a crecer, ahora, si esta capitalización se hace en cada instante de tiempo, es decir, se hace de forma continua, el valor final acumulado, sigue una expresión exponencial, para ello considérese la siguiente representación gráfica de los resultados del problema anterior:

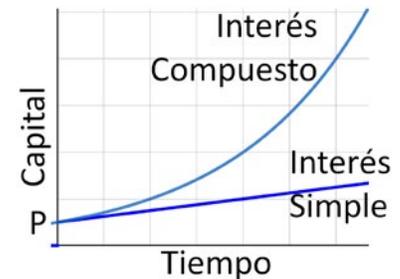


Figura 2.53. Comportamiento del capital dado un interés simple y un interés compuesto.

Al principio de un crédito –por ejemplo-, el valor futuro del capital o de los intereses en ambos sistemas es muy similar, sin embargo, a medida que el plazo crece, se nota la diferencia entre un sistema de interés simple que aumenta linealmente y un sistema de interés compuesto que crece exponencialmente

Sección 2.6: Matemáticas financieras

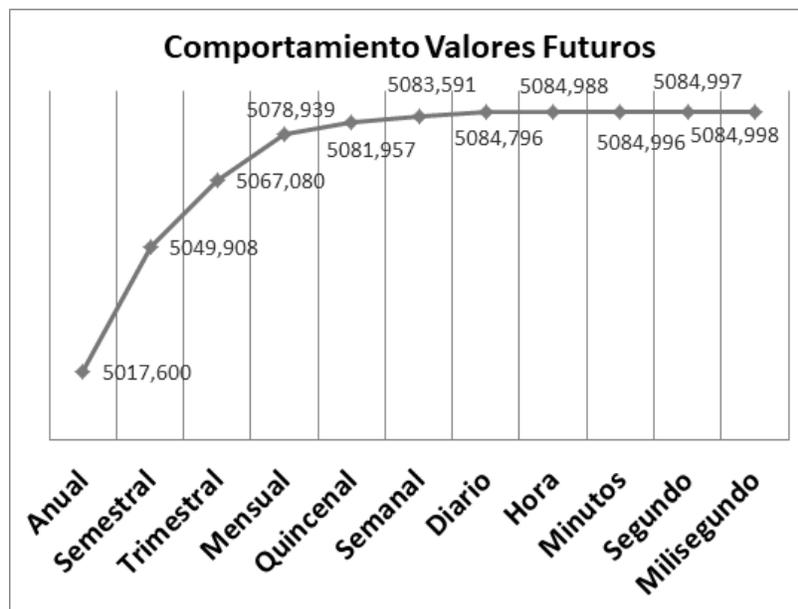


Figura 2.54. Comportamiento de los montos acumulados o valores futuros para diferentes composiciones de un capital en el problema 2.34.

Nótese que entre más pequeño sea el tiempo de capitalización de intereses, es decir entre más alta la frecuencia de ejecución de los intereses, el valor acumulado o valor futuro tiende a estabilizarse siendo, para el problema ilustrado, ese valor es aproximadamente USD 5.084.998. Este análisis llevó a construir una expresión para calcular el valor futuro de préstamos o inversiones capitalizadas con interés continuo.

Teorema 2.12. Interés compuesto continuo. Un capital P , puesto a un interés r compuesto continuo, durante un periodo de tiempo t , generará un valor acumulado A representado por la expresión:

$$A = P \cdot e^{rt} \quad [\text{Ec.2.23}]$$

Ejemplo 2.38: Determinar el valor futuro de un préstamo de USD 4000 si este se pacta con un interés compuesto continuo del 12% anual durante 3 años.

Solución: aplicando la fórmula se tiene:

$$A = 4000 \cdot e^{0,12 \times 3} = \text{USD } 5084,9966$$

Que es muy similar a los valores ilustrados en la gráfica 2.54.

Tasa de interés efectiva

Los ejercicios anteriores sobre el cálculo de los valores acumulados de una inversión o un préstamo a interés compuesto ilustran muy bien que esta

Sección 2.6: Matemáticas financieras

depende de la frecuencia con que se suman el interés, por tanto, la tasa de interés indicada o *tasa nominal* especificada, por sí sola, no refleja la tasa real con la cual se gana el interés.

Para ejemplificar mejor esto, considérense tres bancos que generan intereses compuestos, el primero ofrece un rendimiento del 12% anual, el segundo ofrece un rendimiento del 6% semestral y el tercero ofrece un rendimiento del 1% mensual; a simple vista se podría considerar que una inversión de USD 1.000 a dos años, produciría el mismo rendimiento en cualquier banco, sin embargo, esto no es así y la tabla siguiente lo prueba.

Tabla 2.9. Crecimiento de un capital a Interés compuesto.

Banco 1	12% anual	$1000(1 + 0,12)^{1*2}$	USD 1254,40
Banco 2	6% semestral	$1000(1 + 0,06)^{2*2}$	USD 1262,48
Banco 3	1% mensual	$1000(1 + 0,01)^{12*2}$	USD 1269,73

Entonces entre una inversión que da el 12% cada año y otra que da el 6% cada semestre, es indudablemente mejor la segunda opción. Con este escenario se necesita encontrar una base común para poder comparar diferentes tasas nominales de interés y es lo que se denomina *tasa efectiva*.

Definición 2.16. *La tasa efectiva.* Es la tasa de interés simple que produciría el mismo valor acumulado en un año que la tasa nominal compuesta m veces al año.

En otras palabras, la base de comparación consiste en encontrar la tasa de interés simple de la tasa compuesta que ocasionaría el mismo valor futuro.

Teorema 2.13. *Tasa de interés efectiva:* sea r la tasa de interés nominal anual, la tasa de interés efectiva anual r_{ef} será:

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 \quad [\text{Ec. 2.24}]$$

Donde r es la tasa nominal anual y m es el número de conversión al año el año.

Conociendo las tasas de interés efectivas de varias propuestas financieras, es posible decidir cuál representa un beneficio mayor.

Ejemplo 2.39. Calcule las tasas nominales del problema anterior.

Solución: aplicando la expresión del teorema anterior se tiene:

a. Compuesto anual: $m=1$

Sección 2.6: Matemáticas financieras

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0,12}{1}\right)^1 - 1 = 0,12 \rightarrow 12\%$$

b. *Compuesto semestral: m=2*

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^2 - 1 = 0,1236 \rightarrow 12,36\%$$

c. *Compuesto trimestral: m=4*

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^4 - 1 = 0,1255 \rightarrow 12,55\%$$

d. *Compuesto mensual: m=12*

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} - 1 = 0,1268 \rightarrow 12,68\%$$

e. *Compuesto quincenal: m=24*

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0,12}{24}\right)^{24} - 1 = 0,1272 \rightarrow 12,72\%$$

e. *Compuesto semanal: m=52*

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0,12}{52}\right)^{52} - 1 = 0,1273 \rightarrow 12,73\%$$

f. *Compuesto diario: m=365*

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0,12}{365}\right)^{365} - 1 = 0,1275 \rightarrow 12,74\%$$

g. *Compuesto por hora: m=8760*

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0,12}{8760}\right)^{8760} - 1 = 0,1236 \rightarrow 12,75\%$$

Si usamos estos valores, para calcular el valor futuro de la inversión si fuera a interés simple, se obtendría la tabla que se anexa a continuación.

Tabla 2.10. Crecimiento de un capital con tasas de interés efectiva.

Capital	Tasa nominal	Periodicidad	Tasa efectiva anual	Valor Acumulado	
USD 4000	12,00%	Anual	12,000%	$A = 4000(1 + 0,1200)^2$	= USD 5017,600
USD 4000	12,00%	Semestral	12,360%	$A = 4000(1 + 0,1236)^2$	= USD 5049,908
USD 4000	12,00%	Trimestral	12,551%	$A = 4000(1 + 0,12551)^2$	= USD 5067,080
USD 4000	12,00%	Mensual	12,683%	$A = 4000(1 + 0,12683)^2$	= USD 5078,939
USD 4000	12,00%	Quincenal	12,716%	$A = 4000(1 + 0,12716)^2$	= USD 5081,957
USD 4000	12,00%	Semanal	12,734%	$A = 4000(1 + 0,12734)^2$	= USD 5083,591
USD 4000	12,00%	Diario	12,747%	$A = 4000(1 + 0,12747)^2$	= USD 5084,796

Nótese que el valor acumulado es exactamente igual a lo dado en problemas anteriores.

Sección 2.6: Matemáticas financieras

Conversión entre tasas de interés efectiva

Como se ha visto, las tasas de interés nominal corresponden a la tasa de interés sin capitalización, es decir retirando del capital el interés ganado y son útiles para al cálculo de capitales en cualquier instante de tiempo, las tasas efectivas por su parte son las tasas reales de interés que recibe en un instante determinado, dadas después de la capitalización y son útiles al momento de hacer comparaciones, pero se debe prestar especial atención al momento de convertirlas de un periodo a otro.

Una tasa nominal del 12% anual corresponde a una tasa nominal del 6% semestral o 1% nominal mensual, sin embargo, cuando son tasas efectivas esto ya no se cumple debido precisamente a las capitalizaciones. Por ello, es útil una expresión que permita encontrar tasas efectivas equivalentes para diferentes periodos de tiempo.

Teorema 2.14. Conversión de interés efectivo anual a interés periódico: Sea r_{ef} la tasa de interés efectiva anual, la tasa de interés efectivo periódico es:

$$r_p = (1 + r_{ef})^{\frac{1}{m}} - 1 \quad [\text{Ec. 2.25}]$$

Donde m es el número de periodos calculados en el año.

Ejemplo 2.40. Una entidad financiera ofrece préstamos a una tasa de interés efectiva del 36% anual en sus tarjetas de crédito. Determinar el interés efectivo semestral, trimestral, mensual y diario.

Solución: aplicando la expresión del teorema anterior se tiene:

a. Para el interés efectivo semestral, se tiene que $m = 2$

$$r_p = (1 + 0,36)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 16,62\%$$

b. Para el interés periódico efectivo trimestral, se tiene que $m=4$

$$r_p = (1 + 0,36)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 7,99\%$$

c. Para el interés periódico efectivo mensual, se tiene que $m=12$

$$r_p = (1 + 0,36)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 2,59\%$$

Nótese de nuevo que, a diferencia de las tasas nominales, donde se puede hacer la equivalencia entre diferentes periodos de tiempo multiplicando o dividiendo por el factor correspondiente, esto ya no es correcto en las tasas efectivas.

Sección 2.6: Matemáticas financieras

Anualidades

La anualidad es otra figura financiera, ampliamente aplicada en el mercado y las economías; en términos generales una anualidad representa una serie de pagos que se hacen a intervalos de tiempos regulares –aunque es posible tener anualidades con términos variables– denominados *términos*; son ejemplo de anualidades los pagos hechos a préstamos ordinarios, a préstamos de hipotecas, ahorros programados entre otros. Existen diversos tipos de anualidades, dependiendo del momento donde se hacen los pagos, los momentos en los que se capitalizan intereses y los intervalos de tiempo, sin embargo, para los intereses de la presente unidad, se estudian únicamente las anualidades que cumplen con las siguientes características:

1. Todos los términos son iguales, es decir, se hacen los pagos en los mismos intervalos de tiempo.
2. Todos los pagos son del mismo valor, esto implica que la cuota no cambia en el tiempo que dure la anualidad.
3. Los pagos se hacen siempre al final de cada término.
4. En el momento del pago, se capitalizan los intereses.

Dadas estas condiciones, que son típicas en los portafolios de servicios de las entidades financieras, considérese por ejemplo una persona que quiere hacer un viaje a la costa, y se propone ahorrar \$200.000 cada mes durante seis meses, arrancando el 1° de enero y terminando el 31 de julio, sabiendo que una entidad financiera le ofrece un interés del 12% anual compuesto mensual, la siguiente gráfica ilustra la forma como se hacen los pagos y los rendimientos que estos tienen.

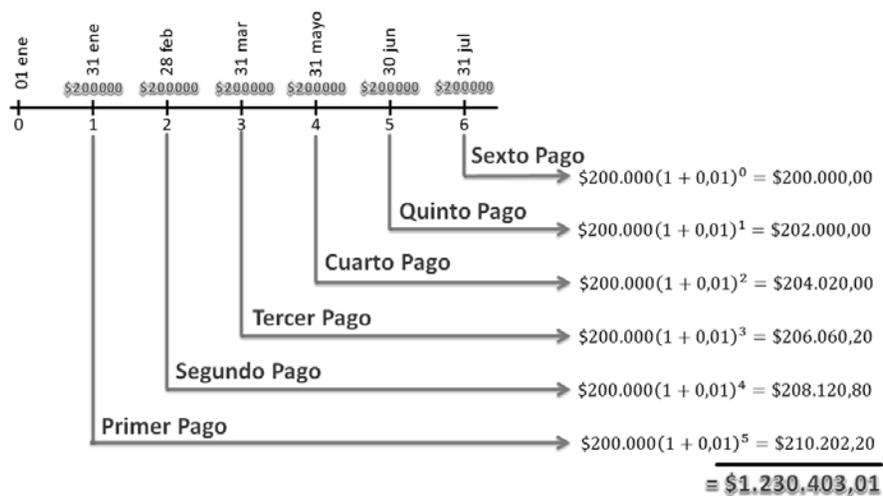


Figura 2.55. Representación gráfica de las anualidades

Nótese varias cosas para iniciar, como primero esta anualidad tiene seis términos, cada uno dura un mes –independientemente que los meses tengan diferente cantidad de días–, segundo, el proyecto de esta persona inicia el 01 de enero, pero da la primera cuota al final del primer término, que es en enero 31; tercero, al final de cada término, la persona da siempre la misma cantidad de dinero, \$200,000. Tercero, el interés es de 12% anual

Sección 2.6: Matemáticas financieras

compuesto mensual, por tanto, mensualmente el interés que se genera es del 1%.

En esta anualidad, la primera cuota se da el 31 de enero y la entidad financiera puede disponer de este dinero durante cinco meses, por lo que debe responder por intereses durante estos cinco meses.

$$\$200.000(1 + 0.01)^5 = \$210.202,20$$

La segunda cuota se da el 28 de febrero y la entidad financiera tiene a su disposición este dinero durante cuatro meses, tiempo por el cual debe responder a la persona con intereses

$$\$200.000(1 + 0,01)^4 = \$208.120,80$$

Así sucesivamente con cada una de las cuotas. La última cuota se da el 31 de julio, fecha en la cual se retira todo el capital ahorrado más los intereses generados, esta última cuota no genera intereses ya que la entidad financiera no pudo disponer de esta última. Sumando cada una de las cuotas y los intereses generados, al final la persona puede disponer de 1.230.403,01 para su viaje.

Teorema 2.15. Valor Futuro acumulado de una anualidad.

El valor futuro acumulado (VF) de una anualidad de n pagos todos iguales, de un valor C cada uno, pagados al final de cada término de inversión a una tasa de interés i , está dado por:

$$VF = C \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] \quad [\text{Ec. 2.26}]$$

Ejemplo 2.41. *Un padre de familia quiere hacer un ahorro programado para los estudios superiores de su hija, entonces decide ahorrar mensualmente una cuota fija de \$300.000 depositándolos en un banco que ofrece un rendimiento del 6% anual compuesto mensual. Si el padre tiene pensado retirar estos fondos cuando la niña cumpla 16 años, ¿cuánto dinero le deberá devolver el banco?*

Solución: *aplicando el teorema anterior, se tiene que el valor futuro acumulado para esta anualidad es:*

$$VF = \$300.000,00 \left[\frac{(1 + 0,005)^{12 \times 16} - 1}{0,005} \right] = \$96.327.401$$

Esta suma podría parecer grande, sin embargo, el lector debe recordar que el dinero pierde valor por efecto de la inflación y otros factores, entonces 96 millones en 16 años no tiene el mismo valor o poder adquisitivo del que tendría ahora.

Sección 2.6: Matemáticas financieras

Amortización de préstamos



Una **hipoteca** es un derecho que adquiere un prestamista o una entidad financiera para el cumplimiento de una deuda. Las hipotecas se constituyen normalmente sobre un inmueble y le permite al acreedor venderla o rematarla para garantizar la devolución de los dineros.

Mes	Deuda	Intereses Pagados	Abono a Capital
0	\$50.000.000		
1	\$49.867.866	\$375.000	\$132.133
2	\$49.734.742	\$374.009	\$133.124
3	\$49.600.619	\$373.010	\$134.122
4	\$49.465.491	\$372.004	\$135.128
5	\$49.329.348	\$370.991	\$136.142
↓ ↓ ↓ ↓			
175	\$2.479.597	\$22.233	\$484.899
176	\$1.991.061	\$18.596	\$488.536
177	\$1.498.860	\$14.932	\$492.200
178	\$1.002.969	\$11.241	\$495.891
179	\$503.358	\$7.522	\$499.611
180	\$0,00	\$3.775	\$503.358

En el problema 2.38, se muestra el valor de la cuota –sin seguros u otros cobros– para un crédito por 50 millones a 15 años y el plan de amortización al principio y al final del tiempo que dura el crédito.

Nótese que gran parte de la cuota al principio del crédito va para los intereses y una pequeña parte para el capital; al final del crédito las cosas se invierten, la mayor parte de la cuota va para el capital y una muy pequeña va para intereses.

Solicitar un préstamo a una entidad financiera y pagar la totalidad de este más los intereses solo al final del préstamo, podría resultar muy costoso. Supóngase como ejemplo que se pide un préstamo por \$50.000.000 a un plazo de 15 años a una tasa de interés anual del 9% compuesto mensual. Si no se hace ningún pago durante la vida del crédito y se deja esta acción solo al final, el deudor deberá pagar:

$$A = \$50.000.000 \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{180} = \$191.902.163,37$$

Esto además de ser impráctico, es muy riesgoso para las entidades financieras en virtud de que las garantías del crédito para tiempos muy largos puedan no ser efectivas.

Para aliviar esta carga, el deudor puede hacer pagos periódicos a la deuda con el fin de reducirla y obviamente los intereses; estos abonos o pagos parciales a intervalos definidos se conoce con el nombre de **amortización**. De la misma forma que en las anualidades, se van a considerar pagos y términos iguales para simplificar el proceso.

Teorema 2.16. Amortización. El valor constante de la cuota o pago C sobre un préstamo de monto P para ser amortizado en n periodos iguales a una tasa de interés compuesta i , está dado por la expresión:

$$C = \frac{P \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}} \quad [\text{Ec. 2.27}]$$

Considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.42. Una persona pide a una entidad financiera un préstamo hipotecario de cuota fija por \$50,000,000 a 15 años; si la entidad le ofrece una tasa de interés anual del 9% compuesto mensual, de cuánto le quedan las cuotas:

Solución: el crédito acordado tiene una tasa del 9% anual que corresponde al $\frac{9\%}{12}$ mensual, y está pactado a 15 años que es igual a 180 meses; aplicando la expresión del teorema anterior se obtiene:

$$C = \frac{\$50.000.000 \times \frac{0,09}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{-180}} = \$507.133,29$$

Esta persona debe pagar mensualmente por un tiempo de 15 años, una cuota de \$507.134 pesos, para un gran total de \$91.284,120 aproximadamente. Esto en comparación con los 191 millones que debería haber pagado si no amortiza, implica una reducción de casi

Sección 2.6: Matemáticas financieras

100 millones de pesos; esa es una de las razones de la importancia de amortizar los créditos.

Adicionalmente para este problema, los bancos aparte de la cuota del crédito, anexan otros costos como los seguros de vida, de patrimonio, de deuda, de cuota de manejo y hasta extraordinarios, por lo que el deudor debe estar muy pendiente de estos antes de comprometerse con un crédito con cualquier entidad financiera.

Plan de amortización

Otro de los derechos que tienen los usuarios de la banca, por lo menos en Colombia, es conocer su plan de amortización, es decir, una tabla que le muestre cómo cambian los valores de la deuda y los intereses con el pago de cada cuota. Para ilustrar esta tabla considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.43. Plan de amortización: una empresa pide a un banco un préstamo de USD 120,000 a un año; este le ofrece una línea de crédito con un interés anual del 12% compuesto mensual. Si los intereses se cobran sobre el saldo pendiente, determine el valor de la cuota mensual y el plan de amortización en forma de tabla.

Solución: aplicando la expresión del teorema 2.18, sabiendo que el interés mensual es de $12\%/12 = 1\%$.

$$C = \frac{120.000 \times 0.01}{1 - (1 + 0,01)^{-12}} \approx \text{US}\$10.661,85$$

La empresa debe pagar mensualmente USD 10,661,85 dólares americanos por el préstamo durante 12 meses; la tabla que ilustra el plan de amortización es:

Tabla 2.11. Plan de amortización.

Mes	Cuota Fija	Interés pagado	Abono a Deuda	Estado de la Deuda
0				\$120.000,00
1	\$10.661,85	\$1.200,00	\$9.461,85	\$110.538,15
2	\$10.661,85	\$1.105,38	\$9.556,47	\$100.981,67
3	\$10.661,85	\$1.009,82	\$9.652,04	\$91.329,63
4	\$10.661,85	\$913,30	\$9.748,56	\$81.581,08
5	\$10.661,85	\$815,81	\$9.846,04	\$71.735,03
6	\$10.661,85	\$717,35	\$9.944,50	\$61.790,53
7	\$10.661,85	\$617,91	\$10.043,95	\$51.746,58
8	\$10.661,85	\$517,47	\$10.144,39	\$41.602,19
9	\$10.661,85	\$416,02	\$10.245,83	\$31.356,36
10	\$10.661,85	\$313,56	\$10.348,29	\$21.008,07
11	\$10.661,85	\$210,08	\$10.451,77	\$10.556,29
12	\$10.661,85	\$105,56	\$10.556,29	\$0,00
	\$127.942,26	\$7.942,26	\$120.000,00	



Una persona desea comprar un celular de gama alta que tiene un valor comercial de USD 2000. La compra se hace con su tarjeta de crédito, la cual ofrece un interés nominal de consumo del 36% anual compuesto mensual. (Sin cuota de manejo u otros costos asociados). Determine el plan de pagos si esta persona solicita que le difieran la deuda a 4 meses.

SOLUCIÓN

Sección 2.6: Matemáticas financieras

En el mes 0, no se ha amortizado nada la deuda, en otras palabras, se deben los USD 120.000, pero en el mes 1. el banco cobra los intereses que son del 1% de USD 120.000 que corresponde a \$4.000, estos salen de la cuota, por tanto, se abona a la deuda USD 10.661,85 – \$4.000 = USD 9.461,85 quedando en USD 110,538.15; a esta deuda el banco en el mes 2, le cobra de nuevo el 1% de intereses que es USD 1.105.38 y así sucesivamente se va construyendo la tabla.

Nótese que al final el Estado de la deuda es USD 0, que la empresa ha pagado en total USD 127.942,26, de los cuales USD 120.000 corresponde a la deuda y USD 7.942,26 corresponden a los intereses.

Sección 2.6: Matemáticas financieras**Ejercicios Sección 2.6. Matemáticas Financieras****Interés simple**

Los siguientes problemas se resuelven usando las expresiones analíticas para el interés simple

1. Calcule el valor acumulado de un préstamo de USD 1.000 a una tasa de interés simple del 4% anual durante:
 - a. Un año.
 - b. 3 años.
 - c. 8 meses.
2. Un fondo de empleados le presta a uno de sus trabajadores \$12,000,000 a una tasa de interés simple del 1.4% mensual. Estimar el valor de la deuda para:
 - a. Un año después.
 - b. Cinco años después.
 - c. Veinte años después.
3. Una persona obtiene un crédito a interés simple en una tienda de ropa. Si la tasa de interés es del 14% mensual, y tres años después la deuda asciende EUR 426, cuál fue el valor inicial de crédito.
4. Después de 8 meses de haber obtenido un crédito, al señor Juan Pérez le informan que su deuda asciende a USD 1.944. Si el crédito fue pactado con una tasa de interés del 12%. Determine el capital inicial prestado.
5. A una central de riesgos llega un informe en el cual le informan que un usuario, a quien le habrían prestado USD 600, a una tasa de interés de 4% mensual, ya tenía una deuda que ascendía a USD 744. Cuánto tiempo de mora tiene este deudor.
6. Una persona necesita hacer un crédito por €3,000, y estima que a futuro puede obtener ganancias por € 4,200. Si un banco le presta a un interés simple del 2% mensual, durante cuánto tiempo podría usar este dinero.
7. Una entidad financiera le informa a un cliente que le puede prestar 10 monedas de oro durante 30 meses, pero debe devolverle 9 monedas más, dadas estas condiciones, cuál es el interés de este crédito.
8. Un amigo le pide a otro un préstamo por COP 25,000 durante seis meses y este último accede, pero al final le dice que le debe COP 55,000. Por cuánto interés mensual se perdió esta amistad.
9. Cuantos días le tomará que una inversión de USD 1.000 con una tasa de interés del 5% anual, convertirse a USD 1.025.
10. Cuantos días –o años–, le tomará a una inversión duplicarse en un banco que ofrece un interés simple del 4% anual.

Interés Compuesto

Los siguientes problemas se resuelven asumiendo un interés compuesto. Cuando no se especifique se puede asumir que es compuesto anual

11. Encuentre el valor acumulado de un capital de US\$ 1.000 con una tasa de interés del 3% anual compuesto durante cuatro años, en cada uno de los tiempos de capitalización indicados:
 - a. anual.
 - b. semestral.
 - c. Trimestral.
 - d. mensual
12. Encuentre el valor acumulado de un capital de US\$ 250,000 con una tasa de interés del 14% anual compuesto durante tres años, en cada uno de los tiempos de capitalización indicados:
 - a. anual.
 - b. semestral
 - c. mensual
 - d. diario.
13. Obtenga la tasa efectiva de un crédito que ofrece una tasa de interés del 12% nominal

Sección 2.6: Matemáticas financieras

- compuesto, en los periodos que se muestran a continuación:
- Semestral
 - Trimestral
 - mensual
 - Semanal
 - Diario
14. Obtenga la tasa efectiva de un crédito que ofrece una tasa de interés del 9% nominal compuesto, en los periodos que se muestran a continuación:
- Semestral
 - Trimestral
 - mensual
 - Semanal
 - Diario
15. Obtenga la tasa efectiva de un crédito que ofrece una tasa de interés del 36% nominal compuesto, en los periodos que se muestran a continuación:
- Semestral
 - Trimestral
 - mensual
 - Semanal
 - Diario
16. Una persona está interesada en hacer un préstamo de libre inversión y tiene tres ofertas bancarias. El primer banco le ofrece un interés efectivo del 12% anual, el segundo banco le ofrece un interés efectivo del 6% semestral y el último banco le ofrece una tasa de interés efectivo del 1% mensual compuesto mensual. Esta persona con base en estas tasas de interés efectivo, ¿qué banco debería escoger? Justifique su respuesta.
17. La señora Pérez decide invertir US\$10.000 en un banco que ofrece una tasa de interés del 6% anual compuesto mensual. Si quiere obtener una ganancia de US\$5,000, cuánto tiempo debe esperar.
18. Un inversionista decide poner un capital de €15,000 en una cuenta de altísimo riesgo que rinde al 12% mensual compuesto quincenal. Al cabo de tres meses, cuánto habrá subido su capital.
19. Para le mismo problema anterior, pero suponga ahora que la inversión se capitaliza es diariamente. Al cabo de tres meses, cuánto habrá subido su capital.
20. Las cesantías obtenidas por un trabajador suman \$12,000,000, y decide guardarlas en un banco, que da un interés del 8% anual compuesto mensual. Si este trabajador desea que su capital aumente a \$18,000,000, cuánto tiempo debe esperar.
21. En una decisión financiera importante, el señor Ramírez quiere que una inversión de US\$3,000 dólares se dupliquen en 4 años, cuál es la tasa de interés anual que garantiza este monto.
22. Suponga ahora que el señor Ramírez quiere duplicar su inversión, pero en dos años, cuál es la tasa de interés anual que garantiza este monto.
23. Una familia tiene una inversión que en cinco años le devuelve enteramente su capital más los intereses. Si esta familia quiere comparar con ese dinero una casa que actualmente vale \$96,000,000 y cuyo valor crece anualmente a un ritmo del 4% compuesto anual, cual es el valor que le debería dar la inversión.
24. Para su bono pensional, Don Jaime invirtió en un fondo de ahorro un capital de \$16,000,000 que brinda un interés de 10% anual compuesto trimestral. Si don Jaime tiene 50 años y se pensiona a los 65 años, a cuánto debería ascender su bono.
25. Para el problema anterior, suponga que Don Jaime quiere que su bono pensional ascienda a \$90 millones. ¿Cuánto tiempo debe esperar a partir de su edad de retiro?
26. En los últimos 4 años, el Fondo Americano creció a una tasa del 10.4% anual compuesta trimestral mientras que el Fondo La Amistad creció a una tasa de 10.5% anual compuesta semestral. ¿En qué fondo de inversión usted pondría su dinero? Justifique la respuesta.

Sección 2.6: Matemáticas financieras

27. Juan tiene un capital que quiere poner a producir y una entidad financiera le da dos opciones de inversión a largo plazo. La primera opción es comprar un inmueble cuyo valor se triplicará en 12 años, la segunda opción, para el mismo tiempo es adquirir un CDT para el mismo tiempo de retorno, que da un interés del 10% anual compuesto diariamente. Qué opción debe escoger Juan
28. Una entidad financiera, ofrece a sus usuarios una tasa de interés del 24% efectiva anual. Obtenga las tasas de interés efectiva semestral, trimestral, mensual, semanal y diario.
29. Una entidad financiera, ofrece a sus usuarios una tasa de interés del 12% efectiva anual. Obtenga las tasas de interés efectiva semestral, trimestral, mensual, semanal y diario.
30. Un padre preocupado por la educación de sus hijos, decide ahorrar en una entidad financiera bajo el modelo de ahorro programado. La entidad le paga un interés de 6% anual compuesto mensual y el padre tiene capacidad para ahorrar \$250,000 mensuales. Dadas estas condiciones, determine el monto acumulado al cabo de 18 años.
31. Para el problema anterior, el mismo padre decide hacer un esfuerzo adicional y logra ahorrar \$300,000 mensuales. Bajo esta nueva condición, cuál es el monto acumulado al cabo de los 18 años.
32. Una empresa capitalizadora de ahorros, ofrece una promoción para la adquisición de vehículo nuevo que consiste en un pago único de \$4000,000, mas 60 cuotas iguales de \$500,000. Si la empresa brinda un interés de 3% anual compuesto mensual, estime el valor del vehículo al final del ahorro
33. Con respecto al problema anterior, esta persona decide invertir los \$4000,000 en un CDT que rinde el 8% efectivo anual en un banco externo, pero la empresa capitalizadora le dice que como ya no va a dar la cuota inicial, le debe bajar el interés al 2.5%. Bajo esta nueva modalidad, cuánto alcanza a ahorrar esta persona.
34. Finalmente, en relación con los problemas anteriores, el profesor de matemáticas le recomienda a esta persona que no invierta su dinero así y que, si quiere comprar el vehículo, ahorre mejor ese dinero en CDT o acciones a largo plazo que son más seguras. Bajo esta modalidad la persona encuentra un banco que le ofrece un ahorro programado a cinco años con un interés del 8.5%. Qué monto alcanza a ahorrar. Saque sus propias conclusiones.
35. Una familia quiere comprar un apartamento que vale \$80,000,000 y que tiene una cuota inicial del 10%. Si la familia logra reunir la cuota y el resto lo financia con un banco a 20 años, con una tasa de interés del 12% anual compuesto mensual, determine el valor de la cuota.
36. Con respecto al problema anterior, un segundo banco decide ofrecerle una mejor tasa de interés, bajándola al 8% anual compuesto mensual. Determine para estas nuevas condiciones, la cuota que tocaría pagar.
37. Las políticas de préstamos para un banco, estipulan que el monto máximo que le pueden prestar a una familia corresponde a una cuota que no supere el 30% del total de los ingresos brutos de la familia. En este caso una familia compuesta por dos personas que trabajan y cuyos salarios suman \$2,000,000, quieren comprar una casa de \$85,000,000 a 10 años. Determine el monto máximo que le puede prestar el banco si la tasa es del 9% anual compuesto mensual y el excedente o cuota inicial que debería invertir esta familia.
38. La familia de problema anterior, tiene un ahorro de \$20,000.000 para la cuota inicial, sin embargo, deben aumentar el plazo para poder alcanzar a pagar la casa con el préstamo bancario. Estime el valor máximo que le puede prestar el banco para un plazo de 15 años, 20 años y 25 años.

Sección 2.6: Matemáticas financieras

39. Compras por tarjeta de crédito tiene uno de los intereses más altos del mercado, normalmente cercanos a techo de usura. Suponga que se quiere hacer la compra de un celular que vale \$3,600, 000 con una tarjeta de crédito que tiene un interés del 3% anual compuesto mensual. Si se difiere el préstamo a 6 cuotas determine el plan de pagos.
40. Una persona compra con tarjeta de crédito un televisor que vale \$3,600,000, diferido a 36 cuotas, determine el monto total pagado si adicional al préstamo que es pactado al 32% anual compuesto mensual, el usuario debe pagar \$20,000 de cuota mensual de manejo y un seguro de \$8,000 durante el tiempo que dure el crédito.

RESPUESTA CAPÍTULO 1

SECCIÓN 1.1.

1. $x = -2$ Si / $x = 2$ No
3. $x = 1$ Si / $x = 2$ No
5. $x = 0$ No / $x = 2$ Si
7. $x = -4$ No / $x = 3$ No
9. $x = 10$ No / $x = 3$ No
11. $6xy - 8x + 3y$
13. $11x$
15. $ab - 3.8a + 8.4b$
17. $\frac{5}{4}m^2n + \frac{1}{6}mn^2$
19. $-\sqrt{2}xy + 1$
21. $x = 6$
23. $x = 12$
25. $x = 4$
27. $x = -1$
29. $x = 2$
31. $x = 5$
33. $x = \frac{8}{23}$
35. $x = \frac{1561}{636}$
37. $m = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3}$
39. $d = \frac{8\sqrt{3} - \sqrt{10}}{3}$
41. $x = \frac{c - b}{a}$
43. $x = (a - c)/b$
45. $x = 2$

47. $m = 2$
49. $q = 12$
51. $x = -\frac{20}{3}$
53. $x = 0$
55. $x = -\frac{17}{9}$
57. $x = -\frac{39}{6}$
59. $m = -\frac{8}{7}$
61. $n = -\frac{149}{30}$
63. $y = -\frac{15}{16}$
65. $\alpha = \frac{31}{2}$
67. $a = -\frac{5}{3}$
69. $x = -\frac{11}{25}$
71. $x = -\frac{1}{13}$
73. $x = \frac{2}{7}$
75. $w = -1.176$
77. $r = -\frac{145}{82}$
79. $p = -\frac{43}{24}$
81. $r = 2$

1.1 Sección 1.2

1. $x = 3, y = 1$
3. $x = \frac{3}{4}, y = \frac{2}{5}$
5. $y = 10, x = -3$
7. $x = -\frac{8}{7}, y = \frac{88}{7}$
9. $x = \frac{36}{5}, y = \frac{39}{5}$
11. $x = 24, y = 38$
13. $x = -\frac{4}{5}, y = -\frac{12}{5}$
15. $x = 7, y = -\frac{32}{3}$
17. $x = -2, y = -1$
19. $x = -4, y = 2$
21. $x = 1, y = 1$
23. $x = \frac{25}{26}, y = \frac{74}{39}$

Respuestas a los problemas impares

25. $x = -2, y = 5$
 27. $x = \frac{1}{2}, y = -1$
 29. $x = -1, y = -2$
 31. $x = -\frac{6}{5}, y = -\frac{13}{10}$
 33. $x = \frac{1665}{113}, y = \frac{337}{113}$
 35. $x = 5, y = 2$
 37. $y = 5, x = 2$
 39. $x = -\frac{12}{17}, y = -\frac{1}{17}$
 41. $p = \frac{2}{7}, q = \frac{26}{21}$
 43. $t = \frac{13}{7}, f = \frac{2}{7}$
 45. $z = -1, w = -2$
 47. $a = 12, b = 6$
 49. $a = 3, b = 9$
 51. $x = 8, y = -8$
 53. $a = -\frac{3}{7}, b = -\frac{87}{14}$
 55. $x = -\frac{12}{5}, y = -\frac{3}{5}$

57. $d = -\frac{5}{7}, s = -\frac{9}{7}$
 $x = \frac{23}{5}, y = \frac{22}{5}$
 59. $x = \frac{23}{5}, y = \frac{22}{5}$
 61. $x = 3, y = -1, z = 2$
 63. $x = -3, z = -3, y = 1$
 65. $x = -\frac{7}{2}, z = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}$
 67. $x = -\frac{3}{2}, z = \frac{5}{2}, y = \frac{3}{2}$
 69. $x = -80, z = -45, y = 65$
 71. $a = 1, c = 3, b = 2$
 73. $a = 2, c = 4, b = -1$
 75. $a = -3, c = -2, b = 4$
 77. $a = 2, c = 4, b = -3$
 79. $a = 208, c = -406, b = 137$
 81. $x_1 = 1, x_3 = 3, x_2 = 2, x_4 = 4$
 83. $x_1 = -2, x_3 = 1, x_2 = 4, x_4 = -3$
 85. $x_1 = -2, x_3 = -3, x_2 = 1, x_4 = 2$
 87. $x_1 = 1, x_3 = 3, x_2 = 2, x_4 = 4$
 89. $x_1 = -2, x_3 = 1, x_2 = 4, x_4 = -3$
 91. $x_1 = -2, x_3 = -3, x_2 = 1, x_4 = 2$

Sección 1.3.

1. $c^2 = a^2 + b^2$

a	b	c
2	3	$\pm\sqrt{13}$
± 3	4	5
12	± 5	13

3. $m^2 = n^2 - 3t$

m	n	t
8	3	$-\frac{55}{3}$
± 1	4	5
12	$\pm\sqrt{183}$	13

5. $q = \sqrt{m^2 + n}$

q	m	n
2	3	5
$\sqrt{21}$	4	5
6	ND	20

7. $c^3 = a^3 + b^3$

a	b	c
2	3	$\sqrt[3]{35}$
$\sqrt[3]{61}$	4	5
12	$\sqrt[3]{469}$	13

9. $m^2 = n^2 + 3t$

m	n	t
8	3	$\frac{55}{3}$
$\pm\sqrt{31}$	4	5
12	$\pm\sqrt{105}$	13

11. $q = \sqrt{m^2 + 1} + n$

q	m	n
2	3	$2 - \sqrt{10}$
$\sqrt{26} + 4$	4	5

Respuestas a los problemas impares

6	$\pm\sqrt{195}$	20
----------	-----------------	----

13. $a^2c^2 = b^2 + 1$

a	b	c
2	3	$\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$
$\pm\frac{\sqrt{17}}{5}$	4	5
12	$\pm\sqrt{24335}$	13

15. $m^2 = n^2 - t^2$

m	n	t
8	3	ND
ND	4	5
12	156	13

17. $q^2 = \sqrt{m^2 + n^2}$

q	m	n
20	3	$\sqrt{159991}$
$\pm\sqrt{41}$	4	5
60	$\pm 20\sqrt{32399}$	20

19. a. \$4,250,000
b. \$1,600
c. 600
21. 27.405 formas
23. 17.576.000 placas
25. 1.260 formas
27. a. $96\pi^2$
b. $\sqrt{\frac{200}{7\pi^2}}$

Sección 1.4

1. 12 y 8
3. 28 conejos
24 gallinas
5. 16 cm y 12 cm
7. 2 horas con 55 min
9. 80 buenas 20 malas
11. 40 cm
13. 1/3 km/hr
15. US\$8.000 y
US\$4.000

17. 150 boletos para silla preferencial y 400 boletos para silla general
19. 150 lb expo
250 lb pasilla
21. 8 lb del 20%
4 lb del 40%
23. 15%
25. 7.2 lt gasolina pura
4.8 lt gasolina 75%

Sección 1.5

1. $x = 1$
3. $x = 4, : x = 2$
5. $x = 1, : x = -3$
7. $x = -5, : x = \frac{3}{2}$
9. $x = 2, : x = -\frac{11}{4}$
11. $x = 1, x = -1$
13. $x = 0, x = 5$

15. $x = 0$
17. $x = 6, x = 1$
19. $x = 2i; x = -2i$
- 21.
23. $x = -\frac{-3 + \sqrt{57}}{6}, x = \frac{3 + \sqrt{57}}{6}$
25. $x = \pm 1$
27. $x = 0, : x = -2$

Respuestas a los problemas impares

29. $x = \frac{3}{8} + i\frac{\sqrt{7}}{8}; x = \frac{3}{8} - i\frac{\sqrt{7}}{8}$
 31. $x = 6; x = -1$
 33. $x = \frac{5}{4} - \frac{i\sqrt{23}}{4}, x = \frac{5}{4} + \frac{i\sqrt{23}}{4}$
 35. $x = \sqrt{\frac{1}{5}}; x = -\sqrt{\frac{1}{5}}$
 37. $x = 2; x = -2$
 39. $x = 8 - \sqrt{66}; x = 8 + \sqrt{66}$
 41. $x = \frac{8 + \sqrt{10}}{9}; x = \frac{8 - \sqrt{10}}{9}$
 43. $x \approx -2.646, x \approx 0.467$
 45. $x \approx 1.301, x \approx -0.346$
 47. No
 49. No
 51. Si
 53. $(-3, -4) \& (1, 0)$
 55. $(3, 7) \& (-5, -9)$
 56. $(0, 0)$
 57. $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}) \& (0, 1)$
 58. $(0, 1)$

59. $(1, 3) \& (-1, 1)$
 60. $(1, 4) \& (-1, -6)$
 61. $(1, 3) \& (-1, 1)$
 62. $(0, 1) \& (1, 3)$
 63. $x = 1$
 64. $x = \frac{3}{2}$
 65. $x = 2$
 66. $x = 0; x = 8$
 67. $x = \pm 4$
 69. $x = 16; y = 2$
 70. $x = \frac{3}{2}; y = \frac{5}{2}$
 71. $x = 7; y = 13$
 72. $x = 12m; y = 14m$
 73. $x = 24m; y = 16m$
 74. 168 m de alambre de púas
 75. $x = 40m; y = 20m$
 $P = 2y + (1 + \frac{\pi}{2})x$
 76. $A = xy + \frac{\pi}{8}x^2$
 77. $x = 1.4327, y = 0.7107$

Sección 1.6.

1. $Sol = \{x : x < 4\}$
 $Sol = \{x : x \in (-\infty, 4)\}$
 3. $Sol = \{x : x \leq 7\}$
 $Sol = \{x : x \in (-\infty, 7]\}$
 5. $Sol = \{x : x < 2\}$
 $Sol = \{x : x \in (-\infty, 2)\}$
 7. $Sol = \{x : x < 1\}$
 $Sol = \{x : x \in (-\infty, 1)\}$
 9. $Sol = \{x : x \leq 3\}$
 $Sol = \{x : x \in (-\infty, 3]\}$
 11. $Sol = \{x : x > 3\}$
 $Sol = \{x : x \in (3, +\infty)\}$
 13. $Sol = \{x : x \leq 3\}$
 $Sol = \{x : x \in (-\infty, 3]\}$
 15. $Sol = \{x : x < -1\}$
 $Sol = \{x : x \in (-\infty, -1)\}$
 17. $Sol = \{x : -2 < x \leq 3\}$
 $Sol = \{x : x \in (-2, 3]\}$
 19. $Sol = \{x : 5 < x \leq 7\}$
 $Sol = \{x : x \in (5, 7]\}$

21. $Sol = \{x : -8 \leq x < -2\}$
 $Sol = \{x : x \in [-8, -2)\}$
 23. $Sol = \{x : -3 \leq x < 2\}$
 $Sol = \{x : x \in [-3, 2)\}$
 25. $Sol = \{x : -\frac{7}{2} \leq x < -\frac{17}{6}\}$
 $Sol = \{x : x \in [-\frac{7}{2}, -\frac{17}{6})\}$
 27. $Sol = \{x : -7 \leq x < 1\}$
 $Sol = \{x : x \in [-7, 1)\}$
 29. $Sol = \{x : -4 \leq x \leq 1\}$
 $Sol = \{x : x \in [-4, 1]\}$
 31. $Sol = \{x : x \leq -1 \text{ o } x \geq 1\}$
 $Sol = \{x : x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$
 33. $Sol = \{x : x \leq 0 \text{ o } x \geq 1\}$
 $Sol = \{x : x \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)\}$
 35. $Sol = \{x : x \leq -2 \text{ o } x \geq -1\}$
 $Sol = \{x : x \in (-\infty, -2] \cup (-1, +\infty)\}$
 37. $Sol = \{x : x \in (-\infty, -3] \cup [1, 4)\}$
 39. $Sol = \{x : \}$
 $Sol = \{x : x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty)\}$

Respuestas a los problemas impares

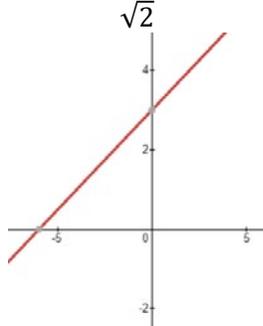
41.
$$Sol = \left\{ x : x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, +\infty \right) \right\}$$
43. a. Plan 1
 b. $d < 1120 \text{ km}$
 c. $d > 1120 \text{ km}$

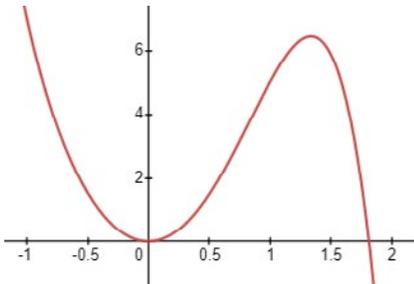
45. Hasta doce cajas
 47. Hasta 6 horas máximo
 49. 1,400 libras
 51. 8000 prendas
 53. $w \leq \$30 / \$2 = 15$ unidades de peso
 55. [450, 500] puntos.

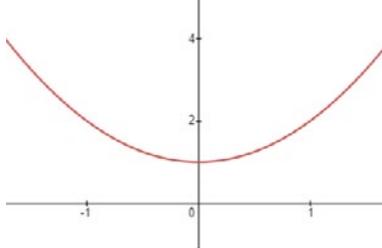
RESPUESTAS CAPÍTULO 2

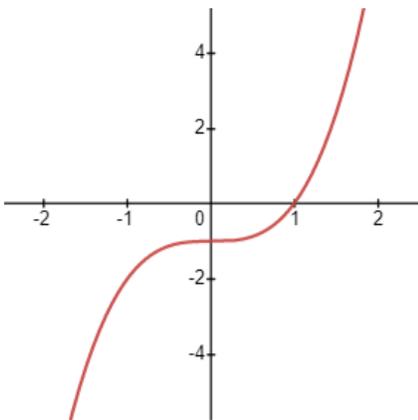
Sección 2.1

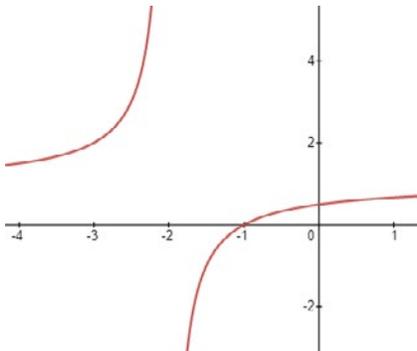
11. 3
 13. $x + 4$
 15. 1
 17. x^4
 19. 13
 21. $2x^6 + 7x^4 - 4x^2 - 1$

23. 5
 25. 3
 27. 0
 29. $\sqrt{2}$
 31. 

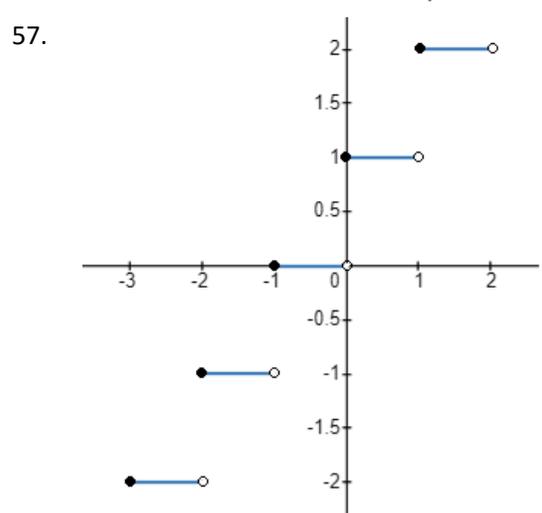
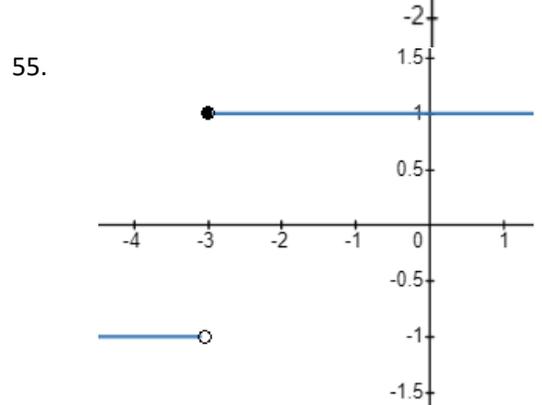
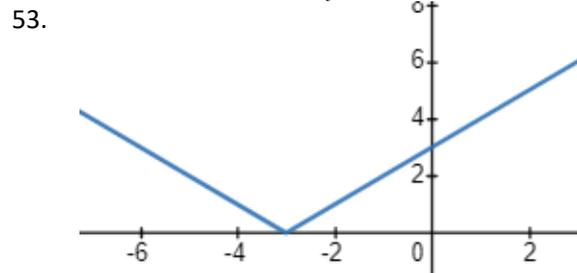
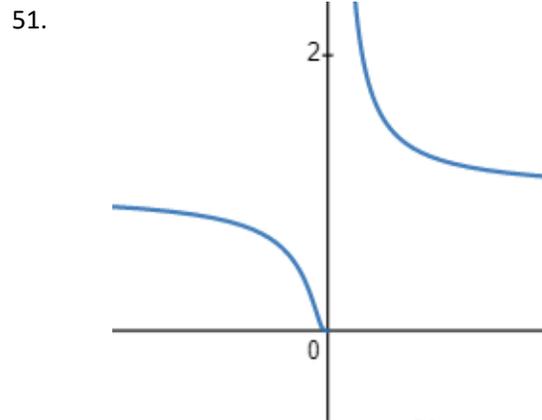
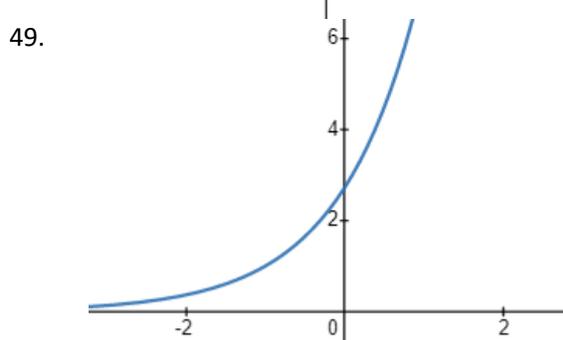
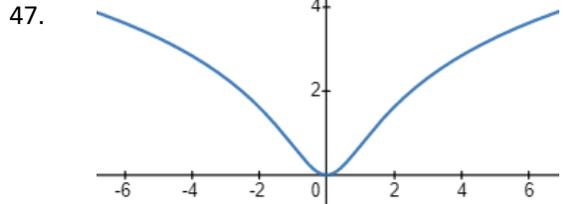
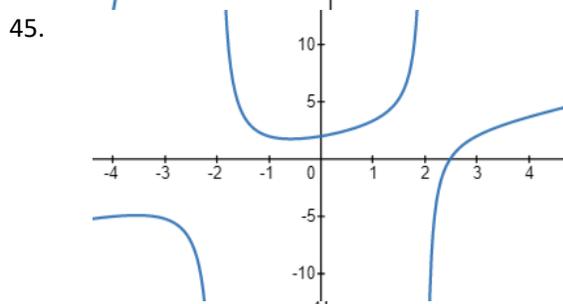
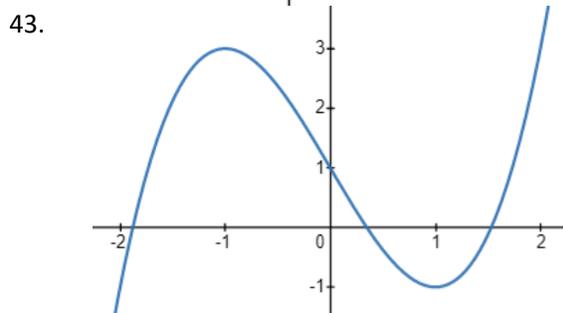
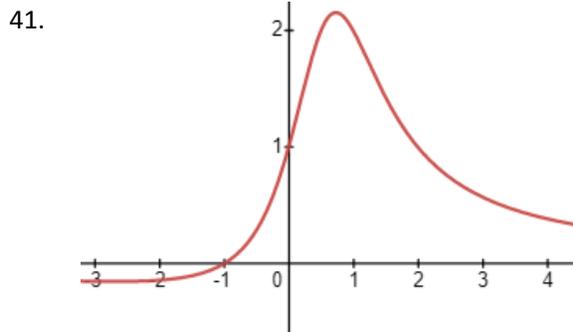
37. 

33. 

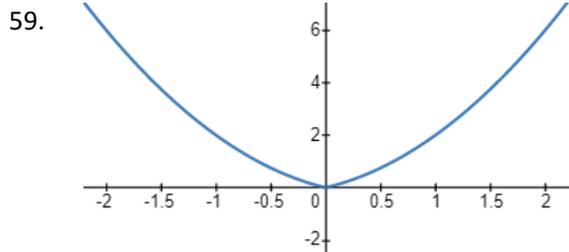
35. 

39. 

Respuestas a los problemas impares



Respuestas a los problemas impares



61. No
 63. Si
 65. Si
 67. Si
 69. Si
 71. $Df = \mathbb{R}$
 $Rf = \mathbb{R}$
 73. $Df = \mathbb{R}$
 $Rf = \mathbb{R}$
 75. $Df = \mathbb{R}$
 $Rf = [1, +\infty)$
 77. $Df = \mathbb{R} - \{0\}$
 $Rf = \mathbb{R}$
 79. $Df = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$
 $Rf = \mathbb{R}$
 81. $Df = \mathbb{R} - \{1\}$
 $Rf = \mathbb{R}$
 83. $Df = (-\infty, : -3) \cup (-3, : 0) \cup (0, : \infty)$
 $Rf = (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{13}{3}, \infty\right)$
 85. $Df = [-3, +\infty)$
 $Rf = \mathbb{R}^+$
 87. $Df = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
 $Rf = \mathbb{R}^+$
 89. $Df = \left(-\infty, : -\frac{2}{3}\right] \cup (0, +\infty)$
 $Rf = [0, \sqrt{3}] \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
 91. $Df = (0, 2) \cup [5, +\infty)$
 93. $Df = (-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$
 $Rf = \left[0, \sqrt{\frac{1}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{5}}, : \infty\right)$
 95. $Df = \mathbb{R}$
 $Rf = \mathbb{R}^+$
 97. $Df = \mathbb{R}$
 $Rf = \mathbb{R}^+$
 99. $Df = \left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$
 $Rf = \mathbb{R}^+$

101. $Dg = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$
 $Rg = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

103. $Dg = \mathbb{R}$
 $Rg = [-9, +\infty)$

105. $Df = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

$Rf = \mathbb{R} - \{0\}$
 107. $Df = [2, +\infty)$

$Rf = \mathbb{R}^+$

109.

$Dh = (-\infty, -7) \cup (2, +\infty)$

$Rh = (-\infty, : -2) \cup \left[\frac{2\sqrt{5}}{3}, +\infty\right)$

111. $Df = [-5, +5]$

$Rf = [-5, 0]$

113. $Df = \mathbb{R}$

$Rf = \mathbb{R}^+$

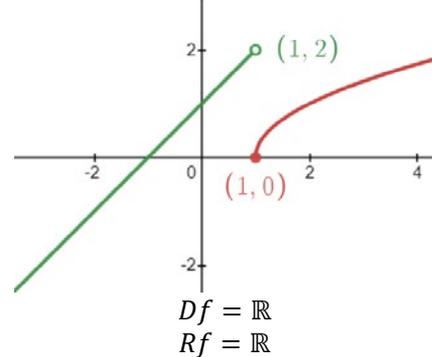
115. $Df = \mathbb{R} - \{-2\}$

$Rf = \mathbb{R}^+$

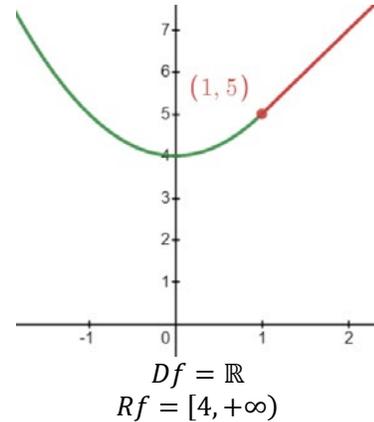
117. $Df = \mathbb{R} - \{-1\}$

$Rf = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

119.

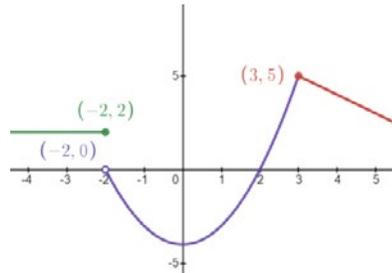


121.



Respuestas a los problemas impares

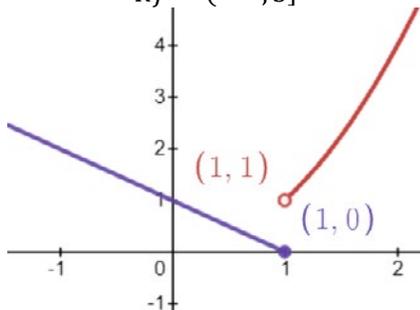
123.



$$Df = \mathbb{R}$$

$$Rf = (-\infty, 5]$$

125.

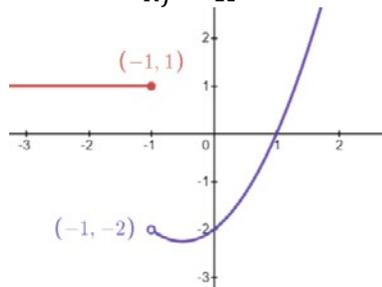


$$Df = \mathbb{R}$$

$$Rf = \mathbb{R}^+$$

127.

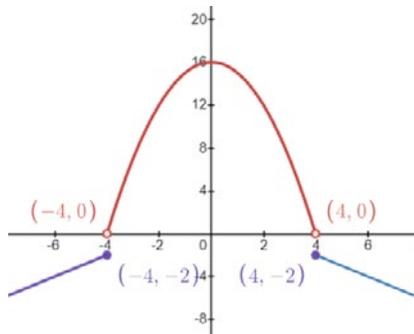
129.



$$Df = \mathbb{R}$$

$$Rf = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$$

131.



$$Df = \mathbb{R}$$

$$Rf = \mathbb{R} - (-2, 2)$$

133.

Función Par

135.

Sin simetría

137.

Función Impar

139.

$$f \circ g = (x^2 - 3)^3$$

$$Df = \mathbb{R} ; Rf = \mathbb{R}$$

$$g \circ f = x^6 - 3$$

$$Df = \mathbb{R} ; Rf = [-3, +\infty)$$

141.

$$f \circ g = \frac{6x^2 - 33x + 46}{2x^2 - 11x + 15}$$

$$Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}, 3\right\}$$

$$Rf = (-\infty, -5] \cup (3, +\infty)$$

$$g \circ f = \frac{1}{2x^2 + x}$$

$$Df = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$$

$$Rf = (-\infty, -8] \cup (0, +\infty)$$

143.

$$f \circ g = 3x^2 - 3x^4 + x^6$$

$$Df = \mathbb{R}$$

$$Rf = \mathbb{R}^+$$

$$g \circ f = 2x^3 - x^6$$

$$Df = \mathbb{R}$$

$$Rf = (-\infty, 1]$$

145.

a. $Q(t) = \sqrt{0.1t^2 + 24}$

b. $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

c. 20 años

147.

a. $I(x) = 91x - 60$

b. $U(x) = 61x - 1860$

c. \$4.910.000

149.



151.

$$r = 16\pi t^2$$

153.

b. $A = 50x - x^2$

c. $Df = [0, 25]$

d. Cuadrado de 25m

Respuestas a los problemas impares

155.

Altura	Ancho	Volumen
1 cm	22 cm	484 cm ³
2 cm	20 cm	800 cm ³
3 cm	18 cm	972 cm ³
4 cm	16 cm	1024 cm ³
5 cm	14 cm	980 cm ³
6 cm	12 cm	864 cm ³
7 cm	10 cm	700 cm ³
8 cm	8 cm	512 cm ³
9 cm	6 cm	324 cm ³
10 cm	4 cm	160 cm ³
11 cm	2 cm	44 cm ³
12 cm	0 cm	0 cm ³

b. Volumen máximo 1024 cm³

Sección 2.2

11.

$$1$$

13.

$$0$$

15.

$$-\frac{1}{4}$$

17.

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$$

19.

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

21.

$$y = -\frac{5}{8}x + \frac{1}{8}$$

23.

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{21}{2}$$

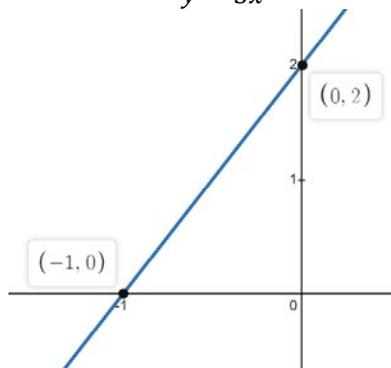
25.

$$y = -\frac{4}{5}x - \frac{17}{5}$$

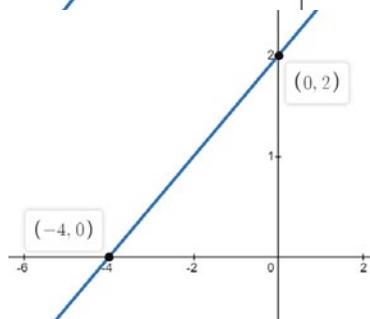
27.

$$y = 3x$$

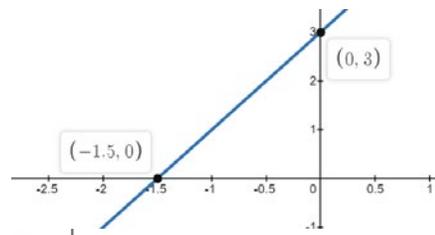
29.



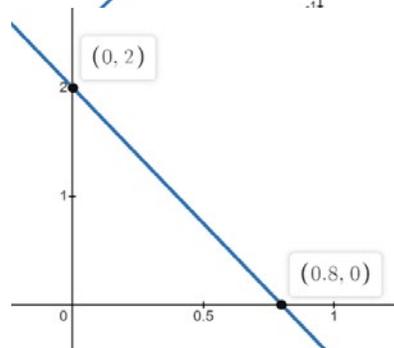
31.



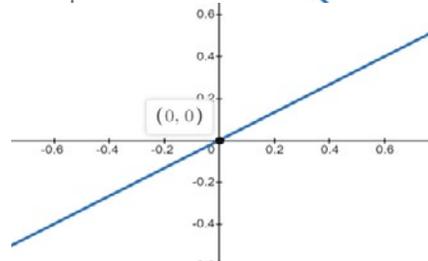
33.



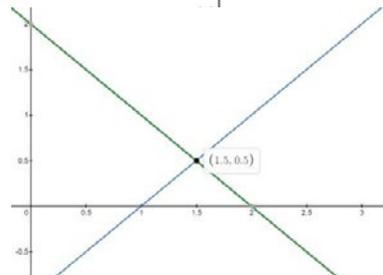
35.



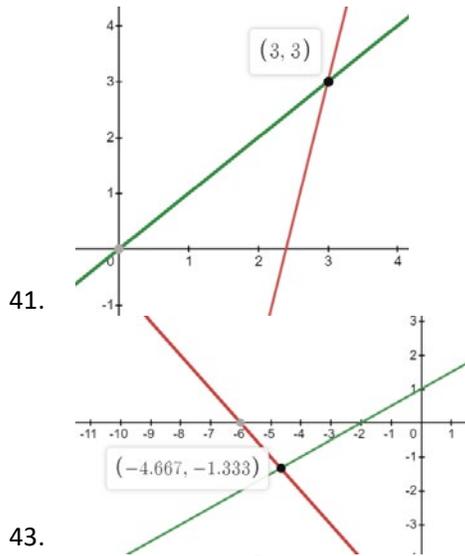
37.



39.



Respuestas a los problemas impares



43. Paralela $y = -\frac{2}{3}x$

45. Perpendicular $y = -\frac{3}{2}x$

Paralela $y = 2x - 6$

47. Perpendicular $y = -\frac{1}{2}x - 1$

Paralela $y = x + 1$

49. Perpendicular $y = -x - 3$

a. $\frac{1}{4}$

51. b. $2\sqrt{65}$ m

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

a. 25°C

53. b. 122F

55. αL_0

SECCIÓN 2.3.

11. 2°

13. 4°

15. Para x de 4° / Para y de 3°

17. 6°

19. Para x de 5° / Para y de 2°

21. Cóncava hacia arriba

23. Cóncava hacia abajo

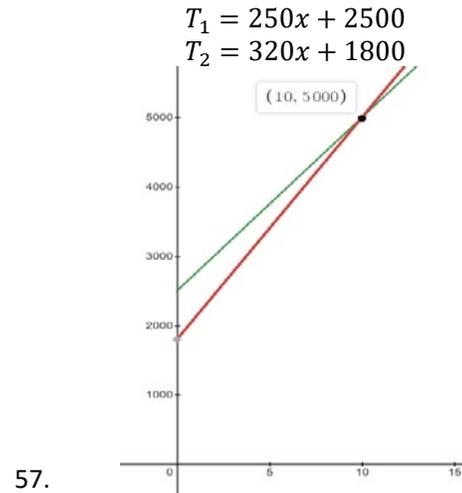
25. cóncava hacia arriba

27. Cóncava hacia abajo

29. Cóncava hacia abajo

31. Cóncava hacia abajo

33. $(x_1, x_2) = (1, -3)$



a. $N = -\frac{100x}{3} + 90$

b. 50 vehículos

c. 46 vehículos

d. 0 vehículos

59. e. \$1,560,000

61. 40 dólares

63. \$6,000,000

65. 86 ha, 172 ha, 254 ha

Exportadas 130M

Almacenadas 70M

Recicladas 209,5M

67. Incineradas 45.5M

69. \$150,000

71. $y = 10x - 20.050; 170; 200; 2035$

35. $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$

37. $(x_1, x_2) = \left(4, -\frac{3}{2}\right)$

39. $(x_1, x_2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{4}\right)$

41. $(x_1, x_2) = \left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

43. $(x_1, x_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

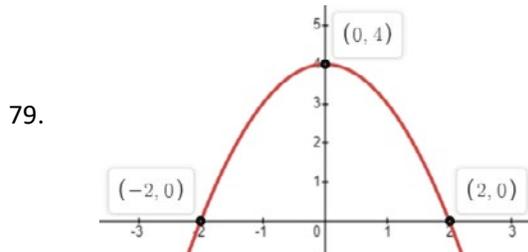
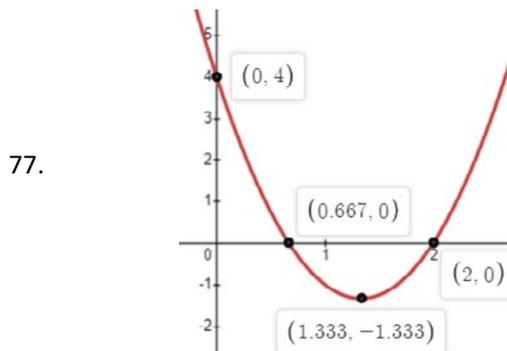
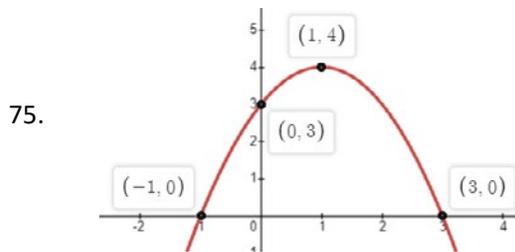
45. $(x_1, x_2) = \left(0, \frac{5}{2}\right)$

47. $(x_1, x_2) = (1, -3)$

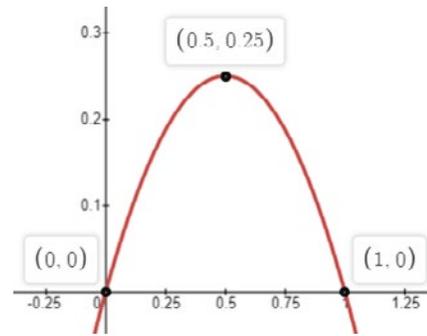
49. $x = 1 + \sqrt{2}i, x = 1 - \sqrt{2}i$

Respuestas a los problemas impares

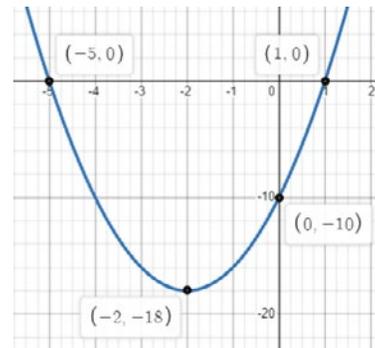
- 51. $x = 3, \quad x = -1$
- 53. $x = \frac{2 + \sqrt{19}}{3}, x = \frac{2 - \sqrt{19}}{3}$
- 55. $x = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}, \quad x = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$
- 57. $x = -3 + \sqrt{5}, x = -3 - \sqrt{5}$
- 59. $x = i, \quad x = -i$
- 61. $x = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{11}}{2}, \quad x = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{11}}{2}$
- 63. *Mínimo* $(2, -3)$
- 65. *Mínimo* $(2, -7)$
- 67. *Máximo* $(-\frac{2}{3}, \frac{19}{3})$
- 69. *Máximo* $(0, 1)$
- 71. *Mínimo* $(-1, -1)$
- 73. *Mínimo* $(\frac{9}{4}, \frac{111}{8})$



81.



83.



85.

$$f(x) = -x^2 + x$$

87.

$$f(x) = -3x^2 + 2x + 1$$

89.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 1$$

91.

$$f(x) = 4x^2 + 2x - 1$$

93.

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 5$$

95.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$$

97.

$$(0, 1) \text{ y } (3, 10)$$

99.

$$(\frac{3}{2}, 9) \text{ y } (2, 2)$$

101.

$$(1, 4) \text{ y } (2, 9)$$

103.

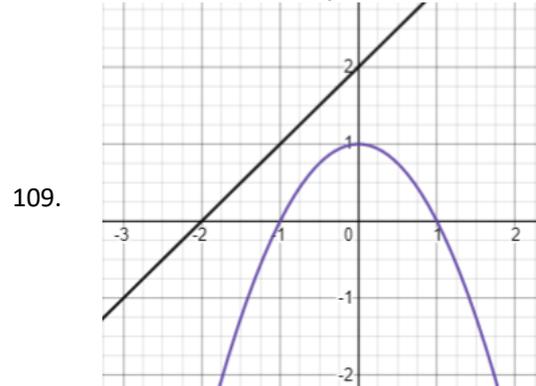
$$(-1, -4)$$

105.

$$(-1, -1) \text{ y } (\frac{7}{5}, \frac{59}{25})$$

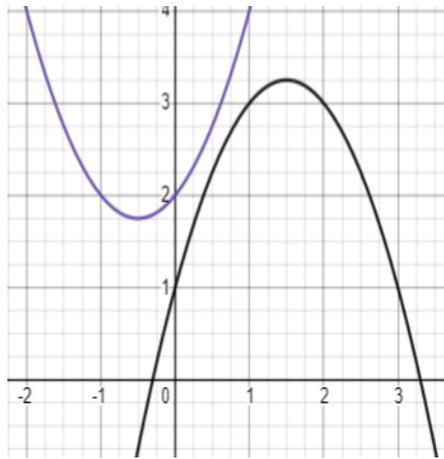
107.

$$(1, -1) \text{ y } (-2, -1)$$



Respuestas a los problemas impares

No tiene solución en el dominio de los reales. Las curvas no se interceptan.



111.

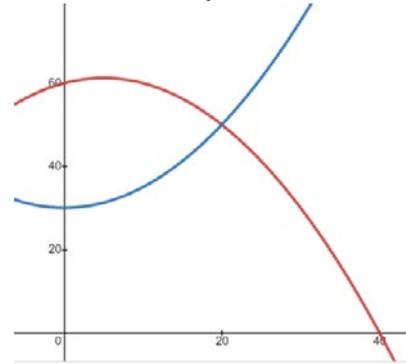
No tiene solución en el dominio de los reales. Las curvas no se interceptan.

- 121. $(-3, -1, 0)$
- 123. $(-3, 0, 2)$
- 125. $(-2, 0, 2)$
- 127. $(-4, 0, 2)$
- 129. $(-3, -1, 0, 3)$
- 131. $(-1, 1)$
- 133. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
- 135. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
- 137. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$
- 139. $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
- 141. 4.000 celulares, 500 celulares

Sección 2.4

- 1. $\frac{5\pi}{36}$
- 3. $\frac{2\pi}{15}$
- 5. $\frac{11\pi}{6}$
- 7. π
- 9. $\frac{10\pi}{9}$
- 11. 120°
- 13. 216°
- 15. 480°
- 17. 45°
- 19. $b = 1; c = \sqrt{2}; \beta = 45^\circ$

2.000 relojes, USD 50



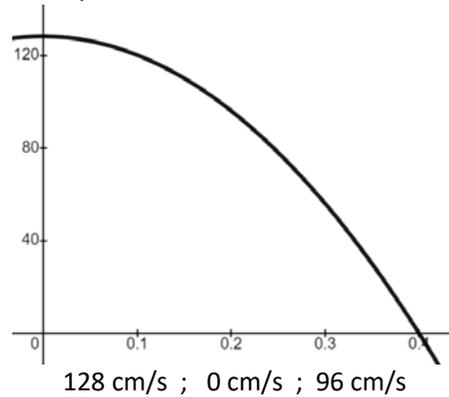
143.

$(12, 15.88572) / (36, 18.26388)$
 (60, ya tocó el suelo)
 Alcance 50,9m Altura máxima: 22,1m

145.

147.

5000 zapatillas



149

128 cm/s ; 0 cm/s ; 96 cm/s

- 21. $b \approx 7.96; c \approx 9.97; \beta = 53^\circ$
- 23. $a \approx 24.73; c \approx 26.31; \alpha = 80^\circ$
- 25. $a \approx 25.71; b \approx 30.64; \beta = 50^\circ$
- 27. $a \approx 25.71; b \approx 30.64; \beta = 50^\circ$
- 29. $b \approx 4.20; c \approx 7.32; \alpha = 55^\circ$
- 31. $a \approx 4.10; b \approx 11.28; \alpha = 20^\circ$
- 33. $c = 20; \alpha \approx 36.87; \beta \approx 53.13^\circ$
- 35. $a = 6\sqrt{5}; \alpha \approx 48.19^\circ; \beta \approx 41.81^\circ$
- 37. $b = 4\sqrt{13}; \alpha \approx 59^\circ; \beta \approx 31^\circ$
- 39. $c \approx 1.29; \beta = 50^\circ; \gamma = 80^\circ$
- 41. $c \approx 9.61; \alpha \approx 70.76^\circ; \gamma = 49.13^\circ$
- 43. $c \approx 15.00; \beta \approx 48.73; \gamma = 61.27^\circ$
- 45. $a \approx 12.09; \alpha \approx 65.95; \beta \approx 49.05;$

Respuestas a los problemas impares

47. $p \approx 8.16; \beta \approx 29.66; \gamma = 30.34$

49. $p \approx 3.52; \alpha \approx 137.12; \beta = 22.82$

51. $m \approx 17.3; \alpha \approx 37.6; \beta = 118.4$

69.
$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,$$
$$\theta = 2\pi n$$

71.
$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = 2\pi n, \quad x = \pi + 2\pi n,$$

73.
$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

75.
$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = 2\pi n$$

77.
$$\theta = \pi n, \quad \theta = \frac{2\pi}{3} + \pi n,$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} + \pi n$$

79.
$$\theta = \pi + 4\pi n, \quad \theta = 3\pi + 4\pi n,$$
$$\theta = \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, \quad \theta = \frac{10\pi}{3} + 4\pi n$$

81.
$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

83.
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \quad x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

85.
$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

87.
$$x = 101.95285^\circ + 360^\circ,$$
$$x = -101.95285^\circ + 360^\circ$$

95. $h = 300.22m \quad \theta = 36.89^\circ$

97. $d = 1767.15m$

$d_{B1} = d_{B3} = 63.74ft$

99. $d_{B2} = 67.28ft$

$\theta_{B1} = \theta_{B3} = 86.73^\circ$

$\theta_{B2} = 180^\circ$

100. $d = 701,68 km \quad \theta = 8^\circ 42' 13.78''$

SECCIÓN 2.5

12. $x \approx 2.32192$

13. $x \approx -6.41902$

15. $x \approx -0.63151$

17. $x \approx 0.57562$

19. $x \approx -0.40711$

21. $x \approx \pm 0.60751$

23. $x \approx -0.35835$

25. $x = 1$

27. $x = 3$

29. $x = 3$

31. $x = 2$

32. $x = -2$

33. $x = -5$

35. $x = 9$

37. $x = 1000$

39. $x = 4$

41. $x \approx 6.38905$

43. Sin solución para los reales

45. $x \approx 2.27491$

47. $x = 512$

49. $x \approx 2.61803$

51. 720, 1524, 2217, abril de 2028

53. 26.23°C, miente

55. 2 personas, 270 personas, 15 de abril

Sección 2.6

1. \$1,040 ; \$1.120 ; \$1.026,667

2. \$12,168,000 ; \$ 12.840.000 ; \$15.360.000

3. € 300

4. USD 1.800.

5. 6 meses

6. 20 meses

7. 3%

8. 20%

9. 6 meses

Respuestas a los problemas impares

- | | |
|--|---|
| <p>10. 25 años</p> <p>11. \$1,125.51 \$1,126.49
\$1,126.99 \$1,127.33</p> <p>12. \$370,386.00 \$375,182.59
\$379,576.50 \$380,459.75</p> <p>13. 12.36% 12.55% 12.68%
12.73% 12.75%</p> <p>14. 9.20% 9.31% 9.38%
9.41% 9.42%</p> <p>15. 39.24% 41.16% 42.58%
43.16% 43.31%</p> <p>16. El primer banco por la tasa efectiva de menor valor</p> <p>17. 6 años 9 meses.</p> <p>18. € 21,277.79</p> <p>19. € 21,484.51</p> <p>20. 5 años 1 mes.</p> <p>21. 17.45%</p> <p>22. 35.16%</p> <p>23. \$116,798,679</p> <p>24. \$ 70,396,635.98</p> <p>25. 2 años 5 meses</p> | <p>26. Fondo Americano. En cuatro años rinde mas</p> <p>27. EL CDT, da un 3,32 veces la inversión</p> <p>28. 11.36% 5.53% 1.81%
0.41% 0.06%</p> <p>29. 5,83% 2.87% 0.95%
0.22% 0.03%</p> <p>30. \$ 96,838,299</p> <p>31. \$ 116,205,958</p> <p>32. \$ 4,646,467.13 + \$32,323,356.31 =
\$ 36,969,823.44</p> <p>33. \$ 5,959,382.83 + \$ 31,920,269 =
\$ 37,879,652.08</p> <p>34. \$ 37,221,219</p> <p>35. \$ 792,782.02</p> <p>36. \$ 602,236.85</p> <p>37. Préstamo \$ 47,365,016
Cuota inicial \$ 37,634,984
15 años \$ 59.156.045</p> <p>38. 20 años \$ 66.686.972
25 años \$ 71.496.973</p> |
|--|---|

39.

Final Periodo	Cuota	Intereses	Abono capital	Deuda
0				\$ 3,600,000.00
1	655,402.59	\$ 93,000	\$ 562,402.59	\$ 3,037,597.41
2	655,402.59	\$ 78,471	\$ 576,931.32	\$ 2,460,666.09
3	655,402.59	\$ 63,567	\$ 591,835.38	\$ 1,868,830.71
4	655,402.59	\$ 48,278	\$ 607,124.46	\$ 1,261,706.24
5	655,402.59	\$ 32,594	\$ 622,808.51	\$ 638,897.73
6	655,402.59	\$ 16,505	\$ 638,897.73	\$ 0.00

Termina pagando por el celular \$ 3,932,416.

40. La cuota del TV queda en $(\$ 156,795.85 + \$20,000 + \$8,000) \cdot 36 = \$ 6,652,650.64$

BIBLIOGRAFÍA Y FUENTES ADICIONALES DE CONSULTA

A continuación se presenta una selección cuidadosa de libros de matemáticas que ha moldeado y enriquecido la propia comprensión de los autores, siendo para cada uno de estos no solo una recomendación, sino una ventana hacia perspectivas enriquecedoras y abordajes innovadores; al sumergirse en esta bibliografía, se encontrará no solo conocimiento adicional, sino también la oportunidad de explorar las ideas desde diferentes ángulos y descubrir nuevas facetas que tal vez no se haya podido cubrir en profundidad en este texto; este listado tiene desde clásicos que han resistido el paso del tiempo hasta contribuciones contemporáneas que han revolucionado el entendimiento de las matemáticas.

Esta bibliografía quiere rendir un tributo a través de un humilde reconocimiento a los múltiples autores que han influenciado este libro y desde luego a sus servidores, quienes, de corazón, desean que también les sirvan como faros y fuentes inagotables de inspiración a medida que continúan su propio viaje en el asombroso mundo del cálculo.

1. Aguilar Márquez, A., Bravo Vásquez, F. V., Gallegos Ruiz, H. A., Cerón Villegas, M., & Reyes Figueroa, R. (2009). **Aritmética y Álgebra** (1 ed.). México: Prentice Hall.
2. Alan Beer, G. (1985). **Matemáticas aplicadas para economía y negocios**. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
3. Ángel, A. R., y Runde, D. C. (2019). **Álgebra Intermedia** (9 ed.). México: Pearson Educación.
4. Anton, H. (2009). **Cálculo. Con trascendentes tempranas**. México: Limusa: John Wiley & Sons.
5. Arya, J., & Lardner, R. W. (2013). **Matemáticas aplicadas a la administración y la economía** (5 ed.). México: Pearson Educación.
6. Aufmann, R. N., & Lockwood, J. S. (2013). **Algebra Intermedia** (8 ed.). México: Cengage Learning.
7. Barnett, R. A. (1998). **Algebra y geometría**. Bogotá: McGraw-Hill.
8. Barnett, R. A., Ziegler, M. R., Byleen, K. E., & Sobocki, D. (2005). **Precálculo** (7 ed.). México: Limusa.
9. Cruz Hernández, L. L., y Cruz Huitrón, D. B. (2021). **100 lecciones de precálculo**. México: Leitmotiv.
10. Demana, F. D., Waits, B. K., Foley, G. D., & Kennedy, D. (2007). **Precálculo. Gráfico, numérico y algebraico** (7 ed.). México: Pearson Educación.
11. Eslava E., M. E. (1996). **Introducción a las matemáticas universitarias**. Bogotá: McGraw-Hill.
12. Goodman, A. (1996). **Algebra y trigonometría con geometría analítica**. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Respuestas a los problemas impares

13. Haeussler, E., Paul, R., y Woold, R. C. (2007). **Precálculo**. México: Pearson Educación.
 14. Kreyszig, E. (2003). **Matemáticas avanzadas para la ingeniería**. México: Limusa.
 15. Larson, R. (2018). **Precálculo. Introducción a las matemáticas universitarias** (8 ed.). México: Cengage Learning.
 16. Larson, R., & Hostetler, R. (2018). **Precálculo (7 ed.)**. México: Reverté.
 17. Larson, R., Hostetler, R., y Edwards, B. H. (2006). **Cálculo**. México: McGraw-Hill.
 18. Leithold, L. (2004). **El Cálculo**. México: Oxford University Press.
 19. Murcia Londoño, E., y Henao López, J. C. (2021). **Contextos actuales de la enseñanza. Reflexiones de un proceso investigativo en torno a las matemáticas, la pedagogía y las tecnologías de la información y de la comunicación**.
 20. Oré, F. A. C. (2015). El último teorema de Fermat-Wiles. *Horizonte de la Ciencia*, 5(9), 211-218.
 21. Sáenz, J. (2022). **Precálculo para todos**. Lima-Perú: Hipotenusa.
 22. Smith, R. T., & Minton, R. B. (2003). **Cálculo**. Madrid: McGraw-Hill.
 23. Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2017). **Precálculo: matemáticas para el cálculo (6 ed.)**. México: Cengage Learning.
 24. Sullivan, M. (1997). **Precálculo**. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
 25. Swokowski, E. W. (2011). **Álgebra y trigonometría con geometría analítica**. México: Cengage Learning.
 26. Tan, S. T. (2012). **Matemáticas aplicadas a los negocios la ciencia y la vida** (5 ed.). México: Cengage Learning.
 27. Úbeda Flores, M., y Gámez Cámara, M. Á. (2019). **Matemáticas aplicadas a la economía**. Madrid: Universidad de Almería.
 28. Wrede, R. C., & Spiegel, M. R. (2004). **Cálculo Avanzado**. Madrid: McGraw Hill.
 29. Zill, D. G. (2008). **Matemáticas avanzadas para ingeniería**. México: McGraw-Hill.
-



VIGILADO MINEDUCACIÓN

Universidad
CATÓLICA
de Pereira

Editorial