Cap. 1. ECUACIONES E INECUACIONES

El principal objetivo de este capítulo es desarrollar las habilidades y destrezas matemáticas para resolver ecuaciones tanto lineales como no lineales y dentro de ellas ubicarlas en la solución de problemas en contextos reales. Para esto se introducen ecuaciones con cantidades reales, racionales, irracionales con el fin de poder ampliar el espectro de posibilidades de aplicación a la vida cotidiana.

SECCIÓN 1.1 ECUACIONES LINEALES

Una ecuación es una expresión algebraica que relaciona una, dos o más variables y que tiene una igualdad respecto de una cantidad u otra expresión matemática. Son ejemplos de ecuaciones los siguientes

$$x + 1 = 3 \qquad x^2 + 2x - 2 = 5 \qquad \operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

La primera es una ecuación lineal, la segunda una ecuación cuadrática y la tercera una ecuación trigonométrica; nótese que en cada una hay cantidades, variables y operaciones, pero lo más importante y que permite en una primera instancia identificarlas como ecuación, es la igualdad. Estas tres hacen parte de una gran variedad de ecuaciones, las cuales comparten algunas características y propiedades importantes, a saber

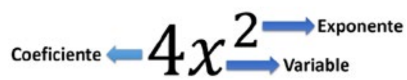
***Teorema 1.1. Propiedades de las igualdades**: para todos los números reales a, b y c se cumplen las siguientes propiedades:*

a.	$a = a$	Propiedad reflexiva
b.	Si $a = b$ entonces $b = a$	Propiedad simétrica
c.	Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$	Propiedad transitiva

Cuando una expresión tiene varias partes sumadas o restadas, cada una de las partes se denomina término; para ello tómese como ejemplo la expresión algebraica

$$\underbrace{4x^2}_{\text{Término}} + \overbrace{4xy}^{\text{Término}} - \underbrace{\frac{5x}{3y}}_{\text{Término}} + \overbrace{y}^{\text{Término}} \underset{\text{Igualdad}}{=} \overbrace{3}^{\text{Término}}$$

Aquí claramente se puede apreciar una expresión con cinco términos y una igualdad, por otro lado, la parte numérica que precede a una variable en un término se denomina coeficiente y el número que está en la parte ligeramente superior es el exponente, quien potencia según sea el número de veces que indica.



Entendiendo que una ecuación es una proposición matemática con una igualdad, las soluciones, polos o raíces son el conjunto de valores que la hacen cierta.

Ejemplo 1.1. *Compruebe que las raíces que se indican son o no soluciones de las expresiones algebraicas.*

a. $2x + 1 = -5$ *siendo* $x = 1$ *y* $x = -3$
b. $x^2 + 2x = 3$ *siendo* $x = 1$ *y* $x = -3$

Solución*: para comprobar que una raíz es solución de una ecuación, basta con reemplazarla y corroborar que se cumple la igualdad.*

a. $2x + 1 = -5 \;\rightarrow\; 2(1) + 1 = -5 \;\rightarrow\; 2 + 1 = -5 \;\rightarrow$
$\rightarrow\; 3 = -5$

Como 3 no es igual a –5, se puede asegurar con toda certeza que x=1 no es solución para la primera ecuación, en el segundo caso, al reemplazar se obtiene:

$$2x + 1 = -5 \;\rightarrow\; 2(-3) + 1 = -5 \;\rightarrow\; -6 + 1 = -5 \;\rightarrow\; -5 = -5$$

En este caso, se llega a una verdad y se concluye que x=–3, sí es solución para la primera expresión.

b. *Para este caso, se debe volver a reemplazar para analizar la posibilidad.*

$$x^2 + 2x = 3 \rightarrow (1)^2 + 2(1) = 3 \rightarrow 1 + 2 = 3 \rightarrow 3 = 3$$

Llegando a una verdad, luego x=1, sí es solución para la segunda expresión. Analizando el segundo valor se tiene

$$x^2 + 2x = 3 \;\rightarrow\; (-3)^2 + 2(-3) = 3 \;\rightarrow\; 9 - 6 = 3 \;\rightarrow\; 3 = 3$$

Lo que comprueba que x=–3 también es solución para la segunda ecuación.

En esta sección se trabajan las ecuaciones lineales, sin embargo, las propiedades que se plantean a continuación pueden servir para resolver otros tipos de ecuaciones, de ahí la importancia que el lector las estudie y aplique con cuidado.

Definición 1.1. Ecuación lineal: una ecuación lineal es una expresión matemática que se escribe de la forma

$$ax + b = c \qquad \text{[Ec. 1.1]}$$

Con a, b y c constantes reales con $a \neq 0$

Resolver una ecuación, es precisamente encontrar el conjunto de valores que la hacen cierta, es decir los valores para los cuales se cumple la igualdad; en el ejemplo 1.1., estos valores son entregados sin embargo es más común que sea el usuario el que los busque. Para ello se usan las siguientes propiedades:

Teorema 1.2. Propiedades para la solución de ecuaciones lineales. *Sea a, b y c constantes reales, entonces:*

1. *Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$* — *Propiedad aditiva*
2. *Si $a = b$ entonces $a - c = b - c$* — *Propiedad aditiva*
3. *Si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c$* — *Propiedad multiplicativa*
4. *Si $a = b$ entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ Para todo $c \neq 0$* — *Propiedad multiplicativa*

Ejemplo 1.2. *Resolver la siguiente ecuación:*

$$2(4x + 3) - 2 = 3x + 14$$

Solución*: eliminando los paréntesis de la expresión se tiene:*

$$8x + 6 - 2 = 3x + 14$$

Sumando términos semejantes se llega a la expresión:

$$8x + 4 = 3x + 14$$

Aplicando la propiedad 2 del teorema 1.2., y escogiendo intencionadamente el 4 para restar a ambos lados se obtiene:

$$8x + 4 - 4 = 3x + 14 - 4$$

Lo que lleva a la expresión

★★★★★★★★★★

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

CONMUTATIVA: El orden de los sumandos (o multiplicandos) no altera el resultado

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

ASOCIATIVA: La forma como se asocie los sumandos (o multiplicandos) no altera el resultado

$$\begin{aligned} a + b + c &= (a + c) + b \\ &= (a + b) + c \\ &= a + (b + c) \end{aligned}$$

$$abc = (ab)c = (ac)b = (bc)a$$

DISTRIBUTIVA: La multiplicación de una suma o resta es la suma o resta de las multiplicaciones.

$$a(b \pm c) = ab \pm ac$$

★★★★★★★★★★

Resolver la ecuación

$$10m - 5(2 - m) = 3[4 + 3(m + 1)] + 11$$

Solución

$$8x = 3x + 10$$

Luego restando a ambos lados de la ecuación 3x usando la misma propiedad, se llega a:

$$8x - 3x = 3x + 10 - 3x \quad \rightarrow \quad 5x = 10$$

Y al dividir ambos lados de la ecuación entre 5, aplicando la propiedad número cuatro del teorema 1.2., se encuentra la raíz o solución de la ecuación del problema.

$$\frac{5x}{5} = \frac{10}{5} \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Aunque en este caso la solución dio un valor entero, normalmente esto no es así. Una vez se adquiera práctica y dominio del teorema 1.2., se puede concluir que para encontrar la solución de una ecuación –por lo menos de una ecuación lineal–, se debe despejar la variable –dejarla sola o aislada en un lado de la ecuación– por lo que van apareciendo estrategias más simples y directas en comparación con operaciones complementarias e inversas.

ESTRATEGIAS PARA DESPEJAR UNA VARIABLE

1. Elimine los paréntesis que sea fáciles de reducir.
2. Reduzca términos semejantes
3. La cantidad que únicamente sume a un lado de la ecuación, pasa a restar el otro lado.
4. La cantidad que únicamente reste a un lado de la ecuación, pasa a sumar el otro lado.
5. La cantidad que únicamente multiplique a un lado de la ecuación, pasa a dividir al otro lado.
6. La cantidad que únicamente divida un lado de la ecuación, pasa a multiplicar al otro lado.

En el problema 1.2., una vez reducida la expresión, para el despeje se mueven las cantidades de interés.

Pasa a restar

$$8x + 4 = 3x + 14$$

Pasa a restar

Quedando:

$$8x - 3x = 14 - 4 \quad \rightarrow \quad 5x = 10 \quad \rightarrow \quad x = \frac{10}{5} \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Aquí nótese que el 5 está multiplicando exclusivamente a la variable, luego pasa a dividir al otro lado llegando a la misma respuesta.

Ejemplo 1.3. *Resuelva las siguientes ecuaciones:*

a. $\dfrac{5x-17}{2}=8-3x$ b. $\dfrac{w}{2}+1=\dfrac{3}{2}(w+1)$

c. $\sqrt{2}m-3=m+\dfrac{1}{2}$ d. $0.1(q-2)=\dfrac{3q-4}{5}$

Solución: aplicando las estrategias para despejar una variable se tiene.

a. De ser posible, se deben quitar las fracciones, aquí se ve que el 2 está únicamente dividiendo a todo un lado, luego puede pasar a multiplicar al otro.

$$\frac{5x-17}{2}=8-3x \quad\rightarrow\quad 5x-17=2(8-3x)$$

Quitando los paréntesis se llega a:

$$5x-17=16-6x$$

Moviendo el 17 a la derecha y trayendo el 6x a la izquierda se tiene:

$$5x+6x=16+17 \quad\rightarrow\quad 11x=33 \quad\rightarrow\quad x=\frac{33}{11}$$

Finalmente se llega a la respuesta $x=3$.

b. En este caso se tienen cantidades fraccionarias,

$$\frac{w}{2}+1=\frac{3}{2}(w+1) \quad\rightarrow\quad \frac{w}{2}+1=\frac{3w}{2}+\frac{3}{2}$$

Moviendo los términos para llegar a cantidades semejantes se tiene:

$$\frac{w}{2}-\frac{3w}{2}=\frac{3}{2}-1 \quad\rightarrow\quad -2w=\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad w=\frac{\frac{1}{2}}{-2}$$

Por la ley de extremos y medio se tiene entonces que $w=\frac{1}{4}$.

c. En esta expresión hay cantidades radicales, sin embargo, el procedimiento sigue siendo equivalente, moviendo a la izquierda las variables y a la derecha los términos independientes, se logra:

$$\sqrt{2}m-3=m+\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad \sqrt{2}m-m=\frac{1}{2}+3$$

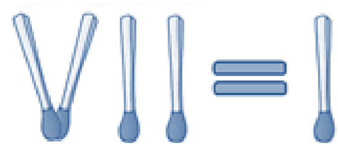
Resolver la ecuación

$$3\left(1+\frac{3r+4}{2}\right)+\cdots$$
$$-2\left(\frac{1}{3}+\frac{3r+4}{6}\right)=5r+4$$

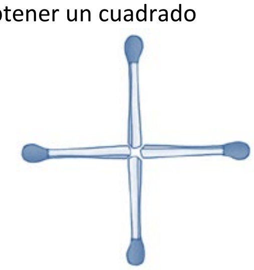
SOLUCION

EJERCICIOS DE LÓGICA

Mover solo un fósforo, de tal forma que la igualdad sea verdadera.



Moviendo solo un fósforo, obtener un cuadrado



Factorizando la m se obtiene:

$$(\sqrt{2}-1)m = \frac{7}{2} \quad \rightarrow \quad m = \frac{7}{2(\sqrt{2}-1)}$$

Sin embargo, es frecuente en matemáticas no dejar cantidades con radicales en el denominador, para lo cual se usa el procedimiento denominado racionalización que precisamente busca esto. Multiplicando denominador y numerador por el conjugado del denominador se obtiene:

$$\frac{7}{2(\sqrt{2}-1)} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7(\sqrt{2}+1)}{2\left(\sqrt{2^2}-1^2\right)} = \frac{7(\sqrt{2}+1)}{2(1)} = \frac{7\sqrt{2}}{2} + \frac{7}{2}$$

Por tanto, la solución es:

$$m = \frac{7\sqrt{2}}{2} + \frac{7}{2}$$

*d. El último caso tiene cantidades con parte decimal, por tanto, el problema así siguiere que se trate, m*oviendo el 5 que está dividiendo toda la expresión se obtiene:

$$0.1(q-2) = \frac{3q-4}{5} \quad \rightarrow \quad 0.1(q-2)\cdot 5 = 3q-4$$

El orden de los factores en una multiplicación es indiferente, por tanto

$$0.5(q-2) = 3q-4 \quad \rightarrow \quad 0.5q-1 = 3q-4$$

Despejando las variables se llega a:

$$0.5q - 3q = -4+1 \quad \rightarrow \quad -2.5q = -3 \quad \rightarrow \quad q = \frac{-3}{-2.5} = \frac{6}{5} = 1.2$$

Por tanto, la solución, polo o raíz para este problema es q=1.2.

Generalmente las ecuaciones lineales tienen una única solución, aunque es posible que no tengan solución o que tengan infinitas soluciones. EL siguiente caso ilustra una ecuación que no tiene solución.

$$3x+2 = 2(x-3)+x$$

Se invita al lector a que visite el enlace con código QR, para que note la inconsistencia a la cual se llega al final del problema.

YouTube

Resolver las siguientes ecuaciones y explicar la naturaleza de las respuestas

$$3x+2 = 2(x+1)+1$$

$$3x+2 = 2(x-3)+x$$

SOLUCION

Ejercicios sección 1.1. Ecuaciones lineales

Determine si la raíz planteada es solución para la ecuación que se muestra

1.	$\frac{x}{2}+3=2$	$x=-2$ $x=2$
2.	$4x+1=9$	$x=2$ $x=1$
3.	$x^2+x-2=0$	$x=1$ $x=2$
4.	$2(x+3)-3x+2=3x+4$	$x=-1$ $x=1$
5.	$x^2+x^3-10=2$	$x=0$ $x=2$
6.	$\frac{3+4x}{x+2}=3$	$x=-4$ $x=3$
7.	$x+\frac{3}{2}=5x$	$x=-4$ $x=3$
8.	$6+\frac{4x+1}{x+1}=9$	$x=2$ $x=3$
9.	$x^2+13x+30=0$	$x=10$ $x=3$
10.	$\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{4}$	$x=1$ $x=2$

Simplifique cada una de las siguientes expresiones, en caso de no poderse, indíquelo

11. $xy+3y-2x+5xy-6x$
12. $a^2+2ab+b^2-3(a^2-3ab+b^2)$
13. $4x+3y+5x-6y+2x+3y$
14. $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y-\frac{4}{5}x+\frac{1}{3}y-5xy$
15. $1.2a+3b-2(2.5a-2.7b)+4ab-3ab$
16. $2[2a-3(a-b)+4(2a-3b)]-a$
17. $\frac{1}{2}m^2n-\frac{1}{3}mn^2+\frac{3}{4}m^2n+\frac{1}{2}mn^2$
18. $\sqrt{2}p+\sqrt{3}q+\sqrt{8}p-\sqrt{27}q$
19. $\sqrt{2}xy+\sqrt{8}xy-\sqrt{32}xy+1$
20. $\sqrt{12}r+1.5s-\sqrt{3}r-2.2s$

Resuelva cada una de las ecuaciones indicadas, mostrando todos los procedimientos utilizados.

21. $2x+3=15$
22. $4-3x=-11$
23. $2x-4=20$
24. $5x+8=38$
25. $6x+12=36$
26. $18-7x=4$
27. $3m+1=-5$
28. $-3q+2=17$
29. $10n-3=17$
30. $1-n=12$
31. $1.2x-3.6=2.4$
32. $2.2m+1.3=2.1$
33. $3+4.6r=2.4$
34. $3.9u+1.7=9.4$
35. $6.36r+4.56=20.17$
36. $\sqrt{2}x+3=\sqrt{3}$
37. $\sqrt{3}m-\sqrt{2}=\sqrt{5}$
38. $\sqrt{2}+\sqrt{3}y=6$
39. $\sqrt{10}+3d=8\sqrt{3}$
40. $\sqrt{200}n+\sqrt{300}=\sqrt{150}$

Encuentre la variable x de las siguientes expresiones algebraicas

41. $ax+b=c$
42. $ax-b=c$
43. $a-bx=c$
44. $a+bx=c$

Entre los ceros, raíces o polos de las siguientes expresiones algebraicas

45. $2x+3=5x-6$
46. $-3x+8=2x-12$
47. $3m-6=-3m+6$
48. $1+2y=5+y$
49. $12+4q=-24-2q$
50. $5x+3=-27-10x$
51. $2-3(4+x)=10$
52. $12+2(1+2x)=3x$
53. $3(x+2)+2(x+1)=8$
54. $2+3(5-x)-3(2x+1)=6$
55. $-2(x+1)+4(2-x)=-3(x+1)+20$
56. $6(x+1)-2(x+3)+40=2(3+4x)$
57. $10m-5(2-m)=3[4+3(m+1)]+11$
58. $3[3(5+(6-2m)+m)]=12$
59. $2[m-2(m+3(m+1))]=2(m+1)$

60. $3n - 4\left[3 - 2\left(n - 2(n+3)\right)\right] = 8$
61. $120 - 2\{-3[n + 2(2n+1) + 4] + 3\} = 1$
62. $2 - 2\{n + 2[2 + 2(2n+2)] + 2\} = 40$
63. $12 - 3[4 + 3(2y+1)] = 2(3 - y)$
64. $1 + 2[2q - 2(3+q)] = -3\left(8 + 2(q+1)\right)$
65. $6\alpha - 2(4 - \alpha) = -3[1 - 2(\alpha + 1)] + 20$

Resuelva cada una de las siguientes expresiones algebraicas, indique claramente el procedimiento utilizado.

66. $\frac{2}{3}x + 4 = \frac{x+1}{2}$
67. $\frac{a+3}{4} = \frac{a+1}{-2}$
68. $x + 3 = \frac{x+1}{2}$
69. $5x + 2 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2x+1}{3}\right)$
70. $3\left[\frac{x+1}{2} + \frac{2x-3}{4}\right] = 2$
71. $\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{4} = 1$
72. $\frac{2a+3}{4} = \frac{4a-1}{3} - \frac{3a+2}{2}$
73. $\frac{3x}{4} + 1 = \frac{5x+3}{2} - 1$
74. $m + \frac{2m}{3} + \frac{4m}{5} = -2$
75. $\frac{w}{4} + 0.01 = \frac{3w+3}{2} - 0.02$
76. $r + \frac{3}{2}r = \frac{4r-1}{2} + \frac{3r+1}{3}$
77. $\left(3 + \frac{5r-1}{3}\right)2 + \left(\frac{6r+1}{4} + 2\right)3 = r$
78. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 1$
79. $\frac{3p+1}{2} + \frac{p-2}{3} - \frac{2p-3}{4} = 2\left(\frac{p-2}{3} - \frac{4p+5}{6}\right)$
80. $\frac{z+1}{2} + 3 = \frac{z-1}{3} + 1$
81 $3\left(1 + \frac{3r+4}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{3r+4}{6}\right) = 5r + 4$

.

SECCIÓN 1.2
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones simultáneas es un conjunto de dos o más ecuaciones que contienen dos o más cantidades desconocidas y que especifican condiciones que estas cantidades desconocidas deben satisfacer al mismo tiempo en todas las ecuaciones; para comprender mejor lo anterior, considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.4. *Comprobar que* $x = 2$ *e* $y = -1$ *satisfacen el sistema:*

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x - 3y &= 5 \end{aligned}$$

Solución*: reemplazando los valores en la primera ecuación se tiene:*

$$2(2) + (-1) = 3 \;\rightarrow\; 4 - 1 = 3 \;\rightarrow\; 3 = 3$$

Haciendo lo mismo para la segunda ecuación se logra

$$(2) - 3(-1) = 5 \;\rightarrow\; 2 + 3 = 5 \;\rightarrow\; 5 = 5$$

Por tanto, x e y deben tomar simultáneamente 2 y –1 respectivamente para volver cierta la ecuación del problema.

Existen diversos métodos para encontrar los valores simultáneos que vuelven ciertas el conjunto de ecuaciones y que se basan por lo general en reducir el número de variables y ecuaciones a través de una eliminación sistemática de las estas; sin embargo, en la sección solamente se plantean dos métodos analíticos; la eliminación por sustitución y la eliminación por reducción.

★★★★★★★★★★

Sistemas $m \times n$

Cuando por ejemplo se habla de un sistema 2x2 o 3x2, se hace referencia a sistemas de 2 ecuaciones y dos variables en el primer caso, o tres ecuaciones y dos variables en el segundo.

Para que un sistema tenga solución completa, es necesario, pero no suficiente, que el número de ecuaciones sea superior o por lo menos igual al número de variables.

Si un sistema tiene más variables que ecuaciones, se dice que el sistema es indeterminado; en este caso, no hay suficientes restricciones proporcionadas por las ecuaciones para determinar un valor único para cada variable; esto tiene como resultado que existan múltiples soluciones posibles o incluso infinitas soluciones

★★★★★★★★★★

Eliminación por sustitución

Este método consiste básicamente en tomar la variable en una ecuación y reemplazarla en la otra; el algoritmo se puede describir como:

Paso 1: Escoger cualquier ecuación y una incógnita
Paso 2: Despejar la incógnita en la ecuación escogida
Paso 3: Sustituir la expresión que representa su valor en la otra ecuación.
Paso 4: Resolver y reducir la nueva ecuación, con lo cual se obtiene el valor de la incógnita no eliminada.
Paso 5: Sustituir el valor hallado en la expresión del paso 2 y simplificar

Para ejemplificar este método, tómese como ejemplo la situación planteada en el ejemplo anterior

Ejemplo 1.5. *Resolver por sustitución.*

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \quad (a) \\ x - 3y &= 5 \quad (b) \end{aligned}$$

Solución: *aplicando los pasos se tiene:*

Paso 1: *Se escoge –arbitrariamente– la primera ecuación y de ella la variable x.*

Paso 2: *Se despeja la variable seleccionada.*

$$2x + y = 3 \;\rightarrow\; x = \frac{3 - y}{2} \quad (c)$$

Paso 3: *Se sustituye (c) en la otra ecuación –ecuación (b)–*

$$\left(\frac{3 - y}{2}\right) - 3y = 5$$

Paso 4: *Reduciendo esta expresión se obtiene.*

$$\frac{3 - y}{2} - \frac{3y}{1} = 5 \;\rightarrow\; \frac{3 - y - 6y}{2} = 5 \;\rightarrow\; \frac{3 - 7y}{2} = 5$$

Despejando la variable

$$\frac{3 - 7y}{2} = 5 \;\rightarrow\; 3 - 7y = 10 \;\rightarrow\; -7y = 7 \;\rightarrow\; y = \frac{7}{-7} \;\rightarrow\; y = -1$$

Paso 5: *Se reemplaza y=–1 en la ecuación (c) del paso 2, con lo cual se obtiene.*

$$x = \frac{3 - y}{2} \;\rightarrow\; x = \frac{3 - (-1)}{2} \;\rightarrow\; x = \frac{4}{2} \;\rightarrow\; x = 2$$

Con lo cual las soluciones del sistema son x = 2 e y = –1 que corresponde exactamente con la solución planteada por el problema 1.4.

★★★★★★★★★★

Ecuaciones Equivalentes

Las ecuaciones equivalentes son aquellas que se obtienen de otra, por medio de una ampliación o una reducción

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 4x + 6y &= 8 \\ 6x + 9y &= 12 \end{aligned}$$

Nótese que las dos últimas ecuaciones se obtienen al multiplicar la primera por 2 y 3 respectivamente, luego estas tres ecuaciones son equivalentes.

Una de las características importantes que tienen los sistemas equivalentes, es que NO tienen solución o tienen múltiples soluciones; a estos sistemas se les denominan LINEALMENTE DEPENDIENTES.

★★★★★★★★★★

Eliminación por igualación

Este método de solución de sistemas de ecuaciones consiste en despejar de un par de ecuaciones, la misma variable para luego ser igualadas; dependiendo de la naturaleza del problema, un método puede resultar más atractivo que otro en el sentido que simplifica la cantidad de operaciones que se tienen que hacer para encontrar el valor de las incógnitas; por ello es recomendable que el lector los maneje todos y aprenda a identificar la conveniencia de aplicar un método u otro.

Paso 1: Escoger cualquier incógnita de un par de ecuaciones
Paso 2: Despejar la incógnita escogida en ambas ecuaciones.
Paso 3: Igualar la variable escogida lo que implica igualar los respectivos despejes.
Paso 4: Resolver y reducir la nueva ecuación, con lo cual se obtiene una nueva expresión la cual tiene una variable menos.
Paso 5: Sustituir el valor hallado en cualquier ecuación del paso 2 y simplificar

Para ejemplificar este método tómense las mismas expresiones del problema 1.5.

Ejemplo 1.6. *Resolver por sustitución:*

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \quad (a) \\ x - 3y &= 5 \quad (b) \end{aligned}$$

Solución: *aplicando los pasos se tiene:*

Paso 1: *se escoge –arbitrariamente– la variable x.*

Paso 2: *se despeja la variable seleccionada en cada ecuación*

$$2x + y = 3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3 - y}{2} \quad (c)$$

$$x - 3y = 5 \quad \rightarrow \quad x = 5 + 3y \quad (d)$$

Paso 3: *se igualan (c) y (d)*

$$x = x \quad \rightarrow \quad \frac{3 - y}{2} = 5 - 3y$$

Paso 4: *reduciendo esta expresión se obtiene*

$$\frac{3 - y}{2} = 5 - 3y \quad \rightarrow \quad 3 - y = 2(5 + 3y) \quad \rightarrow \quad 3 - y = 10 + 6y$$

Despejando la variable.

LOS FRACTALES

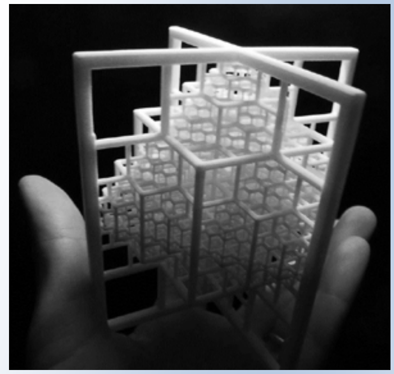


Figura 1.3. Fractales.
Imagen tomada de:
http://www.shapeways.com/shops/3Dfracta

Un fractal es un objeto geométrico o que exhibe autosimilitud a diferentes escalas; esto significa que su estructura se repite de forma similar, incluso idéntica en distintos niveles de detalle cumpliendo las siguientes propiedades

- ✓ *Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.*
- ✓ *Posee detalle a cualquier escala de observación.*
- ✓ *Es autosimilar (exacta, aproximada o estadística).*
- ✓ *Su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.*
- ✓ *Se define mediante un simple algoritmo recursivo.*

$$-y-6y=10-3 \;\rightarrow\; -7y=7 \;\rightarrow\; y=\frac{7}{-7} \;\rightarrow\; y=-1$$

Paso 5: *se reemplaza y=–1 en la ecuación (c) o (d) del paso 2, con lo cual se obtiene.*

$$x=\frac{3-y}{2} \;\rightarrow\; x=\frac{3-(-1)}{2} \;\rightarrow\; x=\frac{4}{2} \;\rightarrow\; x=2$$

Con lo cual las soluciones del sistema son x = 2 e y = –1 que son exactamente las mismas respuestas encontradas en el método anterior.

Eliminación por reducción.

Este método consiste en manipular el sistema de ecuaciones con el fin de que una de las variables coincida en magnitud, pero difiera en signo en dos ecuaciones, para que, en la suma de estas, se eliminen.

Paso 1: Escoger una variable.
Paso 2: Multiplicar la primera ecuación por el coeficiente de la variable escogida en la segunda ecuación y multiplicar la segunda ecuación por el coeficiente de la variable escogida en la primera ecuación.
Paso 3: La variable escogida debe quedar en ambas ecuaciones con el mismo coeficiente y de signo contrario, si no, cambiar el signo a cualquiera de las ecuaciones (esto equivale a multiplicar por –1 la ecuación seleccionada).
Paso 4: Sumar las dos ecuaciones, con lo cual resulta una tercera ecuación con una variable.
Paso 5: Resolver la ecuación resultante.
Paso 6: Reemplazar el valor encontrado en cualquiera de las ecuaciones originales y despejar la variable resultante.

Ejemplo 1.7. *Resolver por sustitución.*

$$\begin{aligned} 2x+y&=3 \quad (a)\\ x-3y&=5 \quad (b)\end{aligned}$$

Solución: *aplicando los pasos del método se tiene:*

Paso 1: *se escoge la variable x (puede ser la otra, la variable y).*

Paso 2: *el coeficiente que acompaña la x en la primera ecuación es 2 y en la segunda es 1, por tanto, la primera ecuación se multiplica por uno y la segunda por dos.*

$$\begin{aligned} (2x+y=3)\times 1 &\rightarrow\; 2x+y=3\\ (x-3y=5)\times 2 &\rightarrow\; 2x-6y=10\end{aligned}$$

***Paso 3**: como la variable seleccionada queda positiva en ambas ecuaciones resultantes, se multiplica por (–1) cualquiera; en este caso se toma la primera expresión.*

$$(2x+y=3)\times(-1)\quad\rightarrow\quad -2x-y=-3$$

***Paso 4**: sumando las dos ecuaciones se tiene.*

$$\begin{array}{c} -2x-y=-3 \\ \underline{2x-6y=10} \\ 0-7y=7 \end{array}$$

***Paso 5**: de la ecuación resultante queda.*

$$-7y=7\ \rightarrow\quad y=-1$$

***Paso 6**: Se reemplaza este valor en cualquiera de las ecuaciones originales, para esto se toma la segunda ecuación (b)*

$$x-3y=5\ \ \rightarrow\quad x-3(-1)=5\ \rightarrow\quad x+3=5\ \ \rightarrow\quad x=2$$

Las soluciones al sistema son x = 2 e y = –1; esto no es coincidencia, sin importar el método que se use, la solución siempre es la misma.

Análisis gráfico.

Una tercera alternativa que resulta especialmente útil en sistemas 2×2 o tal vez en sistemas 3×3 es el método gráfico, que implica obtener la gráfica de cada ecuación –*aunque la construcción de las representaciones gráficas de las funciones lineales son tema del próximo capítulo; en esta sección se adelantan algunos apartes útiles para la compresión más detallada de los sistemas de ecuaciones*–; el punto de intersección de las dos gráficas muestra la solución de todo el sistema.

***Ejemplo 1.8.** Obtener las representaciones gráficas en un mismo plano de las siguientes ecuaciones lineales.*

$$\begin{array}{c} 2x+y=3 \\ x-3y=5 \end{array}$$

***Solución**: primero se debe despejar la y, en función de la x, de cada expresión.*

$$2x+y=3\quad\rightarrow\quad y=3-2x$$

$$x-3y=5\ \ \rightarrow\ \ -3y=5-x\ \ \rightarrow\quad y=\frac{5-x}{-3}=\frac{x-5}{3}$$

Y para cada expresión se debe obtener la tabla de valores, donde los valores de x –abscisas– se escogen arbitrariamente, y los valores de y –ordenadas– se obtienen al reemplazar cada valor de x en la función correspondiente.

Para $y = 3 - 2x$ *la tabla de valores puede ser.*

X	*–3*	*–1*	*0*	*1*	*3*
y	*9*	*5*	*3*	*1*	*-3*

Para $y = \frac{x-5}{3}$ *la tabla de valores puede ser.*

x	*–3*	*–1*	*0*	*1*	*3*
y	*–2.6*	*–2*	*–1.6*	*–1.3*	*–0.6*

Graficando estos puntos sobre el plano se obtiene:

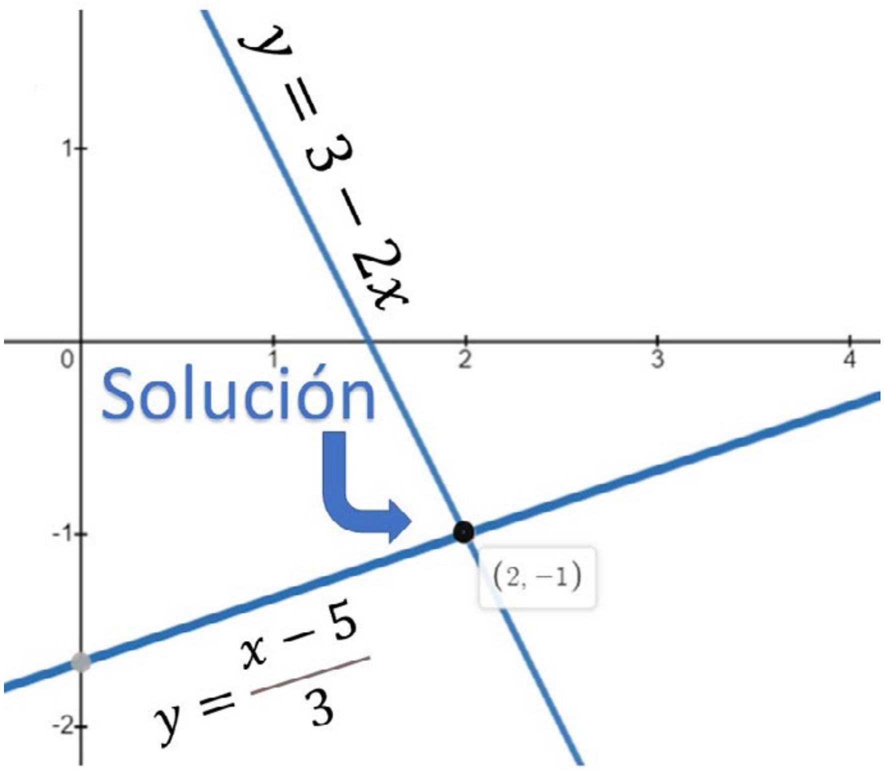


***Figura 1.4**. Solución gráfica del ejemplo 1.8.*

Nótese que el punto de corte de las dos ecuaciones $(x, y) \rightarrow (2, -1)$ *que son exactamente las mismas soluciones para el problema del sistema de ecuaciones que se viene resolviendo en esta sección.*

Los tres primeros métodos se pueden aplicar a sistemas más grandes 3×3, 4×4, …. , $N \times N$, a manera de ejemplo considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.9. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.*

$$\begin{gathered} 2x + 3y + z = 5 \\ x - y + 2z = 8 \\ 3x - 2y - 2z = 7 \end{gathered}$$

Solución: *para resolver este sistema de ecuaciones se puede utilizar cualquiera de los tres primeros métodos vistos en esta sección, sin embargo, por la naturaleza de las ecuaciones aquí presentadas, resulta más simple aplicar eliminación por reducción.*

Para ello se toman la primera y segunda ecuación y se eliminan de ellas cualquier variable, tómese la x, por ejemplo.

$$\begin{array}{ll} (2x + 3y + z = 5) \times -1 \rightarrow & -2x - 3y - z = -5 \\ (x - y + 2z = 8) \times 2 \rightarrow & \underline{\;2x - 2y + 4z = 16\;} \\ & \;0 - 5y + 3z = 11 \quad (c) \end{array}$$

Se repite este procedimiento, eliminando la misma letra para otro par de ecuaciones distintas, pueden ser la ecuación dos y la ecuación tres del problema.

$$\begin{array}{ll} (x - y + 2z = 8) \times 3 \rightarrow & 3x - 3y + 6z = 24 \\ (3x - 2y - 2z = 7) \times -1 \rightarrow & \underline{-3x + 2y + 2z = -7} \\ & \;0 - y + 8z = 17 \quad (d) \end{array}$$

Ahora se toma la ecuación (c) y la ecuación (d) y se resuelven de forma independiente; de nuevo se usa eliminación por reducción eliminando la z.

$$\begin{array}{ll} (-5y + 3z = 11) \times -8 \rightarrow & 40y - 24z = -88 \\ (-y + 8z = 17) \times 3 \rightarrow & \underline{-3y + 24z = 51} \\ & \;37y = -37 \end{array}$$

Por tanto,

$$37y = -37 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-37}{37} = -1$$

Conocido el valor de y, se puede reemplazar en la ecuación (c) o (d) para encontrar los valores de z. En este caso se usa la ecuación (d)

$$-y + 8z = 17 \quad \rightarrow \quad 1 + 8z = 17 \quad \rightarrow \quad 8z = 16 \quad \rightarrow \quad z = 2$$

Conocido ahora el valor de z y el valor de y, en las ecuaciones originales se puede encontrar el valor de x.

$$2x + 3y + z = 5 \rightarrow \; 2x + 3(-1) + 2 = 5 \; \rightarrow \; 2x - 3 + 2 = 5 \; \rightarrow \; x = 3$$

Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{gathered} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x - 2y - 3z = 8 \\ 3x - 2y - 2z = 7 \end{gathered}$$

Usando método de reducción

Solución

Usando método de Cramer

Por tanto, las soluciones para el sistema mostrado son

$$x = 3$$
$$y = -1$$
$$z = 2$$

Un sistema de tres ecuaciones con tres variables cada una se puede todavía graficar en el espacio tridimensional R^3 y aunque necesita un análisis ligeramente diferente para obtener la representación, resulta interesante ver el comportamiento gráfico de las expresiones algebraicas. El conjunto de ecuaciones del problema anterior se puede representar tal como se muestra en la figura 1.5.

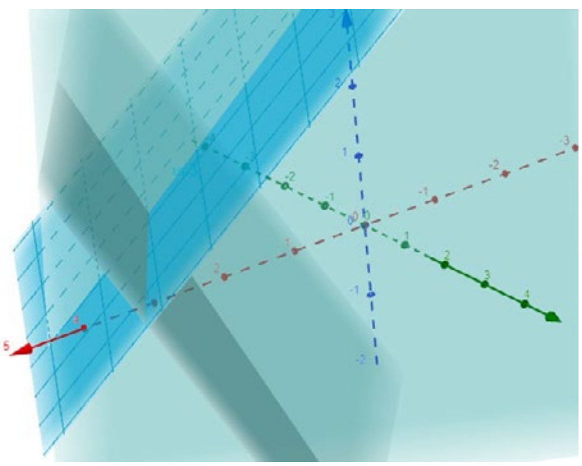


Figura 1.5. *Representación en el espacio tridimensional del sistema de ecuaciones del problema 1.9. Obtenida del portal WEB de Geogebra.*

Cada una de las ecuaciones lineales del problema es representada en el plano cartesiano por un semiplano, y estos se interceptan de a dos a lo largo de una línea recta, pero los tres planos se interceptan en un único punto que corresponde al punto (2, –1, 3) y que es igual a la solución obtenida por el método analítico.

Ejercicios sección 1.2. Sistemas de ecuaciones lineales.

Dados los siguientes sistemas 2×2, encuentre la solución de cada uno utilizando reducción por sustitución, por igualación, por eliminación y método gráfico.

1. $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x + 5y = 5 \\ -4x - 10y = -7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ 8x - 9y = -77 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -13y + 11x = -163 \\ -8x + 7y = 94 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 10x + 18y = -11 \\ 16x - 9y = -5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 12 \\ 2x + \frac{y}{2} = 4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{5x}{6} - y = 4 \\ x - \frac{3y}{2} = 5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 5 \\ -\frac{x}{4} + y = 6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 0.1x + 0.2y = 10 \\ 0.3x - 0.4y = -8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 0.5x + 1.5y = 1 \\ 3.5x - 2.5y = 6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = \frac{3}{5} \\ \frac{3}{2}x - y = \frac{6}{5} \end{cases}$

14. $\begin{cases} 0.5x + \frac{1}{2}y = -2 \\ \frac{3}{4}x - 2.4y = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 600x + 300y = 1000 \\ 200x - 150y = 3000 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x - 4y = 41 \\ 11x + 6y = 47 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 9x + 11y = -14 \\ 6x - 5y = -34 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 10x - 3y = 36 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 11x - 9y = 2 \\ 13x - 15y = -2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \frac{2x}{5} = \frac{y}{4} \\ \frac{y}{4} = \frac{x}{3} - 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} \frac{3x}{5} + \frac{3}{4}y = 2 \\ 4x - \frac{3y}{2} = 1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{3y}{5} = 1 \\ \frac{x}{8} - \frac{1}{6}y = 4 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 18x + 5y = -11 \\ 12x + 11y = 31 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 9x + 7y = -4 \\ 11x - 13y = -48 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 12x - 14y = 20 \\ 12y - 14x = -19 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 15x - 1y = 40 \\ 19x - 8y = 236 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 36x - 11y = -14 \\ 24x - 17y = 10 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 12x - 17y = 104 \\ 15x + 19y = -31 \end{cases}$

31. $\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = -\frac{1}{12} \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$

32. $\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{4y}{5} = 2 \\ \frac{2x}{7} - \frac{1y}{4} = 6 \end{cases}$

33. $\begin{cases} \frac{x}{5} = 3(y-2) \\ \frac{y}{5} + 3x = \frac{224}{5} \end{cases}$

Dados los siguientes sistemas 2x2, encuentre la solución de cada uno utilizando reducción por eliminación, por sustitución, por igualación y por método gráfico.

34. $\begin{cases} x = y + 1 \\ 2x + 3 = y \end{cases}$

35. $\begin{cases} x - y = 3 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ x = 3y - 4 \end{cases}$

37. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x = y \\ 2x + 4y = -3 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ -x = 5y + 1 \end{cases}$

40. $\begin{cases} m - 3n = 6 \\ m = 4n + 1 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 6p - 3q = -2 \\ 4 = 3q + p \end{cases}$

42. $\begin{cases} 0.1r = 0.4s + 0.3 \\ 0.3s = 0.5r \end{cases}$

43. $\begin{cases} t = 3f + 1 \\ t = -4f + 3 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 3g = 8h + 3 \\ -4g + h = 12 \end{cases}$

45. $\begin{cases} w + 1 = z \\ -2w + z = 3 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 0.2a - 0.3b = 0.5 \\ a = 2b \end{cases}$

47. $\begin{cases} 2a - 3b = 6 \\ b = 0.5a \end{cases}$

48. $\begin{cases} \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y + 4 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases}$

49. $\begin{cases} 2a = \frac{1}{2}(b+3) \\ \frac{1}{3}(a+b) = 4 \end{cases}$

50. $\begin{cases} y = \frac{4(x+1)}{5} \\ \frac{x+y}{3} = 3y \end{cases}$

51. $\begin{cases} 2x + \frac{3}{2}y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$

52. $\begin{cases} -a + \frac{1}{2}b = 3(a+3) \\ \frac{a-b}{4} = \frac{a+b}{3} + 1 \end{cases}$

53. $\begin{cases} a - 2b = 12 \\ 3a = \frac{a+2b}{0.1} \end{cases}$

54. $\begin{cases} \frac{a}{2} + b = 2 \\ \frac{a}{2} = (b+1) \end{cases}$

55. $\begin{cases} 3x - 2y = -6 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases}$

56. $\begin{cases} r = 3s - 3r + 1 \\ s = 2s + 2r - 3 \end{cases}$

57. $\begin{cases} 4d = 3s + 1 \\ -s = d + 2 \end{cases}$

58. $\begin{cases} 3a + \frac{b}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}(a-b) = b \end{cases}$

59. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 0.3y = 0.2x + 0.4 \end{cases}$

60. $\begin{cases} n + m = 0 \\ m = 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \end{cases}$

Dados los sistemas 3×3, encuentre la solución de cada uno usando el método que considere más conveniente.

61. $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 4x-2y-3z=8 \\ 3x-2y-2z=7 \end{cases}$

62. $\begin{cases} 2x+3y-z=11 \\ 4x-2y-3z=9 \\ 3x-2y-2z=5 \end{cases}$

63. $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ 4x-2y-3z=-5 \\ 3x-2y-2z=-5 \end{cases}$

64. $\begin{cases} 2x+3y-z=11 \\ 3x-2y-3z=1 \\ 3x-2y+5z=-7 \end{cases}$

65. $\begin{cases} 2x+3y-z=-10 \\ 3x-2y-3z=-14 \\ 3x-2y+5z=-2 \end{cases}$

66. $\begin{cases} 2x+3y+7z=2 \\ 3x+4y-3z=-17 \\ -4x+5y+3z=16 \end{cases}$

67. $\begin{cases} 2x+3y-z=-1 \\ 3x+4y+3z=9 \\ -4x+5y-3z=6 \end{cases}$

68. $\begin{cases} 2x+3y-z=600 \\ 3x+4y+3z=1050 \\ -4x+5y-3z=200 \end{cases}$

69. $\begin{cases} 2x+3y-4z=215 \\ 3x+4y+2z=-70 \\ -4x+5y-3z=780 \end{cases}$

70. $\begin{cases} 2x+3y-4z=-128 \\ 3x+4y+2z=-39 \\ -4x+5y-3z=-305 \end{cases}$

71. $\begin{cases} 0.12a+0.45b-0.31c=0.09 \\ 0.14a-0.24b-0.17c=-0.85 \\ 0.23a+0.35b+0.23c=1.62 \end{cases}$

72. $\begin{cases} 0.29a+0.45b+0.32c=-0.67 \\ 0.12a+0.23b+0.16c=-0.24 \\ 0.38a+0.44b-0.21c=1.67 \end{cases}$

73. $\begin{cases} 0.29a+0.45b+0.32c=1.41 \\ 0.12a+0.23b+0.16c=0.65 \\ 0.76a+0.44b-0.21c=0.24 \end{cases}$

74. $\begin{cases} 0.7a+1.0b+0.8c=4.5 \\ 0.8a+0.7b+0.3c=4.6 \\ 0.9a+0.5b+0.2c=4.3 \end{cases}$

75. $\begin{cases} 0.2a+0.2b+0.4c=-0.6 \\ 0.3a+0.8b+0.1c=2.1 \\ 0.4a+0.1b+0.9c=-2.6 \end{cases}$

76. $\begin{cases} 0.3a+0.9b+0.4c=3.24 \\ 0.2a+0.1b+0.5c=1.80 \\ 0.7a+0.8b+0.2c=1.80 \end{cases}$

77. $\begin{cases} 0.81a+0.35b+0.55c=2.77 \\ 0.16a+0.14b+1.00c=3.90 \\ 0.56a+0.86b+0.80c=1.74 \end{cases}$

78. $\begin{cases} 0.68a+0.39b+0.46c=5.17 \\ 0.97a+0.01b+0.87c=-22.01 \\ 0.24a+0.51b+0.05c=20.25 \end{cases}$

79. $\begin{cases} 0.20a+0.78b+0.20c=67.26 \\ 0.19a+0.85b+0.87c=-197.25 \\ 0.38a+0.39b+0.14c=75.63 \end{cases}$

80. $\begin{cases} 0{,}31a+0{,}49b+0{,}72c=463 \\ 0{,}15a+0{,}78b+0{,}40c=467 \\ 0{,}48a+0{,}01b+0{,}98c=350 \end{cases}$

Dados los sistemas 2×2 que se muestran a continuación, aplique cualquier método de solución, posteriormente interprete la respuesta usando análisis gráfico.

81. $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x-2y=8 \end{cases}$

82. $\begin{cases} -3x-2y=1 \\ 6x+4y=-2 \end{cases}$

83. $\begin{cases} 4x-3y=2 \\ -8x+6y=4 \end{cases}$

84. $\begin{cases} 5x-3y=-2 \\ 10x-6y=3 \end{cases}$

85. $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+3y=3 \end{cases}$

86. $\begin{cases} 2x-6y=5 \\ -x+3y=2 \end{cases}$

Dados los sistemas 4×4 que se muestran a continuación, busque en la RED un aplicativo que permita encontrar la solución

87. $\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 57 \\ 3x_1 + 14x_2 + 19x_3 + 6x_4 = 112 \\ 10x_1 + 16x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 120 \\ 14x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 18x_4 = 104 \end{cases}$

88. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 10 \\ 8x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 18 \\ 6x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 8 \end{cases}$

89. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -9 \\ 7x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 8x_4 = -10 \\ 9x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = -18 \\ 8x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

90. $\begin{cases} 350x_1 + 998x_2 + 338x_3 + 267x_4 = 2734 \\ 233x_1 + 152x_2 + 203x_3 + 374x_4 = 1200 \\ 631x_1 + 654x_2 + 122x_3 + 544x_4 = 4668 \\ 715x_1 + 348x_2 + 403x_3 + 405x_4 = 1676 \end{cases}$

91. $\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -13 \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 = -3 \\ 9x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 8x_4 = -26 \\ 6x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = -17 \end{cases}$

92. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -14 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -6 \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 2 \end{cases}$

SECCIÓN 1.3 FÓRMULAS Y RELACIONES ALGEBRAICAS

Una fórmula en el área de las matemáticas o las ciencias es una expresión por lo general algebraica que relaciona variables, cantidades y/o parámetros, que sirve para describir el funcionamiento o la operación de un sistema y de ahí su importancia. Si es posible definir una expresión matemática (por lo general en una fórmula o combinación de ellas) para una situación de naturaleza económica, administrativa, de ingeniería o de cualquier índole y esta la representa acertadamente, entonces existe una comprensión profunda de la situación lo que a su vez permite en cierta medida controlar o predecir. A lo largo del pregrado el estudiante deberá familiarizarse con diversas fórmulas aplicadas a contextos variados y es el objetivo de la presente sección, aprender a utilizarlas y manipularlas.

Fórmulas

Aunque existen diversas definiciones para una fórmula dependiendo del contexto y la rama del conocimiento que se esté tratando, en matemáticas elementales se puede decir que una fórmula es una expresión algebraica que relaciona dos o más variables. Para ejemplificar esto, tómese como referencia la segunda ley de Newton en su expresión más simple.

$$F = m \cdot a \qquad \text{[Ec. 1.2]}$$

Esta fórmula establece que la fuerza (F) que experimenta o ejerce un cuerpo es igual al producto entre su masa (m) y su aceleración (a); dependiendo de otros factores (que no son del interés de este libro), a muchos fenómenos naturales se les puede aplicar esta ecuación y en este sentido resulta útil.

Ejemplo 1.10. *Para la segunda ley de Newton, encuentre la fuerza que experimenta un cuerpo de 12 kg cuando se acelera a:*

(a) $5\frac{m}{s^2}$; *(b)* $10\frac{m}{s^2}$; *(c)* $40\frac{m}{s^2}$

Solución*: Las fórmulas resultan útiles porque conocidas algunas de sus variables, se pueden encontrar otras. Usando la ecuación 1.2., donde* $m = 12$ *y los valores de aceleración son cada uno de los casos planteados se obtiene.*

a. $F = 12 \cdot 5$ *multiplicando* $F = 60\, newton$
b. $F = 12 \cdot 10$ *multiplicando* $F = 120\, newton$
c. $F = 12 \cdot 40$ *multiplicando* $F = 480\, newton$

Realmente las unidades de las cantidades tampoco son objetivos de este libro, pero sí las operaciones matemáticas asociadas.

LA IMPORTANCIA DE LAS MATEMÁTICAS

Las matemáticas desempeñan un papel fundamental en diversas áreas de la vida profesional, tal como sucede en el campo de las ciencias e ingeniería, donde se requieren para realizar cálculos y modelar fenómenos naturales complejos.

En el ámbito de las finanzas y los negocios, las matemáticas son fundamentales para realizar cálculos financieros, evaluar riesgos y tomar decisiones informadas; los profesionales financieros las utilizan para determinar intereses, tasas de interés, tipos de crédito y realizar análisis de inversión. La comprensión de los conceptos matemáticos en finanzas es crucial para tomar decisiones financieras sólidas y maximizar los rendimientos, además, que son fundamentales en la gestión de presupuestos, la planificación financiera y la evaluación de proyectos.

En el campo de la tecnología e informática, las matemáticas son la base del diseño y desarrollo de algoritmos, la criptografía y la programación; los profesionales en estas áreas las usan para resolver problemas complejos, optimizar algoritmos y garantizar la seguridad de los sistemas informáticos.

Desde la creación de software hasta el desarrollo de algoritmos de inteligencia artificial, las matemáticas son esenciales para el avance tecnológico y la innovación

En otras situaciones, es posible que sea necesario despejar una variable dentro de una fórmula; en adición a lo aprendido en la sección 1.1., de este capítulo en lo concerniente al despeje, se debe tener en cuenta lo siguiente:

ESTRATEGIAS PARA DESPEJAR UNA VARIABLE

1. Para eliminar una potencia se debe sacar raíz de esa misma potencia.

2. Para eliminar una raíz se debe potenciar al mismo índice de la raíz.

Cuando se analicen funciones más complejas en los siguientes capítulos, se detallará el procedimiento para despejar las variables.

Ejemplo 1.11. *Dada la expresión $v^2 = v_i^2 - 2ax$, que representa la relación entre la velocidad que adquiere un cuerpo en términos de la aceleración y el espacio recorrido, despejar v_i.*

Solución: *esta es otra fórmula de la física clásica cuyo significado no viene a discusión, pero si el despeje de lo solicitado. Partiendo de lo aprendido se tiene entonces que es necesario mover la expresión 2ax a la izquierda.*

$$v^2 = v_i^2 - 2ax \quad \rightarrow \quad v^2 + 2ax = v_i^2$$

Como la variable solicitada tiene un cuadrado, es necesario aplicar raíz tanto a la derecha como a la izquierda para mantener la igualdad y eliminar este cuadrado.

$$\sqrt{v_i^2} = \sqrt{v^2 + 2ax}$$

Simplificando se llega a:

$$v_i = \sqrt{v^2 + 2ax}$$

Que es la expresión solicitada en el problema.

En ciencias afines a la ingeniería y en administración las fórmulas son de uso muy frecuente para modelar sistemas y predecir el comportamiento de los sistemas.

Ejemplo 1.12. *Dada la expresión algebraica $v^2 = v_i^2 + 2ax$ complete la siguiente tabla.*

Caso	v	v_i	a	x
I		*5*	*2*	*4*
II	*6*		*3*	*2*
III	*7*	*3*	*2*	
IV	*5*	*2*		*3*

Solución: *nótese que en la tabla hay diferentes casos y en cada uno, falta un solo dato, el cual se obtiene despejando de la ecuación la variable solicitada y reemplazando los datos proporcionados en las otras.*

Caso I. *Basta con reemplazar en la ecuación del problema y sacar raíz cuadrada para eliminar el cuadrado.*

$$v^2 = v_i^2 + 2ax \quad v = \sqrt{v_i^2 + 2ax}$$

$$v = \sqrt{5^2 + 2(2)(4)} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

Caso II. *Despejando a v_i se tiene:*

$$v^2 = v_i^2 + 2ax \qquad v_i = \sqrt{v^2 - 2ax}$$

$$v_i = \sqrt{6^2 - 2(3)(2)} = \sqrt{36 - 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Caso III. *Despejando x se obtiene:*

$$v^2 = v_i^2 + 2ax \quad \rightarrow \quad v^2 - v_i^2 = 2ax \quad \rightarrow \quad \frac{v^2 - v_i^2}{2a} = x$$

Remplazando los valores se obtiene:

$$x = \frac{v^2 - v_i^2}{2a} = \frac{7^2 - 3^2}{2(2)} = \frac{49 - 9}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Caso IV*. De forma similar al caso anterior se despeja a.*

$$v^2 = v_i^2 + 2ax \quad \rightarrow \quad v^2 - v_i^2 = 2ax \quad \rightarrow \quad \frac{v^2 - v_i^2}{2x} = a$$

$$a = \frac{v^2 - v_i^2}{2x} = \frac{5^2 - 2^2}{2(3)} = \frac{25 - 4}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

Finalmente, la tabla queda con los valores.

Caso	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v_i}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{x}$
I	$\sqrt{41}$	*5*	*2*	*4*
II	*6*	$2\sqrt{6}$	*3*	*2*
III	*7*	*3*	*2*	*10*
IV	*5*	*2*	*3,5*	*3*

Que era la pregunta formulada en el problema.

El factorial de un número entero positivo n, denotado por n!, es el producto de todos los números enteros positivos desde 1 hasta el número y es usado en matemáticas, especialmente en probabilidad, estadística, teoría combinatoria y análisis numérico.

Así, el factorial de un número se calcula como:

$0! = 1$
$1! = 1 \cdot 1 = 1$
$2! = 2 \cdot 1 = 2$
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

EL JUEGO DEL BALOTO

Encuentre la posibilidad de que una persona jugando una boleta, gane en el juego del baloto para Colombia.

Solución

Relaciones entre variables

Relaciones proporcionales directas

Si una variable se relaciona proporcionalmente directa con otra, esto se denota por

$$y = kx$$

Y su gráfica es

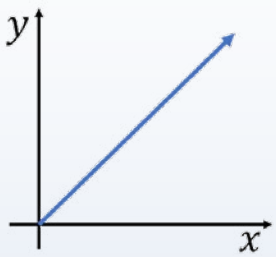


Figura 1.6*. Relación directamente proporcional.*

Donde k es la constante de proporcionalidad.

Si una variable se relaciona proporcionalmente con el cuadrado de otra, esto se denota por

$$y = kx^2$$

Y su gráfica es

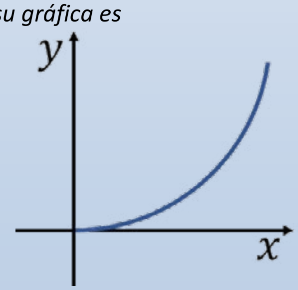


Figura 1.7*. Representación de la relación proporcional cuadrada.*

Existen diversas formas en las cuales las variables pueden relacionarse, sin embargo, es posible agrupar muchas de estas variaciones en dos grandes grupos con características muy interesantes; estas son las variaciones directas y variaciones inversas.

Dos cantidades están en variación directa si el incremento de una ocasiona el incremento de la otra o viceversa; son ejemplos de variación directa proporcional por ejemplo la masa y el volumen en líquidos, cuando aumenta el volumen de un líquido, necesariamente debe aumentar su masa.

Definición 1.2. Variación proporcional directa*: si x e y son dos variables relacionadas y la relación es directamente proporcional, entonces esta se representa con:*

$$y \propto x$$

Para que esta proporción se convierta en igualdad, es necesario agregar una constante de proporcionalidad k
.

$$y = kx \qquad \text{[Ec. 1.3]}$$

El siguiente problema ilustra claramente un tipo de relación proporcional lineal al igual que una aplicación real de estas relaciones.

Ejemplo 1.13. *La velocidad del sonido en el aire a 20°C es aproximadamente 340 m por cada segundo. ¿Cuál es la distancia recorrida al cabo de 6 segundos?*

Solución: Aquí el espacio (x) es proporcional al tiempo (t), a más tiempo, más espacio recorre la onda.

$$x \propto t$$

La constante de proporcionalidad son los 340 metros cada segundo, así es posible escribir:

$$x = 340t$$

Al cabo de 6 segundos, la onda habrá recorrido

$$x = 340(6) = 2040m$$

Existe otro tipo de relación, la proporcionalidad inversa; en esta situación cuando una variable aumenta la otra disminuye, un ejemplo de este tipo de proporcionalidad es la relación entre el precio y la oferta; cuando un bien o un servicio son muy ofertados su precio tiende a bajar.

Definición 1.3. Variación proporcional inversa. *Si x e y son dos variables relacionadas y la relación es inversamente proporcional, entonces esta se representa con:*

$$y \propto \frac{1}{x}$$

Para que esta proporción se convierta en igualdad, es necesario agregar una constante de proporcionalidad k.

$$y = \frac{k}{x} \qquad \text{[Ec. 1.4]}$$

La siguiente es una aplicación de relaciones inversas entre variables.

Ejemplo 1.14*. Bajo ciertas condiciones especiales de mercado, se logra establecer que el precio unitario de venta en dólares de cierto artículo depende inversamente de la cantidad de artículos ofertados, según se muestra en la relación.*

$$c = \frac{1200}{x}$$

Determine el costo de cada artículo si al mercado se ofrecen: 100 artículos, 300 artículos.

Solución: *reemplazando en la anterior expresión se tiene que para 100 artículos:*

$$c = \frac{1200}{x} = \frac{1200}{100} = 12 \text{ Dólares.}$$

Para 300 artículos:

$$c = \frac{1200}{x} = \frac{1200}{300} = 4 \text{ Dólares}$$

Entre más artículos se ofrezcan al mercado, menor será su precio, lo cual permite establecer que la relación es proporcional inversa.

Ejemplo 1.15. *La velocidad de una partícula en un movimiento rectilíneo uniforme está definida mediante la siguiente expresión:*

$$v = v_i + at$$

Encuentre una expresión para el tiempo en términos de las demás variables.

Solución*: usando la técnica de transposición se debe aislar la variable –a–, para ello nótese que la acompañan en el lado izquierdo de la igualdad, la velocidad inicial v_i y el tiempo t, este último está multiplicando a la variable –a– y suma a la velocidad inicial, por lo que está realizando dos operaciones fundamentales y por ahora no se puede transponer; por otro lado, la velocidad inicial está sumando exclusivamente a la*

Relaciones Proporcionales Inversas

Si una variable se relaciona inversamente proporcional con otra, esto se denota por

$$y = \frac{k}{x}$$

Y su gráfica es

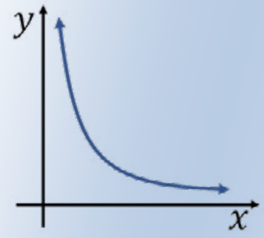


Figura 1.8*. Relación inversamente proporcional*

Donde k es la constante de proporcionalidad.

Si una variable se relaciona inversamente proporcional con el cuadrado de otra, esto se denota por

$$y = \frac{k}{x^2}$$

Y su gráfica tiene casi el mismo comportamiento

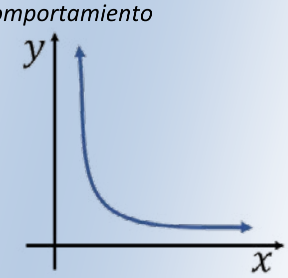


Figura 1.9*. Representación de la relación inversa proporcional cuadrada.*

★★★★★★★★★★

aceleración y al tiempo por lo cual se puede pasar al lado derecho de la ecuación a restar.

$$v - v_i = at$$

En esta última expresión, el tiempo únicamente multiplica a la aceleración, en consecuencia, puede pasar a dividir.

$$\frac{v - v_i}{t} = a$$

Es una costumbre que la variable dependiente o despejada, se ubique en el miembro de la izquierda, y como se tiene una igualdad, se pueden intercambiar libremente.

$$a = \frac{v - v_i}{t}$$

***Ejemplo 1.16**. El valor futuro (VF) de una inversión dado un interés i, con un valor presente VP está dado por la expresión:*

$$VF = VP(1 + i)^2$$

Determine el interés si USD1,000 se convierten en USD1,200 al finalizar el periodo.

***Solución:** es necesario despejar el interés del miembro derecho de la ecuación, para ello nótese que el valor presente (VP) está multiplicando, debe pasar a dividir.*

$$\frac{VF}{VP} = (1 + i)^2$$

Para eliminar el cuadrado, se saca raíz a ambos lados de la ecuación.

$$\sqrt{\frac{VF}{VP}} = \sqrt{(1 + i)^2} \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{\frac{VF}{VP}} = 1 + i$$

El 1, está sumando, pasa a restar, con lo cual se llega a la expresión

$$i = \sqrt{\frac{VF}{VP}} - 1$$

Reemplazando los valores, se tiene que:

$$i = \sqrt{\frac{1200}{1000}} - 1 \approx 0.09545$$

Así, al finalizar los periodos, el dinero tuvo rendimiento del 9,5%

Principios fundamentales para el manejo de Ecuaciones

1. *Sumar una misma cantidad positiva o negativa a ambos miembros de una ecuación no la altera.*
2. *Restar una misma cantidad positiva o negativa a ambos miembros de una ecuación no la altera.*
3. *Multiplicar una misma cantidad positiva o negativa a ambos miembros de una ecuación no la altera.*
4. *Dividir una misma cantidad positiva o negativa a ambos miembros de una ecuación no la altera.*
5. *Elevar a cualquier potencia, ambos miembros de una ecuación no la alteran.*
4. *Obtener la raíz, de cualquier índice, a ambos miembros de una ecuación no la altera.*

Ejercicios sección 1.3. Fórmulas y relaciones algebraicas.

Dadas las siguientes expresiones algebraicas, complete las tablas que se muestran a continuación.

1. $c^2 = a^2 + b^2$

A	b	C
2	3	
	4	5
12		13

2. $x = \frac{at^2}{2}$

x	a	T
20	10	
	4	5
12		13

3. $m^2 = n^2 - 3t$

m	n	T
8	3	
	4	5
12		13

4. $\rho = \frac{m}{V}$

ρ	m	V
2	3	
	4	5
12		6

5. $q = \sqrt{m^2 + n}$

q	m	N
2	3	
	4	5
6		20

6. $r = \frac{1}{m+1} - n$

r	m	N
4	6	
	4	5
6		12

7. $c^3 = a^3 + b^3$

a	b	C
2	3	
	4	5
12		13

8. $v^2 = v_1^2 - 2ax$

v	v_i	a	x
20	10		100
	4	-5	4
12		8	5

9. $m^2 = n^2 + 3t$

m	n	t
8	3	
	4	5
12		13

10. $L = L_i + \alpha \Delta T$

L	L_i	α	ΔT
4	3		8
	4	5	3
12		4	2

11. $q = \sqrt{m^2 + 1} + n$

q	m	n
2	3	
	4	5
6		20

12. $r = \frac{1}{m^2} - n$

r	m	n
4	6	
	4	5
6		12

13. $a^2c^2 = b^2 + 1$

a	b	c
2	3	
	4	5
12		13

14. $F = \frac{m_1 m_2}{r^2}$

F	m_1	m_2	r
20	10	2	
	40	50	2
100	4	8	

15. $m^2 = n^2 - t^2$

m	n	t
8	3	
	4	5
12		13

16. $\rho = \frac{m}{V}$

ρ	m	V
20	30	
	24	50
12		16

17. $q^2 = \sqrt{m^2 + n^2}$

Q	m	n
20	3	
	4	5
60		20

18. $r^2 = \frac{1}{m+1} - n^2$

r	m	n
4	6	
	4	5
6		12

Problemas de aplicación

A continuación, usted va a encontrar una serie de situaciones problema en diversas áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), las cuales debe interpretar, modelar y resolver para dar cuenta de la solución. Ilustre y explique claramente los modelos propuestos, identificando las variables utilizadas, explicando también la estrategia de solución y la calidad de la solución encontrada

19. **Rentabilidad**. La rentabilidad en una empresa en función del precio de uno de sus productos (p), el número de artículos vendidos (n) y el tiempo (t) en meses está dado por la expresión matemática

$$U = 1000(n - 0.5p)t$$

a. Cuando la empresa vende 1000 artículos a un precio de \$300 durante 5 meses, ¿qué utilidad obtiene?
b. Si proyecta vender 800 artículos cuál es el máximo precio de venta si se desea obtener alguna utilidad?
c. Si se quiere una utilidad de 2 millones de pesos al cabo de 5 meses cuando los artículos cuestan \$400, ¿cuántos artículos se deben vender?

20. **Energía eléctrica**. Un equipo electrónico consume una potencia (P) dada por la expresión matemática

$$P = 1.2V(1 + I)^2$$

Donde V es la tensión e I la corriente eléctrica expresada en miliamperios.
a. Cuál es la potencia consumida cuando el voltaje es de 5V y la corriente de 2mA
b. Cuál es la tensión si en un momento determinado el equipo consume 40mW cuando la corriente es de 1mA.

c. Cuál es la corriente si en un momento determinado el equipo consume 25W cuando el voltaje es 0,5V.

21. Las **combinaciones sin repetición** que se pueden obtener de m elementos tomados de n en n tal, que m ≥ n son todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos cumpliendo las siguientes condiciones:

i. Participan algunos elementos.
ii. El orden no importa.
iii. La repitencia de elementos no se presenta.

Está dado por la expresión

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

En un curso de matemáticas I de 30 alumnos se va a realizar un trabajo en grupos de 4. Cuántos grupos diferentes podrían conformarse.

22. Las **combinaciones con repetición** que se pueden obtener de un total de m elementos tomados de n en n donde m ≥ n, son todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos cumpliendo las siguientes condiciones:

i. Participan algunos elementos.
ii. El orden no importa.
iii. La repitencia de elementos se puede presentar.

Está dada por la expresión

$$CR_m^n = \frac{(m+n-1)}{n!\cdot(m-1)!}$$

El menú de un restaurante consta de 8 platos de alta cocina, de cuántas formas diferentes 5 personas podrían escoger platos de este menú.

23. Las **variaciones con repetición** de un total de m elementos tomados de n en n que se pueden obtener cumpliendo las siguientes condiciones

i. No entran todos los elementos si m > n.
ii. Participan todos los elementos si m ≤ n.
iii. El orden Sí importa.
iv. Se pueden repetir los elementos.

Está dado por la expresión

$$VR_m^n = m^n$$

Actualmente en Colombia el sistema de placas para automóviles está diseñado con tres letras y tres números; si cada letra se puede escoger de 26 opciones –A, B, C, …., Z– y cada número se puede escoger del 0 al 9, siendo primero las letras y luego los números.

Imagen tomada de : asesoriasantetransito.com

¿Cuántas placas diferentes se pueden obtener para carros en Colombia?

24. Las permutaciones de un total de m elementos, con m = n que se pueden obtener teniendo en cuenta que:

i. Participan todos los elementos.
ii. El orden sí importa.
iii. La repitencia de elementos no se presenta.

Está dada por la expresión

$$P_m = m!$$

Imagen tomada de:formula1.com

En una competencia de Fórmula 1 se tienen solamente 5 escuderías. Asumiendo que todas tienen un vehículo y que terminan la carrera, de cuántas formas diferentes podrían llegar a la meta los autos.

25. En **permutaciones con repetición** de n elementos donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces, el tercero c veces y así sucesivamente y

$$n = a + b + c + \cdots$$

Teniendo en cuenta que:

i. Participan todos los elementos.
ii. El orden sí importa
iii. La repitencia de elementos se puede presentar

Está dado por la expresión

$$PR_n^{a,b,c,\dots} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \dots}$$

Una torre de control , cuenta con un dispositivo que envía señales de diferentes colores según sea la aeronave que vaya a aterrizar en cierto aeropuerto, se cuentan con cuatro focos que emiten luces de color verde, tres de color naranja y cinco azules. Con la colocación de los 12 focos , ¿Cuantas señales de colores se pueden trasmitir?

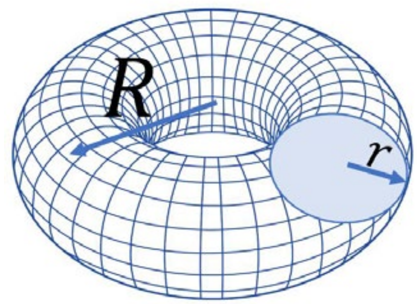
Imagen adaptada de :baloto.com

26. **Lotería**: El baloto es un juego de azar que en sus primeras versiones, consistía en escoger seis balotas de un conjunto de 45 posibles. Aquí el orden en que salen las balotas no importa y una vez una sale, no puede volver a salir, por lo que no se repiten. Dadas estas condiciones, ¿cuántas combinaciones diferentes se pueden formar en este juego?.

27. **El toroide**. El volumen de un toroide está dado por la expresión

$$V = 2\pi^2 R r^2$$

Donde R es el radio al eje de rotación del isobaricentro del círculo generatriz y r el radio de este círculo.



a. Cuál es el volumen de un toroide que tiene de radio al eje de rotación de 12cm y una sección circular de radio 2 cm.
b. Si un segundo toroide tiene un volumen de $800\ cm^3$ y un radio al eje de rotación de 14 cm, determine el radio de la sección transversal.
c. Proponga por lo menos cuatro pares de valores para los radios en un toroide de $600\ cm^3$; tenga en cuenta que el radio al eje del toroide no puede ser igual o inferior al radio del círculo generatriz para que la expresión de volumen sea válida.

28. **Interés compuesto**. El interés compuesto que aplica una entidad financiera cuando presta un capital está dado por la expresión

$$VF = VP\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Donde VF es el valor futuro o dinero producido al prestar un capital VP a un interés r compuesto durante n periodos de tiempo a un tiempo t representado en años. Si al señor Pérez el banco le presta un capital de US$8000 a un interés semestral del 5% por un término de dos años, cuánto deberá pagar al finalizar este tiempo.

SECCIÓN 1.4 PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON ECUACIONES LINEALES

Las matemáticas son una de las herramientas que tiene la humanidad para comprender el universo, modelando y prediciendo su comportamiento al igual que controlando algunas situaciones específicas que se dan en él y esta es posiblemente la razón fundamental de la importancia del estudio de las matemáticas para los ingenieros. En esta sección se analizan algunos problemas que pueden ser son modelados a través de las ecuaciones lineales, que está íntimamente relacionados con las funciones, sin embargo, el problema consiste en a partir de una situación problema en un contexto determinado, poder obtener un modelo algebraico que lo pueda representar.

Modelación

La representación o modelación es un estrategia que se basa en asignar algunos atributos artificiales –y para el caso de estudio, atributos matemáticos– o un conjunto de ellos, a situaciones reales o hipotéticas, con el fin de representar una determinada circunstancia; en esta sección se hace referencia a sistemas que se pueden representar a través de ecuaciones, especialmente lineales y que además se pueden manipular a través de la de las propiedades de los números reales y las funciones y ecuaciones.

Para lograr esto, es necesario hacer la transformación expresiones literales en expresiones matemáticas como lo son las expresiones algebraicas; la siguiente tabla ilustra algunas de estas transformaciones.

***Tabla 1.1**. Equivalencia literal a algebraico*

Expresión verbal	Expresión algebraica
Un número	x
Dos veces un número	$2x$
El doble de un número	$2x$
Un número más dos	$x+2$
Tres más que el doble de un número	$2x+3$
Un número menos cuatro	$x-4$
Cuatro restado de un número	$x-4$
Cuatro menos un número	$4-x$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
El cuadrado de un número más uno	x^2+1
La mitad del cubo de un número	$\frac{x^3}{2}$
El 10% de un número	$0.1x$
El cuadrado de un número más el doble del número	x^2+2x
El número incrementado en tres	$x+3$

Imagen tomada de http://7icons.wordpress.com/

El porcentaje (%) en matemáticas es una forma de representar una comparación usando una escala de 0 a 100, donde normalmente el cero es nulidad y el 100 es la totalidad. El 32% de un número x por ejemplo se puede representar como:

$$32\%x$$

Sin embargo, para una correcta manipulación algebraica se debe reescribir esta expresión como una fracción del número, recordando que la comparación se hace con respecto a 100, debería quedar como:

$$\frac{32}{100}x = 0.32x$$

Tres veces un número más dos	$3x+2$
Un número más dos tres veces	$3(x+2)$
Tres veces la suma de un número más dos	$3(x+2)$

A pesar de que la tabla en cuestión se utiliza como parámetro la variable x, en realidad es posible utilizar cualquier otra variable; por otro lado, en ciertas ocasiones es necesario establecer la relación entre dos o más cantidades (o números) y por simplicidad y para no aumentar el número de variables –proceso que tiende a complicar los métodos de solución–, conviene representar una cantidad en términos de la otra; la tabla que se anexa a continuación ilustra a manera de ejemplos, estas relaciones.

***Tabla 1.2**. Equivalencia literal a algebraico*

Expresión verbal	Expresión algebraica	
	Primer número	Segundo número
Un número es el doble del otro	x	$2x$
Un número es la mitad del otro	x	$\frac{x}{2}$
Un número es dos menos que el otro	x	$x-2$
Dos enteros consecutivos	x	$x+1$
Dos enteros consecutivos	x	$x-1$
Dos enteros pares consecutivos	x	$x+2$
Dos enteros pares consecutivos	x	$x-2$
Un número y el número incrementado un 10%	x	$x+0.1x$
La suma de dos números es 10	x	$10-x$
10 repartido entre dos números	x	$10-x$
Distancia de 12 metros entre dos tramos	x	$12-x$

De igual manera es posible que existan tres o más variables en el marco de un ejercicio y a partir del contexto del problema se debe establecer la forma en la que estas variables se relacionan;

Precisamente una de las pretensiones de la modelación es encontrar la manera de relacionar estas cantidades o estas variables a través de estructuras matemáticas, para que en conjunto sea viable determinar el valor numérico de cada una de ellas –las variables–, y aunque hay diversas maneras de solucionar problemas a través de la modelación, es posible establecer una estrategia general que ayuda a simplificar el proceso.

ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS

1. Lea el problema cuidadosamente y asegúrese de entender claramente cada parte y lo que le pide resolver.
2. Represente de forma gráfica el problema, puede usar esquemas a los cuales asocie conceptos.
3. Identifique claramente la cantidad o cantidades que se quiere encontrar.
4. Escoja variables para representar las cantidades del problema, es altamente recomendable que utilice la

menor cantidad de variables sin que el problema pierda rigurosidad.

5. Lea de nuevo el problema y lo que está expresado verbalmente, reescríbalo expresándolo algebraicamente –a esto se le denomina transposición–.
6. Resuelva el modelo matemático encontrando el valor de todas las variables desconocidas.
7. Interprete la respuesta encontrada y responda a la pregunta formulada en el problema y analice si esta es consistente.

La habilidad para resolver problemas, como cualquier otra habilidad, se desarrolla por medio de la práctica, los ejercicios, el raciocinio, la consulta y acompañamiento de los pares académicos, la contrastación con problemas similares y esto desde luego demanda tiempo y esfuerzo por parte del estudiante.

Ejemplo 1.17. Ecuación lineal. *El doble de un número más tres equivale a quince.*

Solución*: el problema pide encontrar un número, por tanto, se procede a escribir la ecuación.*

$$2x + 3 = 15$$

Nótese que la palabra "equivale" en términos matemáticos se reemplaza por un igual; resolviendo se obtiene

$$2x + 3 = 15 \quad \rightarrow \quad 2x = 15 - 3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{15 - 3}{2}$$

Por tanto

$$x = 6$$

Cumpliéndose que el doble de seis más tres es igual a quince.

Tal vez el lector puede encontrar la misma respuesta sin usar ecuaciones, simplemente haciendo un cálculo mental, sin embargo, la intención de esta sección que familiarizar al estudiante con la modelación matemática.

Figura 1.10*. Peaje entre Pereira y Armenia.*

El peaje es una tasa o tarifa económica que cobra el Estado o un particular cuando este ha construido la vía con recursos propios, para hacer uso de la infraestructura vial; su valor depende básicamente del tipo de vehículo –tamaño o peso– y de la calidad de la vía.

Ejemplo 1.18. *El peaje entre Pereira y Armenia cuesta unos \$16.000 y una persona ha gastado \$96.000 pagando peajes cuando viaja entre estas dos ciudades; si parte de Pereira una vez hecho todos los recorridos, en qué ciudad debería haber quedado.*

Solución: *sabiendo que esta proporción es lineal, se pueden usar ecuaciones de primer grado.*

$$12.000x = 96.000$$

Despejando la variable se tiene

$$x = \frac{96.000}{16.000} = 6$$

Aunque es la solución, no es la respuesta a la pregunta; si partiendo de Pereira gasta dos peajes significa que fue a Armenia y regreso, por tanto, números pares de peajes pagados significa que el conductor se encuentra en la ciudad de origen –Pereira en este caso–, números impares de peajes pagados significa que el conductor está en la ciudad de destino –Armenia–.

El anterior es un buen ejemplo de la necesidad de interpretar la solución encontrada para dar una respuesta efectiva a la pregunta.

Los ejemplos 1.19 y los que van del 1.21 a 1.24, son tomados de Murcia y Henao (2021), presentan aplicaciones inherentes de la temática expuesta en este libro.

Ejemplo 1.19*. Una empresa dedicada al alquiler de vehículos les dice a sus clientes que el costo del servicio es un pago único de $50.000 más $1.000 por cada kilómetro recorrido. (a). Si la cuenta de un servicio para un determinado cliente es de $280.000, cuánta distancia recorrió el cliente en el vehículo. (b). La distancia entre Pereira y Bogotá es de 315 km, cuanto debería pagarle un cliente a la empresa de alquiler por un viaje de ida y vuelta entre las dos ciudades.*

Solución*: definiendo como x la cantidad de kilómetros recorridos, el modelo matemático del problema queda:*

$$C = 1.000x + 50.000$$

Donde C es el costo total del servicio, esta expresión sirve para resolver las dos preguntas.

a. *Aquí se proporciona el valor de C, que es 280.000, por tanto:*

$$280.000 = 1.000x + 50.000 \quad \rightarrow \quad 1.000x = 280.000 - 50.000$$

$$x = \frac{230.000}{1.000} = 230$$

El cliente recorre 230 km.

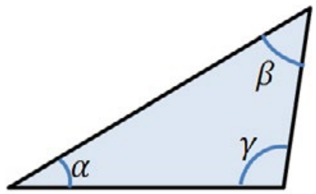
b. *En este caso la distancia recorrida es de 630 km –ida y vuelta– y reemplazando en la ecuación se tiene:*

$$C = 1.000(615) + 50.000 = 615.000 + 50.000 = 665.000$$

Ese viaje en el vehículo alquilado tiene un costo de $665.000.

Este problema usa la función lineal de la cual se hablará más adelante, sin embargo, ya se pueden ir estableciendo relaciones entre las ecuaciones y las funciones.

***Ejemplo 1.20. Geometría plana**. La figura muestra un triángulo escaleno, si un ángulo es 20° menor que el segundo y el tercero es doble del menor aumentado en 40°, cuánto vale cada ángulo.*



***Solución:** defínanse los ángulos así.*

$\alpha = Angulo\ menor \qquad \beta = Angulo\ intermedio \qquad \gamma = Angulo\ mayor$

$$\alpha = \beta - 20$$
$$\gamma = 2\alpha + 40$$

Aquí se tienen dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que se necesita una tercera ecuación y que puede salir del teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo –nótese que el problema NO plantea este teorema sin embargo se debe recurrir a la experiencia y conocimientos previos para concluir acertadamente que se necesita este dato–.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

Y el conjunto de las tres ecuaciones queda:

$$\alpha = \beta - 20\ (i)$$
$$\gamma = 2\alpha + 40\ (ii)$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180\ (iii)$$

Resulta más sencillo despejar de (i) el ángulo β y reemplazar estar expresión y la expresión (ii) en la anterior ecuación:

$$\alpha = \beta - 20 \quad \rightarrow \quad \beta = \alpha + 20$$

$$\alpha + (\alpha + 20) + (2\alpha + 40) = 180$$

Reduciendo la expresión.

$$4\alpha + 60 = 180 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{120}{4} = 30°$$

Una vez conocido α se reemplazan en otras ecuaciones para encontrar los otros ángulos.

$$\beta = \alpha + 20 = 30 + 20 = 50$$

$$\gamma = 2\alpha + 40 = 2(30) + 40 = 60 + 40 = 100$$

En consecuencia $\alpha = 30;\ \beta = 50;\ \gamma = 100$

En geometría plana, la suma de los ángulos internos de cualquier figura cerrada está dada por la expresión

$$\sum \angle_{int} = (n-2)180$$

Donde n es el número de lados así,

Figura	*Lados*	*Suma*
Triángulo	*3*	*180*
Cuadrilátero	*4*	*360*
Pentágono	*5*	*540*

Ejemplo 1.21. *Al Parque Nacional del Café, en Montenegro – Quindío un día de baja temporada, la máquina registradora contabilizó el ingreso de 2.000 personas entre adultos y niños y la taquilla informa al gerente que se vendió boletería por un valor de $98.000.000, sabiendo que cada niño paga $43.000 y cada adulto $58.000, cuántos niños y cuantos adultos entraron al parque.*

Solución: *este es otro problema que se puede resolver por sistemas de ecuaciones lineales, estableciendo una ecuación de cantidad y una ecuación de dinero. Para ello, se define como a el número de adultos y como n el número de niños, por tanto, al saber que entraron 2.000 personas entre niños y adultos se puede plantear:*

$$a + n = 2.000$$

Cada adulto paga $58,000 y cada niño para $43.000, como entraron a adultos y n niños la ecuación de dinero queda:

$$58a + 43n = 98$$

Nótese que en esta expresión se omiten los miles y esto es viable siempre y cuando se omita en todos los términos. Finalmente, el sistema queda:

$$\begin{gathered} a + n = 2.000 \\ 58a + 43n = 98.000 \end{gathered}$$

Aplicando sustitución –igualmente se puede aplicar otro método sin problema–, se tiene:

$$a = 2.000 - n$$

Reemplazando

$$58(2.000 - n) + 43n = 98.000$$

$$116.000 - 58n + 43n = 98.000 \ \rightarrow \ -15n = -18.000$$

Luego

$$n = \frac{-18.000}{-15} = 1.200$$

Al parque entran 1.200 niños y fácilmente se puede demostrar que entran 800 adultos.

Otros tipos interesantes de problemas son las **mezclas**, los cuales consisten en encontrar las proporciones exactas de la mezcla de dos o más cantidades –que pueden ser materias primas, intereses de un capital, temperaturas– para obtener un producto. Los ejemplos siguientes ilustran estas aplicaciones.

Ejemplo 1.22. *Problema de mezcla. Un comisionista de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC) invierte un capital de USD 12.000 en dos tipos de acciones que al final de año dan un rendimiento –interés simple– del*

Imagen tomada de http://jaymv.com/

*El **interés** es el costo de usar un capital y es **interés simple** cuando se causan durante cada periodo de tiempo únicamente al capital inicial, retirándolos –los intereses– al vencimiento de cada uno de los periodos, evitando que se agregue esta deuda al capital prestado. Su fórmula está dada por:*

$$I_s = C \cdot r \cdot t$$

Donde I_s es el interés simple, r es la tasa de interés y t los periodos de tiempo

7,5% y el 6,5%. Cuánto capital se invierte en cada tipo de acción si al final del año el comisionista logra una ganancia de USD 850.

Solución: *nótese la similitud al problema anterior, sea A la cantidad de capital invertido en el primer tipo de acción y B la cantidad de capital invertido al segundo tipo de acción, por lo tanto, los US$12.000 se reparten entre los dos tipos de acciones:*

$$A + B = 12.000$$

Los porcentajes se aplican a cada capital de la siguiente forma –es importante recordar que se deben eliminar los porcentajes–.

$$0{,}075A + 0{,}065B = 850$$

Las ecuaciones quedan entonces.

$$\begin{gathered} A + B = 12.000 \\ 0{,}075A + 0{,}065B = 850 \end{gathered}$$

Aplicando reducción y multiplicando la primera ecuación por –0,075 se obtiene

$$\begin{array}{r} -0{,}075A - 0{,}075B = -900 \\ \underline{0{,}075A + 0{,}065B = 850} \\ -0{,}010B = -50 \end{array}$$

Así:

$$B = \frac{-50}{-0{,}01} = 5.000$$

Por tanto, en la acción tipo B se invierten USD 5.000 y en la acción tipo A se invierten USD 7.000.

Ejemplo 1.23*. En una acería se quiere obtener 40 toneladas de acero al 0,82% de carbono y se cuenta con dos materias primas, acero al 0,4% y acero al 1,0%. Cuántas toneladas de cada materia prima se deben fundir con la otra, para obtener la calidad de acero solicitada.*

Solución*: este es otro tipo problema clásico de mezcla, llamando* x_1 *la cantidad de acero al 0,3% y* x_2 *la cantidad de acero al 1,0%, la ecuación de cantidad queda:*

$$x_1 + x_2 = 40$$

La ecuación de porcentajes para el problema queda.

$$0{,}4\%x_1 + 1{,}0\%x_2 = 40(0{,}82\%)$$

Luego el sistema a resolver es:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 = 40 \\ 0{,}004x_1 + 0{,}01\%x_2 = 0{,}328 \end{gathered}$$

PROBLEMA

El veterinario de confianza de un granjero le dice que, para mantener a su ganado saludable, en la ingesta diaria de los animales, se les debe proporcionar al menos 3,6 gramos de vitaminas B1, 4 gr de vitamina B2 y 6 gr de vitamina B6. Para ello el granjero tiene a su disposición tres tipos de suplementos dietéticos con sus porcentajes vitamínicos.

	B1	B2	B6
Suplem 01	2%	1%	2%
Suplem 02	2%	2%	2%
Suplem 03	1%	2%	3%

Determine la cantidad de cada uno de los suplementos que debe mezclar el granjero, para garantizar la ingesta vitamínica necesaria con el fin mantener a sus animales sanos.

SOLUCIÓN

Multiplicando la primera ecuación por –0,004 y sumando las dos expresiones se llega a:

$$\begin{array}{r} -0{,}004x_1 - 0{,}004x_2 = -0{,}16 \\ \underline{0{,}004x_1 + 0{,}01x_2 = 0{,}328} \\ 0{,}006x_2 = 0{,}168 \end{array}$$

Despejando:

$$0{,}06x_2 = 0{,}168 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{0{,}168}{0{,}006} = 28$$

Se necesitan 28 toneladas de acero al 1% y 12 toneladas de acero al 4% para producir las 40 toneladas de acero al 0,82% de carbono.

Ejemplo 1.24. *Una industria fabrica tres tipos de transformadores eléctricos –tipo A, tipo B y tipo C– en líneas de producción que involucran tres procesos diferentes –ensamble, prueba y embalaje–, la tabla siguiente ilustra la cantidad de horas mensuales de trabajo necesarias para cada tipo de transformador y la cantidad de tiempo disponible en el mes.*

Transformador	*Ensamble*	*Prueba*	*Embalaje*
Tipo A	*6 horas*	*4 horas*	*1 hora*
Tipo B	*4 horas*	*2 horas*	*30 min*
Tipo C	*2 horas*	*3 horas*	*1h 30min*
Horas disponibles	*1.840 horas*	*1.440 horas*	*510 horas*

Cuantos transformadores de cada tipo se fabrican en esta empresa.

Solución: *sea A la cantidad de transformadores tipo A, B la cantidad de transformadores tipo B y C la cantidad de transformadores tipo C; en la tabla se muestra la cantidad de horas disponibles para la actividad con lo cual el sistema de ecuaciones queda:*

$$\begin{array}{c} 6A + 4B + C = 1840 \\ 4A + 2B + 3C = 1440 \\ A + 0{,}5B + 1{,}5C = 510 \end{array}$$

Nótese que para que el sistema sea consistente, todos los datos deben estar en horas. Aplicando cualquier método de solución, se puede demostrar fácilmente que se deben fabricar en el mes:

A = 120 transformadores tipo A
B = 180 transformadores tipo B
C = 200 transformadores tipo C

Cuando se analiza un problema, es importante comprender el contexto donde se desarrolla, pues de ahí se puede inferir información necesaria para la solución.

Ejercicios sección 1.4. Problemas que se resuelven con ecuaciones lineales.

1. Al realizar la adición entre un par de números se obtiene como resultado 20 y la diferencia entre ellos es 4, determine cada uno de los números.

2. En mi familia ¿Cuántos hijos e hijas somos?, yo manifiesto que tengo tantas hermanas como hermanos y mi hermana mayor manifiesta que tiene el doble de hermanos que de hermanas. ¿Cuántos hijos e hijas constituyen mi familia?

3. En una parcela se producen gallinas y conejos, si el granjero cuenta 52 cabezas y 160 patas, cuántos animales tiene de cada tipo.

4. Al sumar, la edad de un tío y sobrino, se obtiene 24 años, dentro de seis años, la edad del tío será tres veces la edad del sobrino, qué edad tiene cada uno.

5. El perímetro de un rectángulo mide 56 centímetros, si el triple del largo equivale al cuádruple del ancho, cuáles son las medidas del rectángulo.

6. En el movimiento rectilíneo, se sabe que el espacio recorrido por un cuerpo es igual a su velocidad por el tiempo, esto es:
$$x = v \cdot t$$
Dados que las ciudades A y B están distanciadas 150 kilómetros y un vehículo que parte de A hacia B lo hace con una velocidad de 45 km/h y un vehículo que se mueve de B a A lo hace con una velocidad de 35 km/h, en cuanto tiempo se encuentran y a que distancia de la ciudad B lo hacen.

7. Un tanque de agua es llenado por medio de dos llaves A y B, si la llave A lo llena completamente en 7 horas y la llave B lo llena en 5 horas, cuánto tardan las dos en llenar el tanque si están ambas funcionando a la vez

8. Un reloj marca las 4 am, a que horas –en dos momentos diferentes–, el ángulo entre las manecillas será recto.

9. En una pelea entre moscas y arañas, se pueden contar 64 cabezas y 392 patas, cuántas moscas y cuantas arañas hay.

10. En un examen de 100 preguntas para el ingreso a la universidad, por cada pregunta que conteste bien al aspirante le dan 5 puntos, pero por cada pregunta que responda mal, le quitan 2 puntos. Si un aspirante cualquiera obtiene 360 puntos en la prueba, cuantas preguntas contesta bien y cuántas contesta mal.

11. Una hidro-cortadora puede cortar longitudinalmente una pieza de acero a una velocidad de $0.3\frac{cm}{s}$. Qué tan larga es la pieza si se necesitan 12 minutos para cortarla completamente

12. En el Cerrejón –ubicado en la Guajira colombiana–, la banda transportadora que lleva carbón mineral para descargar en los vagones de tren, lo hace a una velocidad de 18.000 kilos por cada minuto. Cuánto tardará en llenarse un tren carguero de 562 vagones con capacidad de 110 toneladas si cada vagón usa 24 bandas transportadoras iguales.

13. La media maratón de Bogotá es una carrera cuyo recorrido es de 21 km; en el año 2019 el Keniano **TAMIRAT TOLA** hizo un tiempo de 1 hora con tres minutos, estime la velocidad promedio de este maratonista.

14. La señora Martínez invierte USD 15.000 a un año, una parte de esta cantidad al 6% y el resto al 2% de interés simple. ¿Cuánto dinero se invierte en cada tasa de interés, si el interés total ganado de ambas inversiones es de USD 400?

15. La señora López por su parte invirtió $12.000 a un año; una parte de esa cantidad se invirtió al 7% y la otra al 3%. Si el interés total ganado fue de US$ 680, cuánto invirtió en cada tasa.

16. Las acciones del Grupo Éxito en un día normal de operación del mercado se venden a un promedio de USD 25.000 cada una y las acciones del grupo Argos se venden a USD 20,000. Un comisionista tiene USD 13.300.000 y desea comprar el triple de acciones Éxito que de Argos. ¿Cuántas acciones de cada grupo puede comprar?

17. El precio de entrada a una obra de teatro en Londres es de 200 € para Preferencial y 40 € para general. Se vendieron un total de 550 entrada. ¿Cuántos boletos eran para silla preferencial y cuantos boletos eran para silla general, si se recaudó un total de 46.000 €?

18. Alicia tiene un total de 40 monedas de cien y doscientos pesos. El valor total de las monedas es de $5.500, cuántas monedas de cada denominación tiene

19. Una trilladora de café ofrece dos tipos de producto de diferente calidad; café exportación $6.000 la libra, y café pasilla a $2.000 la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de café debe mezclar la trilladora para obtener un total de 400 libras de café cuya calidad pueda venderse a $3.500 la libra?

20. A la misma empresa trilladora le hacen un pedido de café internacional que pueda vender a $3.750 la libra, cuál debe ser la proporción de la mezcla para atender esta demanda.

21. Se quiere preparar 50 ml de un medicamento que contenga 0,6% de una droga a partir de dos insumos los cuales tienen 1,0% y 0,5% de esta misma droga. Determine la cantidad que se debe mezclar para lograr esta solución

22. Por lo general las soluciones de alcohol se preparan con alcohol y agua, mezclados con alguna proporción. Supóngase que se tiene una solución de alcohol al 20% que se desea mezclar con otra solución de alcohol al 40% para obtener 12 litros de solución de alcohol al 30%, ¿Cuántos litros de cada solución se deben mezclar para lograr esta nueva concentración?

23. En un laboratorio se tienen dos frascos con ácido sulfúrico, en uno se muestra una concentración del 5%, pero la etiqueta en la otra botella que muestra la concentración de ácido está borrosa y los indicadores con que cuenta el laboratorio no permiten medir concentraciones por encima del 10% de ácido. El laboratorista de forma creativa decide mezclar 30 ml de la solución al 5% y 10 mililitros de la otra solución dando como resultado una solución que tiene 7,5% de ácido sulfúrico; dada esta información determine la concentración de ácido que debe indicar la etiqueta borrosa.

24. Un vivero vende dos tipos de semilla para pasto y determina que las semillas de menor calidad tienen un porcentaje de germinación del 60%, sin embargo, se perdió la información del porcentaje de germinación de las semillas de mayor calidad. Ante este problema el gerente llama a uno de sus clientes a quien le vendió el mes pasado 20 kilos de una mezcla de semillas de ambas calidades para averiguar el porcentaje de germinación, el cliente amablemente le contesta que hubo un 72% de germinación de semillas. Dada esta información determine la calidad de germinación de la semilla de calidad superior.

25. Cierto fabricante especifica que, para su motor de dos tiempos, se debe usar una mezcla de 10 partes de gasolina por 1 parte de aceite; sabiendo esto determine cuánta gasolina pura debe agregarse a una mezcla gasolina-aceite que contiene 75% de gasolina, para obtener una mezcla de 12 galones de combustible con la proporción requerida por las especificaciones del fabricante.

SECCIÓN 1.5 ECUACIÓN CUADRÁTICA

Las ecuaciones cuadráticas conocidas también como ecuaciones de segundo grado son expresiones algebraicas donde el exponente más grande de cualquiera de las variables es dos.

Definición 1.4. Ecuación cuadrática. Las ecuaciones de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Con a, b y $c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se denominan ecuaciones cuadráticas o de segundo grado

Son ejemplos de ecuaciones cuadráticas:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad ; \quad -3y^2 + 4y - 2 = 0$$

Como se vio en secciones anteriores, solucionar una ecuación es encontrar el conjunto de valores que la vuelven cierta, es decir, aquellas cantidades numéricas que, reemplazadas en la expresión, hace cumplir la igualdad.

Ejemplo 1.25. *Demuestre que los valores $x = -1$ e $x = -2$ son soluciones de la expresión:*

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

Solución: *basta con reemplazar en esta expresión los valores.*

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow (-1)^2 + 3(-1) + 2 \rightarrow 1 - 3 + 2 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Para el segundo valor se tiene

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow (-2)^2 + 3(-2) + 2 \rightarrow 4 - 6 + 2 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Nótese que, en ambos casos se cumple la igualdad.

Estos valores que vuelven cierta la expresión se denominan **soluciones, ceros, raíces o polos**, a continuación, se explican dos procedimientos para encontrar estos valores.

Solución por medio de factorización.

El método para resolver o solucionar ecuaciones cuadráticas se basa en la propiedad del producto cero de los números reales, el cual establece que.

Teorema 1.3. Propiedad cero de los números reales. *Si a y b son números reales y $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$ o ambos a y b son iguales a cero.*

Esta propiedad indica que un producto de dos cantidades es igual a cero si uno, el otro o ambos es igual a cero. La solución por factorización busca precisamente encontrar estos factores –que de hecho son factores lineales– y se igualan cada uno a cero.

***Ejemplo 1.26**. Resolver por factorización las siguientes ecuaciones:*

a. $4x^2 = 0$ *b.* $4x^2 - 8x = 0$
c. $4x^2 = 9$ *d.* $x^2 - 3x - 10 = 0$
e. $2x^2 - 6x + 4 = 0$

***Solución**: cada problema que se ilustra aquí está asociado a un caso típico de factorización.*

a. *Este es posiblemente el caso más simple que hay.*

$$4x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x \cdot x = 0$$

Igualando cada factor a cero se obtiene

$$\begin{array}{l} 4x = 0 \ \rightarrow \ \ x = 0 \\ x = 0 \ \ \rightarrow \ \ x = 0 \end{array}$$

Nótese que se encontraron dos valores.

b. *Para este problema, se puede aplicar factor común*

$$4x^2 - 8x = 0 \quad \rightarrow \quad 4x(x-2) = 0$$

Igualando cada factor lineal a cero, se obtienen las dos soluciones

$$4x = 0 \ \rightarrow \ x = 0 \qquad y \qquad x - 2 = 0 \ \rightarrow \ x = 2$$

c. *Trasformando esta expresión y aplicando diferencia de cuadrados, el cual establece que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ se llega.*

$$4x^2 = 9 \ \rightarrow \ 4x^2 - 9 = 0 \ \rightarrow \ (2x+3)(2x-3) = 0$$

Igualando cada factor lineal a cero se obtiene:

$$2x + 3 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{3}{2} \qquad\qquad 2x - 3 = 0 \rightarrow \ x = -\frac{3}{2}$$

De nuevo se obtiene dos valores, sin embargo, es posible resolver esta ecuación simplemente despejando la x.

$$4x^2 - 9 = 0 \ \rightarrow \ 4x^2 = 9 \ \rightarrow \ x^2 = \frac{9}{4} \ \rightarrow \ x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$

d. *Este problema se puede resolver factorizando el trinomio de la forma* $x^2 + bx + c$, *ya que el coeficiente de la variable cuadrática es uno. Esta factorización establece la necesidad de encontrar dos números tales que el producto sea c y la suma o diferencia de estos sea b. Siendo concretos para el problema* $x^2 - 3x - 10 = 0$ *se deben encontrar dos números cuya multiplicación o producto sea –10 y su suma o resta sea igual a –3; fácilmente el lector puede deducir que los números buscados son –5 y 2, ya que:*

$$(-5)(2) = -10 \quad y \quad -5 + 2 = -3$$

Por tanto, la factorización queda:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \;\; \rightarrow \;\; (x-5)(x+2) = 0$$

Igualando cada factor a cero se obtiene:

$$x - 5 = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = 5 \qquad\qquad x + 2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = -2$$

Como en los casos anteriores, se tienen dos soluciones reales.

e. *Este último caso se puede resolver por medio de la factorización de la forma* $ax^2 + bx + c$, *la cual establece la necesidad de multiplicar y dividir toda la expresión por a, dejando indicada la multiplicación del segundo término y aplicando finalmente el procedimiento para la factorización que se vio en el problema anterior; así:*

$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \;\; \rightarrow \;\; \frac{4x^2 - 6(2x) + 8}{2} = 0$$

En la anterior expresión se obtiene la raíz del primer término y se buscan dos cantidades que multiplicado sea +8 y su suma o resta sea igual a –6; fácilmente se puede concluir que los números son –4 y –2, por tanto

$$\frac{(2x-4)(2x-2)}{2} = 0 \quad Simplificando \;\; (x-2)(2x-2) = 0$$

Igualando cada factor a cero se obtiene

$$x - 2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = 2 \qquad\qquad 2x - 2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = \frac{2}{2} = 1$$

Las dos soluciones son $x = 2 \quad y \quad x = 1$

Existe otro método de solución denominado **completar de cuadrados** que termina por reescribir las ecuaciones en términos de trinomios cuadrados perfectos para luego obtener raíces cuadradas. Esta técnica no se revisa en esta sección, pero queda disponible al interés del lector.

PROBLEMA

Resolver usando factorización la siguiente ecuación:

$$x^4 = 16$$

SOLUCIÓN

YouTube

Solución por medio de la fórmula general.

Este es un método que emplea una fórmula la cual se demuestra mediante la técnica de completar el cuadrado que se deja de consulta para el lector

Teorema 1.4. Fórmula general. *Sea* $ax^2 + bx + c = 0$ *una ecuación de segundo grado con a, b, c constantes reales, las soluciones de esta ecuación están dadas por:*

$$x_{I,II} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{[Ec. 1.5]}$$

Con $a \neq 0$. *Estas soluciones también reciben el nombre de ceros, raíces o polos*.

No siempre es posible resolver una ecuación cuadrática por medio de la factorización, sin embargo, siempre es posible resolverla mediante la fórmula general. A continuación, se vuelven a resolver los problemas anteriores usando fórmula general.

Ejemplo 1.27. *Resolver por factorización las siguientes ecuaciones*

a. $4x^2 = 0$ *b.* $4x^2 - 8x = 0$
c. $4x^2 = 9$ *d.* $x^2 - 3x - 10 = 0$
e. $2x^2 - 6x + 4 = 0$

Solución*: comparando cada ecuación con la expresión general de una ecuación cuadrática se tiene:*

a. $4x^2 = 0$ *puede escribirse como* $4x^2 + 0x + 0 = 0$ *en consecuencia a=4, b=0 y c=0, reemplazando en la fórmula general, se tiene:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(4)(0)}}{2(4)} = \frac{0 \pm 0}{8}$$

Hay dos soluciones, una usando el positivo y la otra usando el negativo de la expresión, sin embargo, en ambos casos se llega a la misma solución como en el problema anterior x = 0.

b. $4x^2 - 8x = 0$ *puede reescribirse esta expresión para quedar equivalente a la general como* $4x^2 - 8x + 0 = 0$, *donde se puede concluir que a = 4, b = –8 y c = 0 y subsecuentemente:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(0)}}{2(4)} = \frac{8 \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{8 \pm 8}{8}$$

Utilizando las dos opciones dadas por los signos se tiene:

$$x = \frac{8+8}{8} = 2 \qquad x = \frac{8-8}{8} = 0$$

c. *Para* $4x^2 - 9 = 0$ *la expresión se reescribe como* $4x^2 + 0x - 9 = 0$ *en donde a=4, b=0 y c=–9. Usando la fórmula general, se llega:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(4)(-9)}}{2(4)} = \frac{0 \pm \sqrt{144}}{8} = \frac{0 \pm 12}{8}$$

Las dos soluciones son:

$$x = \frac{0+12}{8} = \frac{4}{3} \qquad x = \frac{0-12}{8} = -\frac{4}{3}$$

Idénticas a las encontradas por el método de factorización.

d. *Para* $x^2 - 3x - 10 = 0$ *se puede establecer que a = 1, b = –3 y c = –10 por tanto:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$$

Así

$$x = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \qquad x = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

e. *Para* $2x^2 - 6x + 4 = 0$ *se tiene a = 2, b = –6 y c = 4, entonces:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{4}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4}$$

Así

$$x = \frac{6+2}{4} = \frac{8}{4} = 2 \qquad x = \frac{6-2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Que corresponden a las mismas soluciones encontradas por el método de factorización.

De la misma manera que las ecuaciones lineales pueden formar sistemas, las ecuaciones cuadráticas igualmente pueden formar sistemas con otras ecuaciones, incluso con lineales o de exponentes superiores; los siguientes ejemplos ilustra esta situación.

EL NÚMERO ÁUREO

Imagen tomada de : https://www.pinterest.com.mx/pin/pin-en-diseo-bidimensional-1--846676798703561635/

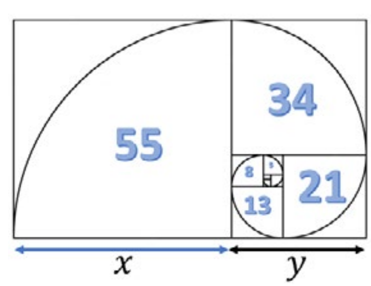
El número áureo, número de oro o razón divina, es un número irracional que se representa por la letra griega φ y que equivale a:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033$$

Descubierto en la antigüedad posee varias propiedades interesantes especialmente en la geometría, pero también se encuentra frecuentemente en proporciones en la naturaleza y ha sido utilizado ampliamente en la arquitectura y el arte para obtener proporciones estéticas y agradables a los sentidos.

El número áureo es el valor numérico de la proporción de dos segmentos de recta x y y con $x > y$ que satisface la ecuación:

$$\varphi = \frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$$



Ejemplo 1.28. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.*

$$y = 2x + 1$$
$$y = x^2 + 2x - 3$$

Solución: *cuando se resuelve un sistema de ecuaciones que contiene por lo menos una ecuación cuadrática, lo que resulta más sencillo es reducir la variable que en ambas expresiones tiene exponente 1. Para este problema la variable y tiene en ambas ecuaciones exponente 1, mientras que la x es la variable al cuadrado en la segunda expresión. Como está configurado el problema resulta más sencillo y práctico igualar –reducción por igualación– las dos ecuaciones*

$$x^2 + 2x - 3 = 2x + 1 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 3 - 2x - 1 = 0$$

Simplificando se llega a $x^2 - 4 = 0$

Solucionando por factorización $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) = 0$

Tomando cada factor lineal e igualando a cero se obtiene

$$x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2$$
$$x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

Reemplazando en cualquier ecuación, de estas dos soluciones se encuentran los valores de y. Por simplicidad se usa la primera ecuación, así:

$$y = 2(-2) + 1 = -4 + 1 = -3$$
$$y = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

Por tanto, las dos soluciones son:

$$(x, y) \rightarrow \ (-2, -3) \qquad\qquad (x, y) \rightarrow \ (2,5)$$

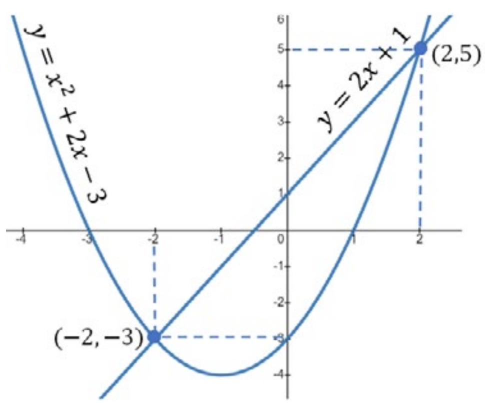


Figura 1.11*. Representación gráfica del problema 1.28.*

Aunque no es tema de esta sección, al graficar en un mismo plano las dos funciones, se puede apreciar que los puntos de corte entre las dos curvas –como muestra la figura anterior–, son iguales a los encontrados de forma analítica.

Problemas que se resuelven con ecuaciones de segundo grado

De la misma forma que se analizó con las ecuaciones lineales, es posible aplicar las ecuaciones cuadráticas a problemas de contextos cotidianos; tómense como referencia los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.29. *Se quiere cercar un terreno rectangular de superficie 9.600 m^2 utilizando 400 m lineales de malla; dadas estas condiciones, encuentre las dimensionales del terreno.*

Solución: *de la geometría plana se conoce que el área de un rectángulo se obtiene de la multiplicación de las dimensiones de sus lados, por tanto, llamando a su largo y b su ancho respectivamente se obtiene una ecuación.*

$$a \cdot b = 9.600$$

Por otro lado, si se usa una malla para cercar el terreno, es necesario encontrar el perímetro de este, que se obtiene sumando las longitudes de los lados de la figura, esto es:

$$2a + 2b = 400$$

Que simplificando se llega a:

$$a + b = 200$$

Despejando, de esta última ecuación, una de las variables y reemplazando en la primera, se logra:

$$a = 200 - b \quad \textit{Entonces} \quad (200 - b) \cdot b = 9.600$$

$$200b - b^2 = 9.600 \qquad \rightarrow \qquad b^2 - 200b + 9.600 = 0$$

Al resolver esta ecuación, se llegan a dos valores.

$$b = 80m \quad o \quad b = 120m$$

A partir de cualquiera de estos dos resultados y utilizando las ecuaciones iniciales, es posible encontrar el valor de la otra dimensión del terreno.

$$a = 120m \quad o \quad a = 80m$$

.

PROBLEMA

En una litografía, se requiere producir hojas de papel para imprimir una revista.

Las condiciones que solicita el fabricante para la hoja es que su alto sea $\frac{5}{3}$ la medida de su base, que el área de impresión sea de 144cm², que se deje un espacio de 2 cm en la parte superior e inferior de la hoja para las márgenes y de forma similar, se deje una margen de 1,5cm a la izquierda y derecha de la hoja para la margen. Con estas condiciones determine las dimensiones de la hoja.

SOLUCIÓN

Ejercicios sección 1.5. Ecuación cuadrática.

Resolver las siguientes ecuaciones usando factorización, de ser posible y corroborar el resultado usando la fórmula general:

1. $x^2 - 2x + 1 = 0$
2. $x^2 - 3x - 4 = 0$
3. $x^2 - 6x + 8$
4. $9x^2 - 12x - 4 = 0$
5. $2x^2 + 4x - 6 = 0$
6. $5x^2 - 16x + 12 = 0$
7. $-2x^2 - 7x + 15 = 0$
8. $3x^2 - 7x + 4 = 0$
9. $4x^2 + 3x - 22 = 0$
10. $x^2 - 1 = 0$
11. $1 - x^2 = 0$
12. $x^2 - x = 0$
13. $x^2 - 5x = 0$
14. $x^2 = 0$
15. $-x^2 = 0$
16. $x^2 + 3x - 4 = 0$
17. $x^2 - 7x + 6 = 0$
18. $x^2 + 1 = 0$
19. $4 + x^2 = 0$
20. $x^2 + 8x = 0$
21. $x^2 - 121 = 0$

Obtener los ceros polinomiales de las siguientes funciones cuadráticas:

22. $2x^2 - 4x - 3 = 0$
23. $-3x^2 + 3x + 4 = 0$
24. $-2x^2 + 3 = 0$
25. $x^2 - 1 = 0$
26. $-x^2 + 2x + 3$
27. $2x + x^2 = 0$
28. $7x - 4x^2 + 1 = 0$
29. $-3x + 4x^2 + 1 = 0$
30. $x^2 - 3x - 5 = 0$
31. $x^2 - 5x - 6 = 0$
32. $2x^2 - 5x = 0$
33. $-2x^2 + 5x - 6 = 0$
34. $3x^2 + 2 = 0$
35. $5x^2 - 1 = 0$
36. $7x - 4x^2 = 0$
37. $8x^2 - 32 = 0$
38. $x^2 - \sqrt{3} = 0$
39. $16x + 2 - x^2 = 0$
40. $2.5x^2 + 3.2x - 6 = 0$
41. $\frac{3}{2}x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 0$
42. $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0$
43. $\sqrt{2}x^2 + 5x - \sqrt{7} = 0$
44. $x^2 + x - \pi = 0$
45. $\pi x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$
46. $x^2 - \phi x - \pi = 0$

Determine si el valor planteado es solución para la ecuación que se muestra.

47. $x^2 + 3x - 15 = 0$ $\quad x = 3$
48. $x^2 - 2x - 8 = 0$ $\quad x = -2$
49. $x^2 + x - 6 = 0$ $\quad x = 3$
50. $x^2 - x - 1 = 0$ $\quad x = 2$
51. $x^2 - 4 = 0$ $\quad x = -2$

Dados los siguientes sistemas de ecuaciones, encontrar el conjunto de soluciones (si existe)

52. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}$

53. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 + 3x - 4 \end{cases}$

54. $\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = x^2 + 3x - 1 \end{cases}$

55. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x^2 + 16 \end{cases}$

56. $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$

57. $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x^2 + x + 1 \end{cases}$

58. $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}$

59. $\begin{cases} y = 2x^2 + x \\ y = -0.8x^2 + x + 2.8 \end{cases}$

60. $\begin{cases} y = -4x^2 + 5x + 3 \\ y = x^2 + 5x - 2 \end{cases}$

61. $\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ y = -x^2 + x + 3 \end{cases}$

62. $\begin{cases} y = -x^2 + 3x + 1 \\ y = y = x^2 + x + 1 \end{cases}$

Resolver las siguientes ecuaciones

63. $\sqrt{5x+4} - 1 = 2x$

64. $-\sqrt{2x+3} = 2x - 3$

65. $\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x+6} = 7$

66. $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x+1} = 2$

67. Dada la ecuación cuadrática

$$x^2 + kx + 16 = 0$$

Encuentre el valor de k necesario para que existan dos soluciones reales e iguales.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

A continuación, usted va a encontrar una serie de situaciones problema en diversas áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), las cuales debe interpretar, modelar y resolver para dar cuenta de la solución. Ilustre y explique claramente los modelos propuestos, identificando las variables utilizadas, explicando también la estrategia de solución y la calidad de la solución encontrada

68. El resultado de sumar dos números es -7 y su producto es 12 ¿Cuáles son los dos números?

69. El resultado de sumar dos números es 18 y su producto es 32 ¿Cuáles son los dos números?

70. La suma de dos números es 3 y su producto es $\frac{8}{4}$, encuentre cada uno de los números.

71. La suma de dos números es 6 y su producto es -91, encuentre cada uno de los números.

72. El área de un terreno rectangular es 168 m², si el perímetro es 52 m, encuentre las dimensiones de este.

73. Un ganadero quiere cercar un pequeño terreno que tiene forma rectangular por medio de alambre de púas, que pasan por unos postes, para dar finalmente tres vueltas como muestra la figura.

Imagen tomada de : https://www.istockphoto.com/es/search/2/image?mediatype=illustration&phrase=paddock

Si utiliza 240 m de alambre de púas y el terreno para sus vacas tiene en total 384 m², encuentre las dimensiones de este. Asuma que el terreno no necesita puerta y que la cerca recorre todo el perímetro exterior.

74. El ganadero decide ahora construir su cerca en un terreno que linda contra una pared de ladrillos tal como muestra la figura.

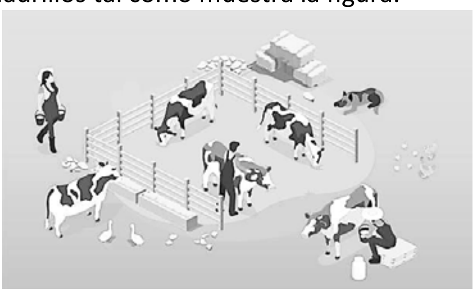


Imagen tomada de : https://www.istockphoto.com/es/search/2/image?mediatype=illustration&phrase=paddock

Sabiendo que las dimensiones son las encontradas en el problema anterior, determine la cantidad de alambre de púas que debe usar si quiere cerca el terreno dando tres vueltas y sabiendo que la pared se encuentra por el lado más largo del terreno.

75. Para la misma situación anterior, ahora el ganadero decide usar todo el alambre que tenía originalmente, los 240 m con los que dará las tres vueltas. Si el área del nuevo terreno es de 800m², encuentre las dimensiones de este terreno.

76. Una ventana normanda, es un tipo específico de ventana la cual consta de un rectángulo y un medio círculo encima del rectángulo tal como muestra la figura.

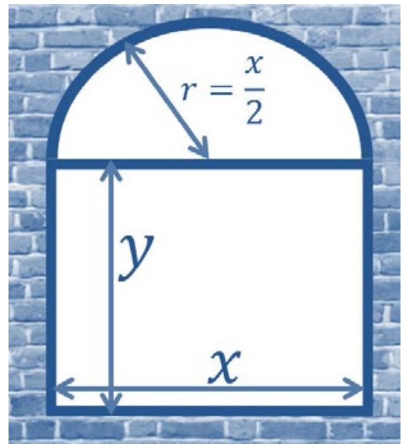
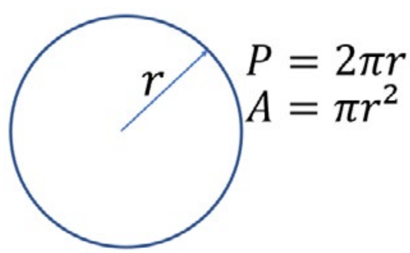


Imagen adaptada de : https://foro.rinconmatematico.com/index.php?topic=77686.0

Para la configuración mostrada, obtener las ecuaciones para el perímetro y para el área en términos de las variables x e y. Tenga en cuenta que el perímetro y el área de un círculo son respectivamente



77. Para el problema de la ventana normanda, suponga que se tiene una ventana cuyo perímetro exterior es $P = 5.1416\,m$ y la superficie de esta es $A = 1.8508m^2$. Dada esta configuración, encuentre las dimensiones de la ventana normanda que cumplen con los parámetros establecidos.

SECCIÓN 1.6 INECUACIONES LINEALES Y NO LINEALES

Una de las propiedades importantes del sistema de numeración decimal que se emplea actualmente es que sus unidades cuantitativas –los números– tienen un orden jerárquico de magnitud, lo cual permite organizarlos en una secuencia y adicionalmente agruparlos para así realizar los conteos de forma más ágil. Estas agrupaciones son los conjuntos, que reúnen los elementos que comparten alguna característica; los conjuntos son parte fundamental de toda la teoría de números incluyendo las inecuaciones y sus aplicaciones son amplias y variadas.

Los conjuntos son colecciones de elementos que se asocian bajo algún criterio particular o definido mediante una cualidad o propiedad; se denotan de muchas formas, siendo los corchetes {…} una de las más comunes; ahora cuando los elementos de un conjunto se listan, se dice que el conjunto está nombrado por comprensión tal como se ilustra a continuación.

A = {0,1,2,3,4}
B = {a, e, i, o, u}
C= {Amarillo, Azul, Rojo}

Cuando los elementos de un conjunto son nombrados usando alguna propiedad o característica se dice que el conjunto está denotado por extensión.

A = {Naturales menores a cinco}
B = {Las vocales del alfabeto}
C = {Los colores de la bandera}

Si cierto elemento pertenece a un determinado conjunto se emplea el símbolo ∈ y cuando no pertenece se usa el símbolo ∉. Por ejemplo, si el elemento 2 pertenece al conjunto A, entonces es posible usar la notación

$$2 \in \mathbf{A}$$

Por otro lado, el elemento 6 no pertenece al conjunto A, entonces

$$6 \notin \mathbf{A}$$

Ahora, una desigualdad es una relación que especifica qué cantidades son mayores o menores a otras. Se toman como convenciones los símbolos para representar estas relaciones.

De la misma manera que los números tienen propiedades asociadas con las operaciones básicas, los conjuntos también se les asocian propiedades con operaciones elementales, entre estas destacan.

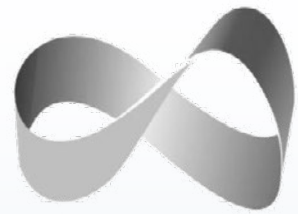


***Figura 1.12**. Cinta de Moebius.*

Imagen tomada de : https://conductasegura.com/blog/f/moebius-y-su-cinta

Es un plano de una sola cara con la propiedad de ser un objeto no orientable e igualmente tener un solo borde.

Debido al incremento en la complejidad de las situaciones sociales, económicas, científicas y culturales en las cuales se desenvuelven los seres humanos, cada vez más se precisan de herramientas descriptivas y de predicción más especializadas y confiables. La matemática, como lenguaje universal y transversal a cualquier disciplina ofrece algunas de estas herramientas.

En conjuntos es frecuente usar símbolos para abreviar algunas propiedades o relaciones. La tabla siguiente muestra algunos de estos símbolos.

Tabla 1.3. *Símbolos para representar operaciones entre conjuntos*.

Símbolo	Denota
$>$	Mayor que
$<$	Menor que
$\leq$	Menor o igual a
$\geq$	Mayor o igual a
$\neq$	Diferente a
$\approx$	Aproximadamente
$\in$	Pertenece
$\notin$	No pertenece
$\wedge$	Y
$\vee$	O
$\exists$	Existe
$\forall$	Para todo
$\Rightarrow$	Entonces
$\Leftrightarrow$	Si y solo si

.

Algebra elemental de conjuntos.

Las operaciones elementales que tienen dos conjuntos son la unión, la diferencia, la intersección y el complemento.

Unión o suma. El resultado de la suma o unión de dos conjuntos A y B denotado por $A \cup B$ o $A + B$, es un tercer conjunto conformado por todos los elementos que están en A o que están en B.

$$A \cup B = A + B = \{x/\ x \in A \ \vee \ x \in B\}$$ [1]

En términos gráficos queda como:

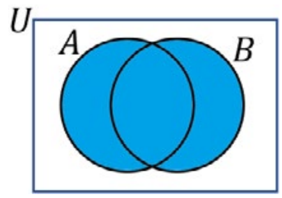


Figura 1.13. *Unión de dos conjuntos*

Intersección. El resultado de la intersección de dos conjuntos A y B denotado por $A \cap B$, es un tercer conjunto conformado por todos los elementos que están en A y que están en B, es decir, los elementos comunes.

$$A \cup B = \{x/\ x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

En términos gráficos queda como:

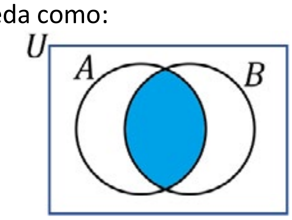


Figura 1.14. *Intersección de dos conjuntos*

Diferencia simple. El resultado de la diferencia simple de dos conjuntos A y B denotado por $A - B$, es un tercer conjunto conformado por todos los elementos que están en A y que no están en B.

$$A - B = \{x/\ x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

En términos gráficos queda como:

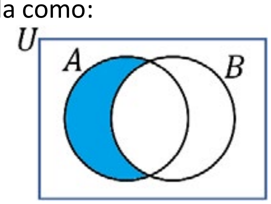


Figura 1.15. *Diferencia simple de dos conjuntos*

[1] Se debe leer como "*el conjunto de todas las x, tal que x pertenece a A o x pertenece a B*".

Diferencia simétrica. El resultado de la diferencia simple de dos conjuntos A y B denotado por $A \bowtie B$, es un tercer conjunto conformado por todos los elementos que están en A o que están en B pero que no están en A y en B simultáneamente.

$$A \bowtie B = \{x/\ x \in A\ \vee\ x \in B\ \wedge x \notin A \cap\ B\}$$

En términos gráficos queda como

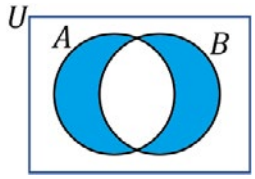


Figura 1.16. *Diferencia simétrica de dos conjuntos*

Complemento. El complemento de un conjunto A, denotado por A' o A^c, es un tercer conjunto conformado por todos los elementos del conjunto universal, que no pertenecen al conjunto A; en otras palabras, son los elementos que le hacen falta al conjunto A, para ser igual al conjunto universal.

$$A' = \{x/\ x \in U\ \wedge x \notin A\}$$

En términos gráficos queda como:

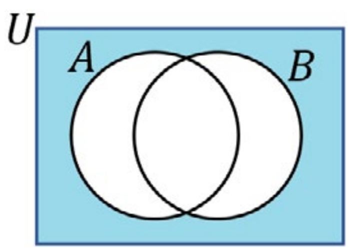
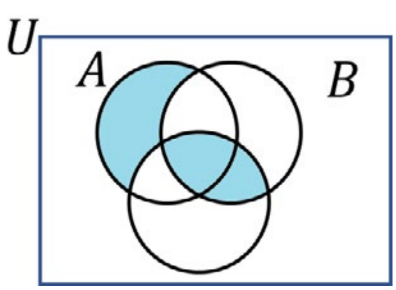


Figura 1.17. *Complemento de un conjunto*

A continuación, se muestran cómo se presentan algunos conjuntos

Ejemplo 1.30*. Dada la figura mostrada, encuentre la expresión analítica del conjunto sombreado.*



OTRAS PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS

Sea A un conjunto y U el conjunto universal, entonces se cumplen las siguientes propiedades

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$
$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$$
$$A \cap \mathbf{U} = A$$
$$A \cup A^c = \mathbf{U}$$
$$A \cap A^c = \emptyset$$

RENÉ DESCARTES

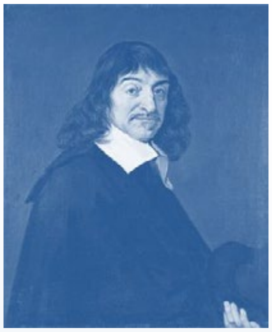


Figura 1.18. *Renato Descartes*

Imagen tomada de : *https://www.cultura.gob.ar/rene-descartes-heroe-del-pensamiento-moderno-8875/*

Celebre pensador, filósofo y matemático nacido en Francia, el 31 de marzo de 1596, a corta edad entra en la facultad de medicina de la ciudad de Poitiers, para formarse también en derecho. Durante 1619, se encuentra con Isaac Beeckman y Johann Faulhaber, investigadores de Alemania que lo incentivan fuertemente para que estudie matemáticas,

Descartes proponer un sistema de coordenadas en el plano –que actualmente lleva su nombre– y demuestra ciertas acciones elementales entre clases de poliedros. En el noveno mes del 1649 la soberana de Suecia, Cristina, lo llama para trasladarse a la ciudad de Estocolmo, lugar en el que murió el 11 del segundo mes del 1650, posiblemente por intoxicación con Arsénico.

Solución: *realmente no existe una única forma para representar conjuntos, todo depende de la forma en que se analiza el problema. Nótese que existen dos grandes regiones, una que tiene que ver con el conjunto A y otra que tiene que ver entre los conjuntos B y C, de esta manera la primera región es:*

$$Región\ 1 = \{\, x \,/\, x \ \in A \ \ \wedge \ \ x \ \ \notin \ \ A \cup B\}$$

La región dos está conformada por la intersección de los conjuntos B y C,

$$Región\ 2 = \{\, x \,/\, x \ \in \ B \cap C\}$$

Finalmente, la solución final es la unión de los dos conjuntos.

$$Región\ = \{\, x \,/\, x \ \in \{A \ \wedge \ x \notin \ A \cup B\} \cup \{B \cap C\}\}$$

Comprender algunos elementos de la teoría de conjuntos, facilita entender la naturaleza de las soluciones para inecuaciones

Inecuaciones

Una inecuación es una expresión matemática que expresa una relación de desigualdad entre cantidades, a manera de ejemplo supóngase las siguientes inecuaciones

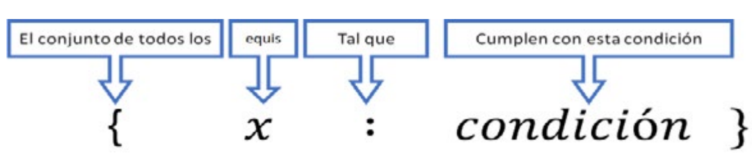
$$2x + 1 < 10 \qquad\qquad \frac{5 - x}{4 - x^2} \geq 10$$

En cada una de las dos anteriores relaciones se precisa encontrar el subconjunto de valores de x –sobre la recta numérica– que cumplen con la expresión, ahora para resolver una inecuación de este tipo, es preciso tener en cuenta las siguientes propiedades de las desigualdades.

Teorema 1.5. Propiedades de las desigualdades. Sea *a, b, c,* d y k números reales, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Propiedad Transitiva $\quad Si\ a < b\ \ y\ \ b < c\ \ entonces\ a < c$
2. Propiedad lineal $\quad Si\ a < b\ \ y\ \ c < d\ \ entonces\ a + c < b + d$
3. Propiedad Aditiva $\quad Si\ a < b\ \ \ entonces\ a + k < b + k\ \ \forall k$
4. Propiedad Multiplicativa $\quad Si\ a < b\ \ \ entonces\ a \cdot k < b \cdot k\ \ \ si\ k > 0$
4. Propiedad Multiplicativa $\quad Si\ a < b\ \ \ entonces\ a \cdot k > b \cdot k\ \ \ si\ k < 0$

Estas relaciones tienden a formar conjuntos y subconjuntos que no son más que una colección de elementos que cumplen con cierta característica o condición, así la notación constructiva para identificar los conjuntos es:



Uno de los usos más comunes de los conjuntos son los intervalos sobre la recta numérica; a manera de ejemplo, considérese el caso del subconjunto sobre la recta numérica del intervalo abierto (*a, b*)

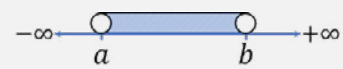
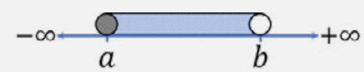
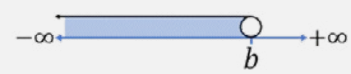
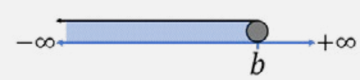
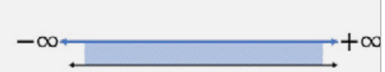
$$(a, b) = \{x \,/\, a < x \; < b\}$$

Este subconjunto representa todos los números reales que están entre los números *a* y b, sin incluir estos. Como convención gráfica se asume que, si el elemento extremo no pertenece al conjunto, el círculo queda sin sombrar.

Figura 1.19. *Representación de un subconjunto sobre la recta numérica*

La anterior situación ilustra un conjunto abierto, es decir, que el conjunto solución está entre los dos valores (*a, b*) sin que estos extremos pertenezcan a la solución. La tabla 1.4., ilustra las posibles situaciones y sus respectivas representaciones.

Tabla 1.4. *Diversas representaciones para los intervalos.*

Tipo de Intervalo	Notación de Intervalo	Notación de Conjunto	Gráfica
Abierto	$\{x \,/\, x \in (a, b)\}$	$\{x \,/\, a \; < x < b\}$	
Cerrado	$\{x \,/\, x \in [a, b]\}$	$\{x \,/\, a \; \leq x \leq b\}$	
Abierto por la derecha	$\{x \,/\, x \in [a, b)\}$	$\{x \,/\, a \; \leq x < b\}$	
Abierto por la izquierda	$\{x \,/\, x \in (a, b]\}$	$\{x \,/\, a \; < x \leq b\}$	
Al infinito abierto por la derecha	$\{x \,/\, x \in (-\infty, b)\}$	$\{x \,/\, x < b\}$	
Al infinito abierto por la izquierda	$\{x \,/\, x \in (a, +\infty)\}$	$\{x \,/\, x > a\}$	
Al infinito cerrado por la derecha	$\{x \,/\, x \in (-\infty, b]\}$	$\{x \,/\, x \leq b\}$	
Al infinito cerrado por la izquierda	$\{x \,/\, x \in [a, +\infty)\}$	$\{x \,/\, x \geq a\}$	
Conjunto de los reales	$\{x \,/\, x \in (-\infty, +\infty)\}$	$\{x \,/\, x \in \mathbb{R}\}$	

Resolver la inecuación

$$-4 \leq 2x - 6 \leq 8$$

Solución

Resolver la inecuación

$$-3 \leq 1 - 2x < 5$$

Solución

La solución de cualquier problema puede representarse usando la notación de intervalo, la notación de conjunto, la forma gráfica o la combinación de cualquiera de ellas.

Ejemplo 1.31. *Resuelva las siguientes inecuaciones:*

a. $2x - 3 \leq 9$ *b.* $2x + 3 > 4x + 7$

c. $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4} \geq 0$

Solución: *en el primer caso basta con despejar la variable*[2]*:*

$$2x \leq 9 + 3 \rightarrow x \leq \frac{9+3}{2}$$

Finalmente:

$$x \leq 6$$

Lo cual establece que cualquier número que sea menor o igual a 6 cumple la primera relación y en consecuencia todos ellos forman el conjunto solución. Formas alternativas de representar este conjunto son.

Notación de conjunto $\{x/x \leq 6\}$
Notación de intervalo $x \in (-\infty, 6]$

De esta última notación, es importante ver que el seis es un valor límite y es tomado dentro del conjunto solución lo cual se presenta con un corchete recto; cuando un número que está en el límite no es solución, se representa en la notación de intervalo con un paréntesis.

En un contexto gráfico, es posible representar la solución sobre una recta numérica tal como se ilustra a continuación.

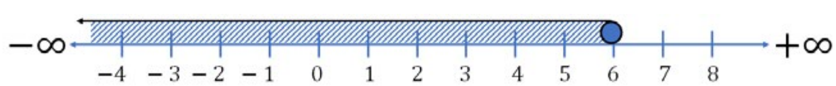


Figura *1.20.* *Representación gráfica del conjunto solución del problema 1.20.*

La solución se representa por una barra que inicia en 6 y toma todos los valores a la izquierda.

b. Para este problema se deben transponer los términos para despejar la variable de interés.

$$2x + 3 > 4x + 7 \;\rightarrow\; 2x - 4x > 7 - 3$$

Reduciendo se tiene:

$$-2x > 4$$

[2] Se debe prestar especial atención a las constantes negativas multiplicativas, pues en el caso que pasan de un lado de la desigualdad a otro, el sentido de la desigualdad debe cambiar

Recordando la propiedad 5 del teorema anterior, la constante negativa –2 al pasar del lado izquierdo al lado derecho hace cambiar el sentido de la desigualdad como se muestra a continuación –esta operación corresponde a multiplicar a ambos lados por – ½

Procedimiento 01	Procedimiento 02
$-2x > 4 \quad \rightarrow \quad x < -\frac{4}{2}$ $x < -2$	$-2x > 4 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) < -\frac{1}{2}(4)$ $x < -2$

En ambos procedimientos la respuesta es la misma

Notación de conjunto $\quad Sol = \{x \ : \ x < -2\}$

Notación de intervalo $\quad Sol = \{x \ \in (-\infty, 2)\}$

En términos gráficos, la solución de la inecuación queda:

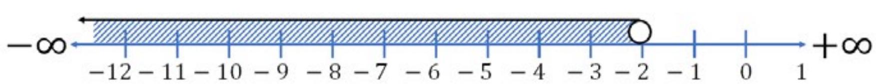


***Figura 1.21**. Representación gráfica del problema b.*

c. *Para el segundo ejemplo se emplea una estrategia denominada método de las cruces y lápidas. Primero se deben obtener los factores lineales de las expresiones dadas.*

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4} \geq 0$$

Factorizando se tiene:

$$\frac{(x-4)(x+1)}{(x+2)(x-2)} \geq 0$$

Posteriormente se construyen cuatro rectas numéricas, una debajo de la otra para cada factor lineal identificando en cada recta el valor que anula el factor lineal, es decir, para $(x-4)$ el factor que lo anula es 4, mientras que para $(x+1)$ el factor que lo anula es –1, cada factor que lo anula corresponde a una línea vertical ordenadas ascendentemente, por tanto, lo que se obtiene es algo parecido a lo mostrado en la figura 1.22.

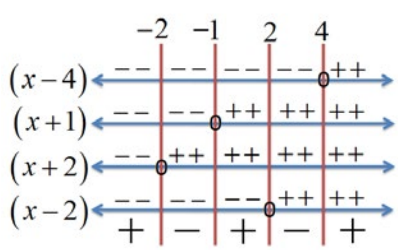


***Figura 1.22**. Método de las cruces y lápidas para solucionar una inecuación no lineal.*

***Tabla 1.5.** Crecimiento demográfico en Colombia*

Año	Habitantes
1770	806.641
1778	828.775
1782	1.044.565
1803	1.236.654
1810	1.374.354
1825	1.465.785
1835	1.686.038
1843	1.945.687
1851	2.265.652
1864	2.978.365
1870	3.401.652
1905	4.145.265
1912	5.085.652
1918	5.857.652
1928	7.853.652
1938	8.701.845
1951	11.548.172
1964	17.484.508
1973	22.551.811
1985	27.859.198
1997	37.418.290
2005	42.888.992
2010	44.899.584
2015	48.985.684
2020	50.372.125
2021	50.990.522
2022	51.609.148

Nótese que, debido a la restricción lineal, valores a la derecha del valor que lo anula, la hace positiva, mientras que valores a la izquierda de esta lo convierte en negativo[3]*; de igual forma se hace con todos los factores.*

Finalmente, se hace el producto de los signos, en este caso de los cuatro factores lineales, obteniéndose así el signo de toda la desigualdad; los valores que anulan cada factor son los límites de los intervalos. Es de interés según lo plantea el problema, los valores que sean mayores o por lo menos iguales a cero, es decir, de la figura 1.22., se escogen aquellos positivos, con lo cual la solución para el problema expresada en forma de intervalos es:

$$x \in (-\infty,-2) \cup [-1,2) \cup [4,\infty)$$

Y en forma gráfica

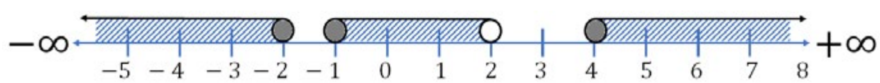


***Figura 1.23**. Solución gráfica del problema c.*

Para este problema se debe tener en cuenta que, aunque la desigualdad establece un "mayor o igual" y en consecuencia los límites de los intervalos deben ser cerrados, los valores –2 y 2 deben quedar abiertos pues de lo contrario al tomarlos dentro del espacio de soluciones, llevaría a una división por cero.

Aplicaciones de las inecuaciones

De la misma forma que las ecuaciones, las inecuaciones se aplican a una gran variedad de contextos tanto académicos como profesionales, a continuación, se plantean algunos ejercicios donde se evidencia la manera de emplear estas herramientas matemáticas.

Ejemplo 1.32. *Una empresa de telecomunicaciones inalámbricas le ha asignado un ancho de banda de frecuencias que va desde los 30GHz hasta los 40GHz y debido al tipo de tecnología empleada el número de canales –n– que puede operar entre estas dos frecuencias, sin que ocurra interferencia obedece a la relación matemática* $10 + 5n$. *Determine cuántos canales puede operar la empresa de forma segura.*

***Solución**: este problema tiene una restricción doble, como se muestra a continuación*

$$30 \leq 10 + 5n \leq 40$$

El 10 está sumando, luego pasa a restar a ambos lados de la inecuación.

---

[3] *No necesariamente los valores a la derecha del valor que anula una restricción lineal son siempre positivos, si por ejemplo una de las restricciones fuera (1–x), los Valores a la derecha de 1, hacen que esta sea negativa, y los valores a la izquierda hacen que sea positiva. Basta con probar números a la derecha y a la izquierda de 1, para constatar su signo.*

$$30 - 10 \leq 5n \leq 40 - 10$$

$$20 \leq 5n \leq 30$$

El cinco multiplica a la variable, luego pasa a dividir a ambos lados de la inecuación.

$$\frac{20}{5} \leq n \leq \frac{30}{5}$$

Por tanto

$$4 \leq n \leq 6$$

Que equivale a afirmar

$$n \in [4,6]$$

Como solamente se pueden tomar números enteros debido a la naturaleza del problema entonces la solución es que la empresa debe utilizar 4, 5 o 6 canales para enviar su información, si emplea más o menos se sale de los límites de frecuencia permitida.

Ejemplo 1.33. *Un comerciante quiere vender su producto a USD 6 la unidad, pero el costo de fabricarlo y traerlo obedece a la relación* $C = 1{,}6x + 1.200$ *dólares. Determine cuantos productos debe vender para obtener alguna ganancia.*

Solución*: para obtener ganancia, el ingreso debe ser mayor a los costos, esto es*

$$I > C$$

$$6x > 1.6x + 1200$$

Resolviendo la anterior inecuación se obtiene

$$6x - 1{,}6x > 1200$$

$$5{,}4x > 1200$$

$$x > \frac{1200}{4{,}4}$$

$$x > 272{,}7 \; unidades$$

Pero como es probable que no exista número decimal de unidades, el comerciante debe vender más de 273 unidades si quiere obtener alguna ganancia.

Ejercicios sección 1.6. Inecuaciones lineales y no lineales.

En los ejercicios siguientes resolver la inecuación dada y representar la solución en notación de intervalo y de conjunto.

1. $2x - 3 < 5$
2. $-3x + 1 \geq 5$
3. $3x + 7 \leq 28$
4. $12 - 5x \leq -3$
5. $6x - 3 < 2x + 5$
6. $x - 3 < 5x + 4$
7. $6x + x^2 - 1 < x(x - 3) + 8$
8. $5x + 3 \geq 18$
9. $16 - 6x \geq -2$
10. $-4x^2 + 6x > 4x - 4x^2 + 10$
11. $3x + 4 < 5x - 2$
12. $11x + 2 > 20x + 23$
13. $x + 3 \geq 2(3x - 4) - 2(5 - x)$
14. $3x + 4 < 5x - 2$
15. $\frac{6x+4}{2} > \frac{2-x}{-3}$.
16. $0 \leq 2x + 4 < 10$
17. $-5 < 3x + 1 \leq 10$
18. $11x + 2 > 20x + 23$
19. $12 < 2x + 2 \leq 16$
20. $2x + 1 < 5 < 2x + 7$
21. $-3 \leq x + 5 < 3$
22. $-2 < 5 + 7x \leq 26$
23. $7 - x \leq 10 < 12 - x$
24. $-7 \leq \frac{4-2x}{3} \leq \frac{1}{3}$
25. $\frac{1}{8} < 4 - 2(x + 3) \leq 5$
26. $2{,}45 < 3{,}1 + 0{,}16x < 4{,}45$
27. $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} - \frac{x}{4} \leq \frac{5}{2}$
28. $\frac{x+1}{1-x} \geq 0$
29. $x^2 + 3x - 4 \leq 0$
30. $x^2 - 4 \leq 0$
31. $x^2 - 1 \geq 0$
32. $x^2 + x \geq 0$
33. $x - x^2 < 0$
34. $\frac{3-x}{x+4} \geq 0$
35. $\frac{1}{x+2} < 1$
36. $\frac{3-x}{x} \geq 2$
37. $\frac{x^2+2x-3}{x-4} \leq 0$
38. $\frac{3-\frac{1}{3}x^2}{x+1} \leq 0$
39. $\frac{x+3}{x+1} > \frac{2}{x}$
40. $\frac{5-x}{x} \geq x + 3$
41. $\pi x^2 - 2 \geq 0$
42. $x^2 + x + 1 \geq 0$

Problemas de aplicación

A continuación, se presentan una serie de escenarios problémicos en diversas áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), los cuales deberán ser interpretados, modelados y resueltos para encontrar una solución adecuada. Para ello, se requiere ilustrar y explicar claramente los modelos propuestos, identificando las variables utilizadas y puntualizando la estrategia de solución empleada para alcanzar una solución de alta calidad.

43. **Costo de transporte**: un comerciante necesita vender su producto en varias ciudades y decide alquilar vehículos para lo cual una compañía le ofrece los siguientes planes:

Plan 1: *Pago único de $300.000 y $1250 por kilómetro recorrido.*
Plan 2*:* *Pago semanal de $850.000*

El comerciante establece que necesita los vehículos dos semanas y que su recorrido semanal es de 600 km por vehículo.

a. Bajo estas condiciones, qué plan debe escoger el comerciante.
b. Cuál debe ser el máximo recorrido semanal para que en las dos semanas resulte más favorable el plan 1.
c. Cuál debe ser el mínimo recorrido semanal para que en las dos semanas resulte más favorable el plan 2.

44. **Peso máximo**: se desea mover un gran cargamento de libros del primer al quinto piso de un edificio usando un elevador. El elevador tiene una placa que dice "***peso máximo 450 kilos***". Si cada caja de libros pesa 30 kilogramos, encuentre el número de cajas que se pueden colocar en el elevador.

45. **Peso del operario:** del ejercicio anterior, si el peso de la persona que transporta los libros es 75 kilos encuentre el número máximo de cajas que se pueden subir al ascensor.

46. **Celulares**: un operador celular informa a un cliente que el cobro por una llamada nacional es de 1000 pesos por los 2 minutos iniciales y 200 pesos por cada minuto agregado. Cualquier fragmento de minuto adicional será redondeada al siguiente minuto. Encuentre el tiempo máximo que el cliente puede hablar si cuenta con solo 20000 pesos.

47. **Parqueaderos**: un parqueadero de motos en el centro de Pereira cobra $2.500 por los primeros sesenta minutos y $600 **por hora agregada o fracción de hora**. ¿Cuál debe ser el tiempo máximo que una persona puede parquear su motocicleta para pagar a lo sumo $5,500

48. **Costo de la poesía:** un poeta piensa escribir y publicar su propio libro; él estima que su ecuación de ingresos es $I = 35x$ y su ecuación de costo es $C = 30.500 + 4{,}5x$ donde x es la cantidad de libros que comercia y C e I los costos y los ingresos expresados en miles de pesos. Encuentre el número mínimo de libros que requiere vender para obtener ganancia.

49. **Costo de la Poesía:** con respecto al problema anterior, si el poeta espera una ganancia de $12,200,000, ¿cuántos libros debe vender?

50. **Tintorería**: se inaugura una tintorería en el centro de la ciudad y se estima que la ecuación de costo anual es $C = 8{,}00 + 0.05x$ y la ecuación de ingresos $R = 1{,}85x$, donde x es la cantidad de mudas de ropa higienizadas en un año. Halle el número nimio de mudas de ropa que debe lavar la tintorería en el año para obtener una ganancia.

51. **Tintorería**: con respecto al problema anterior, si se espera una ganancia anual de US$6300, cuál debe ser el número de prendas lavadas.

52. **Derecho de uso**: a una empresa le ofrecen dos opciones para transportar sus productos;

la primera opción consiste en pagar un costo fijo de US$ 250 y posteriormente le cobran 23,8 centavos por cada producto que quiera enviar; la segunda opción no tiene cargo fijo pero le cobran 35 centavos por cada pieza o producto que quiera transportar. Determine el número mínimo de productos o elementos que debe enviar la empresa, para que sea más rentable transportarlas con la primera opción.

53. **Costo de envío**: Para determinar el peso máximo de un paquete que se pueda enviar por primera clase con un presupuesto de USD 30, se debe encontrar el punto en el cual el costo total del envío no supere el presupuesto disponible.

54. **Impuestos:** para que el Estado no pueda cobrar el impuesto de retención en la fuente a un trabajador independiente no puede declarar a final de año ingresos superiores a 24 millones de pesos. Si mensualmente este trabajador devenga 1,6 millones de pesos mensual y le ofrecen un trabajo donde le pagan $600,000 mensuales, ¿cuánto tiempo debería laborar para continuar exento de este impuesto estatal.

55. **Examen**: para ganarse una beca universitaria, un estudiante debe obtener un promedio de 400 puntos o más en cinco pruebas escritas. Si en las primeras cuatro sus calificaciones fueron 350; 400; 450; 350. ¿Cuál es el intervalo de notas que debe obtener en la última prueba para ganarse la beca de la Universidad?