CAP. 2. FUNCIONES

En el capítulo anterior, se introduce el concepto de ecuación como un tipo especial de relación de igualdad entre dos expresiones matemáticas que tienen variables conocidas y desconocidas, unidas mediante operaciones y cuya intencionalidad primaria es encontrar el valor o conjunto de valores de las variables desconocidas. En este capítulo, se retoma lo desarrollado por Murcia y Henao(2021) y se analizan las funciones como tipos especiales de relaciones matemáticas, definiendo en ellas características y propiedades importantes e igualmente dentro de las funciones las ecuaciones.

Tómese como ejemplo la función lineal $f(x) = 2x + 1$ que puede convertirse en una ecuación lineal de dos variables como

$$y = 2x + 1$$

La cual tiene infinitas soluciones, ahora sí $y = 7$ por ejemplo, la ecuación de dos variables se convierte en una ecuación lineal con una sola variable.

$$7 = 2x + 1$$

Que desde luego se puede solucionar llegando a la respuesta $x = 3$. Nótese entonces la relación tan estrecha que tienen las funciones y las ecuaciones y lo sencillo que es convertir una en otra. Para los fines del presente texto se prefiere trabajar primero y de forma independiente el tema de las ecuaciones para aprender a manipularlas y así comprender más fácil las funciones, sin embargo, en esta sección se toman como unidad funcional que es el sentido verdadero que deben tener las funciones y las ecuaciones.

SECCIÓN 2.1 INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE FUNCIONES

En la modelación de situaciones reales, muchas veces ocurren que las variables que describen las características son dependientes, es decir, el valor que puede adquirir una variable depende de otra; como ejemplo, supóngase el precio de los alimentos y el precio de los combustibles, es sabido que cuando el precio de la gasolina sube, el precio de los alimentos tiende a subir lo que sugiere que existe algún tipo de relación entre estos dos elementos, así no sea tan fácil describirla en términos matemáticos; existen por otro lado relaciones más fáciles de modelar, como el costo de una carrera en taxi, este valor depende del día y la hora en que se haga el servicio, depende de la distancia recorrida, del tiempo que el auto esté

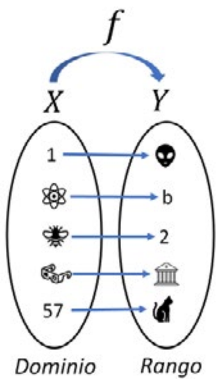


Figura 2.1. *Representación en diagramas de Venn para una función*.

Tabla 2.1. *Función pasaje de bus.*

#personas	***Costo total***
0	*$0*
1	*$2.500*
2	*$5.000*
3	*$7.500*
n	$2.000 \cdot n$

El costo total de los pasajes en un bus es un buen ejemplo de una función. A cada persona se le asocia un costo y el costo total de estos se van incrementando a medida que crece el número de personas.

YouTube

Evaluar la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & Si\ x < -2 \\ 1 & Si -2 \le x < 2 \\ x-1 & Si\ x \ge 2 \end{cases}$$

En los puntos
$x = -3\,; x = 0.5\,; x = 2.5$

Solución

detenido y del lugar de destino o el lugar de origen. Algunas de esas relaciones, que cumplen propiedades especiales reciben el nombre de funciones.

> ***Definición 2.1. Definición de función****: una función es una relación o correspondencia donde cada elemento x de un conjunto de partida x, le corresponde un único elemento y de un conjunto de llegada Y.*
>
> *El conjunto X se llama dominio de f, y el número **y** se denomina imagen de x por f y se denota por f(x). El recorrido o rango de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los elementos de X*

Las funciones pueden especificarse de muchas formas, sin embargo, para cumplir con los objetivos del presente texto, se usa la forma que involucra la relación de variables en forma de ecuación.

Ejemplo 2.1. Dada la función mediante la ecuación $f(x) = x^2 - 2x + 1$, calcular la imagen cuando:

a. $x = 0{,}5$ b. $x = -1$ c. $x = 1$ d. $x = x - h$

Solución*: Para calcular la imagen o el valor de la función para los valores indicados de la variable x (variable independiente), se remplazan estos valores en la ecuación que define la función.*

a. $f(0{,}5) = (0{,}5)^2 - 2(0{,}5) + 1 = 0{,}25 - 1{,}0 + 1 = 0{,}25$

b. $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$

c. $f(1) = (1)^2 - 2(1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 0$

Para el último caso, se debe reemplazar la variable x *por* $x - h$ *lo que resulta en:*

$$f(x-h) = (x-h)^2 - 2(x-h) - 1$$

Lo que lleva a plantear

$$f(x-h) = x^2 - 2xh + h^2 - 2x + 2h - 1$$

Que es la respuesta buscada

Ejemplo 2.2. *Para la función* $f(x) = x^2 + 3x - 2$ *determine* $f(2)$ *y* $f(x+h)$

Solución*: Para el primer caso basta con reemplazar x con 2, así:*

$$f(2) = (2)^2 + 3(2) - 2 = 4 + 6 - 2 = 8$$

Para la segunda parte, igualmente se reemplaza a x por $x+h$, lo que lleva a decir:

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 3(x+h) - 2 = x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h - 2$$

Organizando se tiene:

$$f(x+h) = x^2 + (2h+3)x + (h^2 + 3h - 2)$$

Determinar el dominio y el rango de una función implica definir claramente los elementos de los conjuntos de partida y llegada, es decir, encontrar el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente y el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente. El siguiente ejemplo ilustra de forma aproximada para encontrar estos conjuntos.

***Ejemplo 2.3**: Determine el dominio y el rango de la función matemática apoyándose de la figura 2.2.*

$$f(x) = x^2 + 1$$

***Solución:** nótese de la anterior relación que la variable x puede tomar cualquier valor, sin embargo, f(x) solamente puede adquirir valores positivos mayores a 1 debido a que el cuadrado transforma cualquier cantidad positiva en negativa. Por tanto*

$$Df = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

$$Rf = x \geq 1 = [1, +\infty)$$

La gráfica de esta función está representada en la figura 2.2.; efectivamente, analizando la gráfica se observa que no hay ninguna restricción para la variable x, por otro lado, la gráfica solo existe para valores iguales o mayores a 1 en la variable y.

Por tanto, es posible evidenciarla existencia de una asociación de términos de un conjunto con otro y, además, cabe la definición alternativa de función como:

> ***Definición 2.2. Definición de función**: una función es un conjunto de pares ordenados (x, y) en el que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer elemento. El conjunto de todos los números definidos para x se denomina dominio y el valor correspondiente para cada número de estos es la imagen cuyo conjunto conforma el rango.*

En términos simples, existen eventos que no están permitidos en la matemática básica de los números reales, algunos de los más frecuentes son:

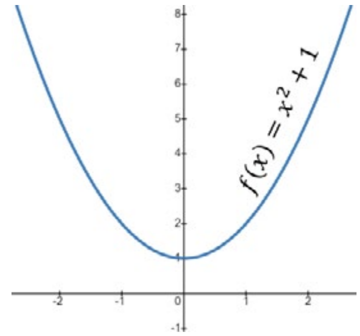


***Figura 2.2.** Representación gráfica de la función del ejemplo 2.3.*

IMPACTO

***Figura 2.3**. Representación artística del impacto de un cometa contra la Tierra.*

Imagen tomada de : https://es.slideshare.net/guest929db2/eras-geologicas-1323585

La posibilidad de impactos de meteoritos y cometas en la Tierra ha fascinado durante mucho tiempo a los científicos y al público en general por igual. Si bien la idea de un evento catastrófico causado por la colisión de un cuerpo celeste con nuestro planeta puede parecer cosa de ciencia ficción, la evidencia histórica y la investigación científica sugieren que tales impactos no solo son posibles, sino que han ocurrido en el pasado.

La evidencia histórica muestra que los impactos de meteoritos y cometas en la Tierra han ocurrido en el pasado; uno de los ejemplos más famosos es el evento de impacto de Chicxulub, que ocurrió hace aproximadamente 66 millones de años. Se cree que este impacto condujo a la extinción de los dinosaurios y provocó cambios significativos en el clima de la Tierra.

a. División por cero.
b. Raíz par de cantidades negativa.
c. Argumentos negativos de funciones logarítmicas.
d. Algunas singularidades para funciones trigonométricas.

Cuando se analiza el dominio o el rango de cualquier función es importante reconocer en ellas la posibilidad de ocurrencia de estos eventos y en tal caso se deben eliminar del conjunto solución, las cantidades o conjunto de cantidades que ocasionan esa dificultad.

Ejemplo 2.4. *Determine el dominio y el rango de la función:*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

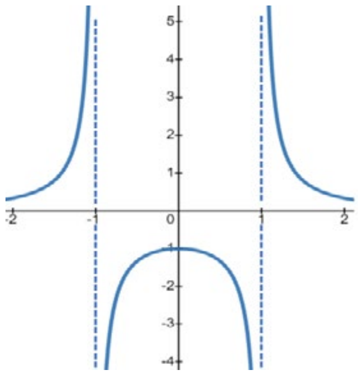


Figura 2.4*. Representación gráfica para el ejemplo 2.4.*

Nótese que el dominio de esta función son todos los números reales excepto 1 y –1. Por otro lado, el rango de la función son todos los números reales excepto aquellos comprendidos entre 0 y –1.

Solución*: en este caso puede ocurrir el problema que dependiendo del valor que tome la variable pueda aparecer una división por cero, lo que implica que para el dominio se deben tomar todos los valores menos aquellos que resulten en un cero en el cociente. Para identificarlos se tiene entonces:*

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow (x+1)(x-1) = 0$$

Igualando cada factor a cero se tiene entonces que x no debe tomar ni 1 ni tampoco -1, así el dominio queda:

$$Df = R - \{1, -1\}$$

Para el rango se debe despejar a $y = f(x)$ en términos de x, lo que conlleva a decir:

$$y = \frac{1}{x^2 - 1} \rightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{y} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{y} + 1}$$

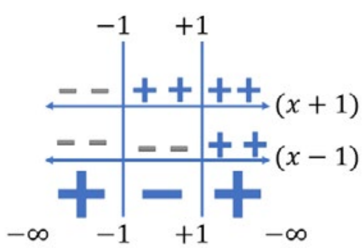


Figura 2.5. *Solución para el problema 2.4.*

Como aparece una raíz par, se debe asegurar que este sea mayor a cero, en consecuencia:

$$\frac{1}{y} + 1 \geq 0 \rightarrow \frac{1+y}{y} \geq 0$$

y aplicando el método del cementerio se tiene entonces que el rango es:

$$Rf = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

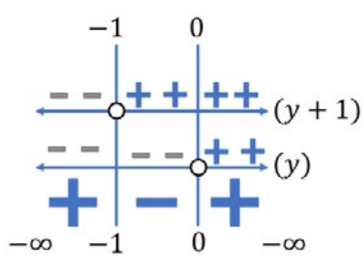


Figura 2.6*. Solución para el ejemplo 2.4.*

La representación gráfica de esta función se muestra en 2.4.

Ejercicio 2.5. *Encuentre el dominio y el rango de la función*

$$f(x) = +\sqrt{x^2 - 1}$$

Solución: Para este caso, no existe valor que pueda tomar la variable independiente de tal forma que resulte una división por cero, sin embargo, hay una raíz par y necesariamente la cantidad bajo el radical debe ser mayor a cero, así:

$$x^2 + 1 \geq 0$$

Factorizando se obtiene

$$(x + 1)(x - 1) \geq 0$$

Aplicando de nuevo el método de las lápidas y las cruces (figura 2.6) se obtienen los intervalos donde la función es positiva, así el dominio es

$$Df = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Para el rango se despeja la variable x, en términos de y.

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \quad \rightarrow \quad y^2 = x^2 - 1$$

Finalmente

$$x = \sqrt{y^2 + 1}$$

Nótese que, aunque se tiene una raíz, la cantidad bajo el radical nunca puede ser negativa, sin embargo, analizando de nuevo la presente en la función y recordando que solamente se toman los valores positivos, entonces el rango es

$$\mathcal{R}f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$$

La figura 2.7., ilustra esta situación

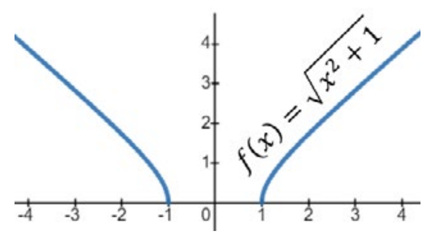


***Figura 2.7**. Representación gráfica del problema 2.5.*

Funciones pares, impares y compuestas.

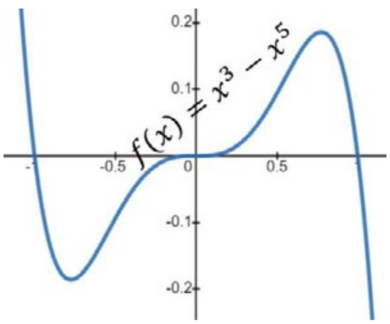
Las matemáticas como cualquier otra disciplina se han venido desarrollando en diferentes líneas del conocimiento orientadas por intereses científicos, tecnológicos, culturales y hasta políticos y económicos. De la misma manera las funciones se han venido creando, transformando y definiendo para dar cuenta de más y mejores soluciones a situaciones complejas. En ese sentido, aunque las funciones son únicas y representan una misma idea, es posible definir en el cálculo elemental, tres categorías a saber:

1. Funciones algebraicas.
2. Funciones trascendentales.
3. Funciones trigonométricas

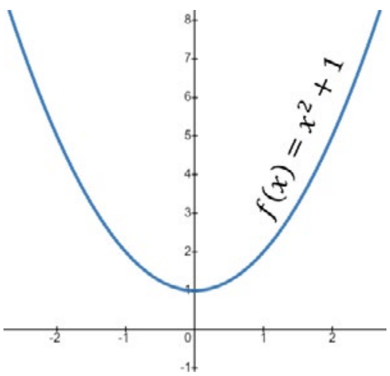
Aunque es importante aclarar que no son las únicas. El comportamiento de las funciones y la forma que estas adquieren permite clasificarlas de diversas maneras siendo una de las más recurrentes, la paridad.

Las funciones pares son aquellas que tienen como simetría el eje de las ordenadas, mientras que las funciones impares tienen simetría respecto al origen cartesiano; para definir en términos analíticos la paridad de una función basta con realizar una pequeña prueba en los signos de esta.

> ***Definición 2.3. Paridad para funciones****. Sea la función $y = f(x)$, real continua en su dominio, entonces se puede establecer que*:
>
> La función $y = f(x)$ es par si $f(x) = f(-x)$
> La función $y = f(x)$ es impar si $f(x) = -f(-x)$



(a). Función Impar



(b). Función Par

Figura 2.8. *Gráficas de funciones. (a) Función Impar. (b). Función Par.*

Las funciones pares tienen como eje de simetría a las abscisas, mientras que las funciones impares tienen como punto de simetría, el origen cartesiano.

La anterior prueba establece que si al momento de reemplazar la variable x por la variable –x, se sigue obteniendo la misma función, entonces esta es par. Si por el contrario se obtiene la misma función, pero cambiada de signo entonces esta es impar.

Ejemplo 2.6. *Determine la paridad de cada de las siguientes funciones:*

a. $f(x) = x^3 - x^5$ *y* *b.* $f(x) = x^2 + 1$

Solución*. reemplazando a x por $-x$ se tiene:*

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^5 \rightarrow f(-x) = -x^3 + x^5$$

Pero factorizando un –1 se tiene

$f(-x) = -(x^3 - x^5)$ *lo cual permite establecer que*

$f(-x) = -f(x)$ *y en consecuencia la función es impar.*

b. Realizando el mismo procedimiento para la segunda función se tiene:

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 \rightarrow f(-x) = x^2 + 1 = f(x)$$

Por tanto, la función es par. La figura 2.8., muestra estas dos gráficas.

Otra utilidad de las funciones es que con ella se pueden hacer composiciones, es decir, se puede hacer una función de otra función, lo que resulta una herramienta muy útil al momento de describir situaciones más complejas.

> **Definición 2.4. Función compuesta**. Sean f y g dos funciones, la función dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ llamada función f compuesta g tiene como dominio el conjunto de todos los x en g, tal que $g(x)$ es el dominio de f.

***Ejemplo 2.7**. Dada $f(x) = 2x + 1$ y la función $g(x) = x^2 - 3x + 1$ Encuentre la función compuesta $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$*

***Solución**: atendiendo a la definición de función compuesta se tiene:*

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2(x^2 - 3x + 1) + 1 = 2x^2 - 6x + 3$$

Para el segundo caso, se tiene:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2 - 3(2x + 1) + 1$$

Simplificando.

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 4x^2 + 4x + 1 - 6x - 3 + 1$$

Para obtener finalmente.

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 4x^2 - 2x - 1$$

.

Note una particularidad interesante y es que $fog \neq gof$ es decir no hay equivalencia para una propiedad conmutativa.

Ejercicios sección 2.1. Introducción al concepto de funciones.

Responda a las siguientes preguntas y cuestiones.

Así como se planteó en Murcia y Henao(2021), se pide:

1. ¿Qué similitudes y diferencias encuentra entre las funciones y las relaciones?
2. Establezca cuatro situaciones reales donde se vean claramente aplicadas relaciones y funciones de cualquier naturaleza.
3. Defina cuatro situaciones en el ámbito laboral, familiar o académico donde le gustaría aplicar modelación por funciones.
4. Qué otras singularidades matemáticas existen, aparte de las ya propuestas, que no estén definidas en la matemática real.
5. Proponga una tesis sobre por qué en funciones que tienen que ver con el tiempo, no se aceptan valores negativos.
6. Construya diversos diagramas de Ven para ilustrar relaciones y funciones.
7. Discuta la afirmación "existen funciones de conjuntos no vacíos en el dominio, con conjuntos vacíos en el rango".
8. ¿Existen funciones que no sean pares ni impares? En caso afirmativo proponer algunas de ellas.
9. ¿El dominio de la función compuesta puede ser diferente al dominio de la función que la compone?
10. ¿El recorrido de la función compuesta puede ser diferente al recorrido de la función que la compone?

En los ejercicios siguientes evalúe la función en los puntos dados si es posible y simplifique el resultado.

Dado $f(x) = x + 1$ hallar:

11. $f(2)$
12. $f(x + 3)$
13. $f(x^2 + 1)$
14. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Dado $f(x) = x^2 - 2x + 1$ hallar:

15. $f(2)$
16. $f(x + 3)$
17. $f(x^2 + 1)$
18. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Dado $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$ hallar:

19. $f(2)$
20. $f(x + 3)$
21. $f(x^2 + 1)$
22. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Dado. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{Si } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{Si } x < 1 \end{cases}$ hallar:

23. $f(2)$
24. $f(-3)$
25. $f(1)$
26. $f(h + 1)$

Dado. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 1} & \text{Si } x \geq -1 \\ 1 - x^2 & \text{Si } x < -1 \end{cases}$

27. $f(-1)$
28. $f(-3)$
29. $f(1)$
30. $f(h+1)$

Por medio de una tabla de valores, obtener las representaciones gráficas de las siguientes expresiones matemáticas.

31. $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$
32. $f(x) = -3x + 4$
33. $f(x) = x^2 + 1$
34. $f(x) = -x^2 + x + 3$
35. $f(x) = x^3 - 1$
36. $f(x) = x^2 + x^3 - 1$
37. $f(x) = -x^5 + 6x^2$
38. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3$
39. $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$
40. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$
41. $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^3+1}$
42. $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$
43. $f(x) = x^3 - 3x + 1$
44. $f(x) = \frac{2-x}{x^3-1}$
45. $f(x) = \frac{8-x}{4-x^2} + x$
46. $f(x) = ln(x+1)$
47. $f(x) = ln(x^2+1)$
48. $f(x) = ln\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$
49. $f(x) = e^{x+1}$
50. $f(x) = e^{x^2+1}$
51. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
52. $f(x) = e^x + ln\,x$
53. $f(x) = |x+3|$
54. $f(x) = x + |x+3|$
55. $f(x) = \frac{|x+3|}{x+3}$
56. $f(x) = \frac{|x+3|}{x+2}$
57. $f(x) = [\![x+1]\!]$
58. $f(x) = x[\![x]\!]$
59. $f(x) = |x| + x^2$

De las siguientes relaciones, determine cuál es función y cual no, justifique su respuesta

60. $y = 3$
61. $y^2 = 12x$
62. $f(x) = (16 - x^2)^{1/2}$
63. $g(x) = 2x^2$
64. $h(x) = \frac{x-1}{2x+5}$
65. $y = \frac{x+1}{x^2-1}$
66. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$
67. $\frac{y^3}{3} = x + 1$
68. $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$
69. $x = y$
70. $x = 2$

Dadas las siguientes funciones, encuentre el dominio y el rango (cuando sea posible). Posteriormente, encuentre la gráfica usando algún graficador y corrobore los resultados encontrados

71. $f(x) = 2x - 1$
72. $f(x) = 4 - x$

73. $f(x) = 6 - 2x$

74. $f(x) = x^2 - 1$

75. $f(x) = x^2 + 1$

76. $f(x) = 5 - 4x + x^2$

77. $f(x) = \frac{1}{x}$

78. $f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$

79. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-16}$

80. $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$

81. $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

82. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

83. $f(x) = \frac{6-x}{x+3} - \frac{1}{x}$

84. $f(x) = \sqrt{x+1}$

85. $f(x) = \sqrt{3+x}$

86. $f(x) = \sqrt{8-2x}$

87. $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$

88. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

89. $f(x) = \sqrt{3+\frac{2}{x}}$

90. $f(x) = \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1}$

91. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x-10}{x^3-4x}}$

92. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-16}}$

93. $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{5x-10}}$

94. $f(x) = ln(x^2-9)$

95. $f(x) = e^{x+1}$

96. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

97. $f(x) = |x+3|$ji

98. $f(x) = \frac{|x+3|}{x+3}$

99. $f(x) = (3x+2)^{1/2}$

100. $f(x) = (x^2-14)^{1/2}$

101. $g(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{9x^2-1}}$

102. $y = \frac{x+1}{x^2+x-2}$

103. $y = x^2 + 4x - 5$

104. $y = \frac{x+2}{x^2+5x-6}$

105. $g(x) = \frac{4}{4x+1}$

106. $h(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

107. $f(x) = \sqrt{\frac{4x^2-16}{2x+4}}$

108. $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2-9}}$

109. $h(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+5x-14}}$

110. $h(x) = x - \frac{1}{x-1}$

111. $f(x) = -(25-x^2)^{1/2}$

112. $h(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+2}$

113. $g(x) = \left|\frac{x^2-5x+6}{x-2}\right|$

114. $y(x^2-1) = 2$

115. $g(x) = \left|\frac{x}{x+2}\right|$

116. $f(x) = \frac{x}{|x-3|}$

117. $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$

118. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

En las siguientes funciones definidas a trozos, obtenga la gráfica, determine el dominio y el rango de estas.

119. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{Si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{Si } x \geq 1 \end{cases}$

120. $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{Si } x > 0 \\ 4-2x & \text{Si } x \leq 0 \end{cases}$

121. $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{Si } x < 1 \\ 2x+3 & \text{Si } x \geq 1 \end{cases}$

122. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \leq 1 \\ x & \text{Si } 1 < x \leq 3 \\ 6-x & \text{Si } 3 < x \leq 6 \\ 0 & \text{Si } x \geq 6 \end{cases}$

123. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{Si } x \leq -2 \\ x^2-4 & \text{Si } -2 < x \leq 3 \\ 8-x & \text{Si } x \geq 3 \end{cases}$

124. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x < 1 \\ 2 & \text{Si } x > 3 \end{cases}$

125. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{Si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$

126. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{Si } x < 0 \\ \sqrt{2x-x^2} & \text{Si } 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{Si } x > 2 \end{cases}$

127. $f(x) = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{Si } x > -1 \\ \dfrac{(x+1)(x+5)}{x^2+6x+5} & \text{Si } x \leq -1 \end{cases}$

128. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si } x \leq -1 \\ x & \text{Si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$

129. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{Si } x \leq -4 \\ 16-x^2 & \text{Si } -4 < x < 4 \\ 2-x & \text{Si } x \geq 4 \end{cases}$

En las siguientes funciones, determine si es función par, impar o ninguna de las dos, especificando las simetrías, si las tiene y corrobore sus resultados por medio de una gráfica.

130. $f(x) = x$

131. $f(x) = x^2$

132. $f(x) = x^3$

133. $f(x) = x + 1$

134. $f(x) = x^2 + 1$

135. $f(x) = x^2 - x$

136. $f(x) = x^3 - x^2$

137. $f(x) = x^3 - x$

En los ejercicios siguientes encuentre las funciones compuestas $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$ y determine el dominio y el rango, igualmente construya la gráfica

138. $f(x) = x + 1$ $\quad g(x) = x^2 - 3$

139. $f(x) = x^3$ $\quad g(x) = x^2 - 3$

140. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $\quad g(x) = x^2$

141. $f(x) = 3 + \frac{1}{2x^2+x}$ $\quad g(x) = x - 3$

142. $f(x) = x^2 + 3$ $\quad g(x) = x^3 + 3$

143. $f(x) = 1 - x^3$ $\quad g(x) = 1 - x^2$

Problemas de aplicación

A continuación, se presentan una serie de situaciones problema en diferentes áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), las cuales requieren de su interpretación, modelado y resolución para llegar a una solución adecuada. Su trabajo consiste en ilustrar y explicar de manera clara los modelos propuestos, identificando las variables involucradas y puntualizando la estrategia utilizada para resolver cada problema, así como verificar la calidad de las soluciones encontradas.

144. **Depreciación**: en la actualidad, lo equipos celulares han venido siendo cada vez cada vez más poderosas y compactos, de la misma manera el precio cae con el tiempo. Presuma que en x meses, el costo de cierto prototipo en dólares, será de:

$$C(x) = 50 + \frac{20}{x+2}$$

a. ¿Cuál podría ser en 12 meses el costo?
b. ¿Para el sexto mes, el costo será de cuánto?
c. ¿En qué momento se alcanzaría el costo de USD 50?
d. ¿En un mediano plazo, qué pasará con el costo?

145. **Contaminación ambiental**: en la época actual y con el cambio atmosférico, se ha podido comprobar que la media por dia de óxido de carbono en el medio ambiente, sigue la siguiente función:

$$Q(n) = \sqrt{0.5n + 20}$$

Expresado en unidades, en el momento que la población expresada en n miles. Se puede decir que dentro de t años la población podría ser:

$$n(t) = 10 + 0.2t^2$$

a. Exprese como función del tiempo el nivel de óxido de carbono en el aire.
b. ¿ En un periodo de 4 años cuál sería el nivel de óxido de carbono?
c. ¿ El nivel de óxido de carbono cuándo llegará a 7 unidades?

146. **Función de la demanda**: la demanda de consumo de cierto artículo, viene dada por :

$$D(p) = -50p + 800$$

Se expresa en Nº de artículos por mes cuando el precio de mercado toma el valor de p dólares por unidad.

a. Construya una gráfica de la función de demanda.
b. Escriba el gasto total mensual de los compradores del artículo en términos de una función de p y realice su respectiva gráfica.
c. Utilice la gráfica del literal b) para estimar el precio de mercado al cual el gasto total en el artículo es mayor.

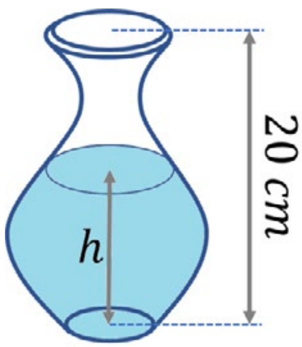
147. **Oficina de viajes**: una agencia de viajes, ha estimado que el costo de una viaje para un grupo de x personas, según la siguiente función:

$$C(x) = 1800 + 30x$$

Expresado en miles de pesos. Un grupo de viaje, puede llegar a estar conformado máximo, por 60 personas. El precio del ticket por persona es $100.000, más $2.000 por cada ticket que no se vendió. Determinar:

a. La función de incorporación, $I(x)$, de la compañía.
b. La función de ganancia, $G(x)$, de la compañía.
c. Cuál es la ganancia de la empresa con un viaje de 50 personas.

148. **Un líquido**: Una persona vierte cierto liquido dentro de un recipiente de 20 centímetros de altura a <u>velocidad constante</u>, llenándola de forma completa durante 8 segundos.

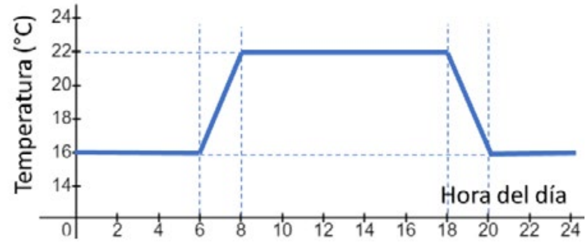


Según la figura anterior, teniendo en cuenta la forma del recipiente y definiendo h e como el parámetro de profundidad del líquido medido en centímetros, además , sea t el tiempo que ha transcurrido , medido en segundos .

a. Argumentar porque d, se considera una función de t.
b. Definir de manera correcta el dominio y rango de esta función.
c. Representar gráficamente la función planteada

149. **Desplazamiento**: un estudiante que viaja 12 kilómetros a velocidad constante cada día para asistir a la universidad se da cuenta tras llevar unos minutos conduciendo de que ha olvidado un trabajo que debía entregar. Conduciendo más rápido de lo habitual pero siempre a velocidad constante, regresa a casa, recoge el trabajo y parte de nuevo hacia la universidad. Asumiendo que los cambios se hacen de forma instantánea, dibujar una posible gráfica que representa el desplazamiento del estudiante durante este trayecto, en función del tiempo.

150. **Control de temperatura**: un termostato es un dispositivo electromecánico que controla la temperatura de una habitación de forma automática. La figura siguiente ilustra la forma como un termostato controla la temperatura de una casa



Donde T es la temperatura en Celsius y t, el tiempo en horas.

a) Determinar aproximadamente $T(7)$ y $T(7)$.
b) Si el dispositivo se programa nuevamente para producir una temperatura $H(t) = T(t-1)$, ¿la gráfica sufriría cambios? Justificar la aseveración dada.
c) Si se vuelve a programar el dispositivo para producir una temperatura $H(t) = T(t) - 1$, ¿la gráfica sufriría cambios? Justificar la aseveración dada.

151. **Las ondas en el agua:** en un lago con agua en reposo, se lanza a su centro un objeto produciendo ondas en forma de círculos concéntricos que van creciendo a medida que se acercan a la orilla. El radio (en centímetros) que produce la onda, viene dado por $r(t) = 4t$, allí el valor de t corresponde al tiempo en segundos pasado a partir de que el objeto golpea la superficie del lago(agua), por otro lado, el área del círculo viene dada por la función

$$A = \pi r^2$$

a. Encontrar e interpretar la función $A(r(t))$
b. Obtener una representación gráfica de la función compuesta.

152. **Automóviles y su forma dinámica.** La potencia P, en caballos de vapor, que necesita un tipo específico de vehículo para vencer la resistencia del aire es:

$$P(x) = 0{,}002v^2 + 0{,}005v - 0{,}029$$
$$\text{con } 10 \leq v \leq 100$$

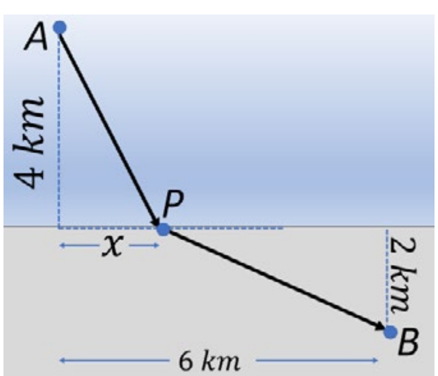
Donde v es la velocidad del coche en kilómetros por hora.

a. Representar P usando algún graficador WEB.
b. Reescribir la anterior expresión de forma tal que pueda recibir velocidades expresadas en millas por hora. NOTA. Una milla equivale a 1609 metros.

153. **Área de sitio de entrenamiento**: Se sabe que cuadrilátero –figura de cuatro lados– tiene un perímetro de 100 metros lineales.

a. Bocetar una imagen que representa un rectángulo en la cual x sea la longitud de su base y h su ancho.
b. Escribir el área Ar para el rectángulo estudiado en función de x y de h.
c. Representar en forma gráfica la función área. ¿Cuál es el dominio que presenta esta función?
d. Teniendo como referencia la gráfica anterior halle las dimensiones que originan la mayor área posible

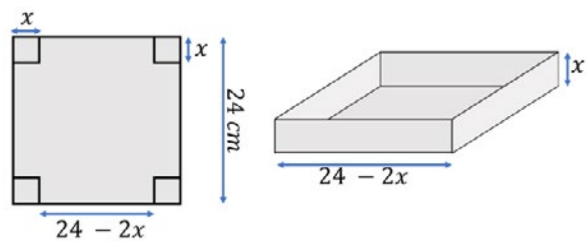
154. **Tiempo**. Una persona que se encuentra en un bote en el punto A a 4 kilómetros del punto más próximo de la costa, se dispone a ir a otro punto B, situado a 6 kilómetros de recorrido por la costa y 2 kilómetro tierra adentro, tal como muestra la figura



Si sabe que la persona tiene la capacidad de remar con una velocidad de 2 kilómetros por hora y que tiene la capacidad de caminar a razón de 4 kilómetros por hora sobre tierra firme.

a. Encuentre analíticamente una expresión algebraica que relacione el tiempo total que le toma a la persona ir del punto A al punto B en función del parámetro x.
b. Por medio de una herramienta graficadora, encuentre el valor de x, que minimiza el tiempo de recorrido

155. **Volumen:** Se necesita elaborar una caja sin tapa de volumen máximo con una pieza de cartón corrugado cuadrado de 24 centímetros de lado, recortando pequeños cuadrados iguales de las esquinas para posteriormente doblar los lados hacia arriba, formando así la caja.



Una persona empieza a construir una tabla con diferentes valores de alto de la caja y así estimar la longitud y volumen de la misma.

Altura x	Longitud de la anchura	Volumen
0,5	$24-2(0{,}5) = 23\ cm$	$0{,}5\cdot[24-2(0{,}5)]^2 = 264{,}5\ cm^3$
1,0	$24-2(1) = 22\ cm$	$1[24-2(1)]^2 = 484\ cm^3$
1,5	$24-2(1.5) = 21\ cm$	$1{,}5\cdot[24-2(1{,}5)]^2 = 661{,}5\ cm^3$

a. Completar la tabla usando una hoja de cálculo como Excel u otro programa similar.
b. De forma gráfica obtenga el dominio y recorrido de la función
c. Utilizar el resultado para estimar el volumen máximo y las dimensiones que lo hacen posible.

SECCIÓN 2.2 FUNCIÓN LINEAL

Una de las potencialidades del cálculo diferencial es su capacidad para encontrar razones de cambio en cualquier tipo de función, en ese sentido es importante analizar algunas propiedades de las funciones lineales y sus representaciones gráficas, –las líneas rectas– que corresponden a las funciones y ecuaciones lineales. La función lineal de hecho pertenece a un grupo de funciones denominadas polinomiales –analizadas con mayor detalle en la próxima sección–, sin embargo, se prefiere hacer un estudio más detallado de esta función, en esta parte del texto con el fin de poder comprender de forma más detallada conceptos importantes del cálculo.

La pendiente de una recta no vertical cuantifica el número de unidades que la recta desciende o asciende por cada unidad de desplazamiento horizontal a la derecha o a la izquierda. Supóngase la figura 2.9.

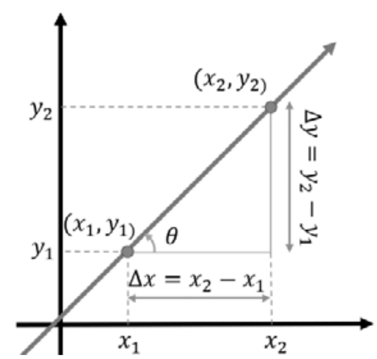


Figura 2.9. *Pendiente de una línea recta*

Al tomar dos puntos sobre la línea recta, es posible cuantificar cuando se avanza en las ordenadas Δy y cuando se avanza en las abscisas Δx, obteniéndose de la relación de estas dos cantidades, un valor constante en toda la línea, que realmente no depende de los puntos que se escoja siempre y cuando pertenezcan a la línea.

Incremento de y → $\Delta y = y_2 - y_1$
Incremento de x → $\Delta x = x_2 - x_1$

Por lo tanto, se puede definir la pendiente de una línea recta como

> ***Definición 2.5. Pendiente***. *Sean dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) con $x_1 \neq x_2$ por donde pasa una única línea, cuya pendiente, entendida como la razón de cambio de las abscisas con el cambio de las ordenadas es:*
>
> $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{[Ec. 2.1]}$$

Adicionalmente, la pendiente de una recta, o un plano, está relacionado con su ángulo de inclinación, recordando la definición de tangente, la pendiente también puede definirse como

$$m = tan\,\theta$$

Dada la naturaleza de m, es decir de su signo, la línea recta puede ser de tres tipos tal como se muestra en la figura 2.10.

$m = 0$ Línea horizontal
$m > 0$ Línea creciente
$m < 0$ Línea decreciente

Cuando se dice que una línea es creciente se está estableciendo que cuando la variable independiente aumenta, la variable dependiente también aumenta en magnitud, en su contraparte, cuando la función es decreciente, se está afirmando que cuando la variable independiente crece, la variable dependiente decrece. La figura 2.10., ilustra estas situaciones. Para definir todo el conjunto de puntos que representa la línea recta, que corresponde a encontrar la ecuación lineal, existen diversas estrategias, de las cuales se discuten algunas de las más utilizadas.

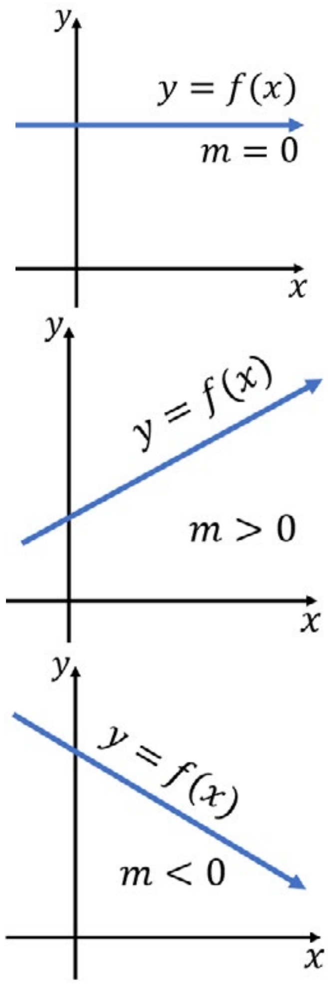


Figura 2.10. *Representaciones gráficas de funciones lineales con los tres tipos de pendientes posibles.*

> ***Teorema 2.1. Ecuación Punto Pendiente****: La ecuación de la línea recta con pendiente m y que pasa por el punto* (x_1, y_1) *viene dada por:*
>
> $$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{[Ec. 2.2]}$$

Esta relación establece que cuando se conoce la pendiente, y cualquier punto (x_1, y_1) por donde pasa la línea, es posible obtener la ecuación de esta, ahora, la pendiente se puede obtener de la relación anterior a esta conociendo dos puntos, lo que lleva a la expresión matemática:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{[Ec. 2.3.]}$$

A continuación, se ejemplifican estas situaciones.

Ejemplo 2.8. *Encuentre la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos* $(-1,-3)$ *y* $(2,4)$.

Solución*: utilizando simultáneamente las dos ecuaciones anteriores se tiene que:*

$$y - (-3) = \frac{4 - (-3)}{2 - (-1)}(x - (-1))$$

simplificando se tiene:

$$y + 3 = \frac{7}{3}(x + 1)$$

que corresponde a:

$$y = \frac{7x}{3} - \frac{2}{3}$$

La anterior relación es la ecuación de la línea recta buscada.

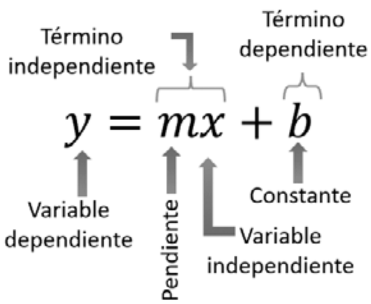


Figura 2.11. *Representación canónica de la función lineal.*

> ***Teorema 2.2. Ecuación intercepto pendiente.*** *La gráfica de una ecuación lineal de la forma:*
>
> $$y = mx + b \quad \text{[Ec 2.4]}$$
>
> *Es una línea recta de pendiente m y que corta al eje de las abscisas en el punto* $(0, b)$

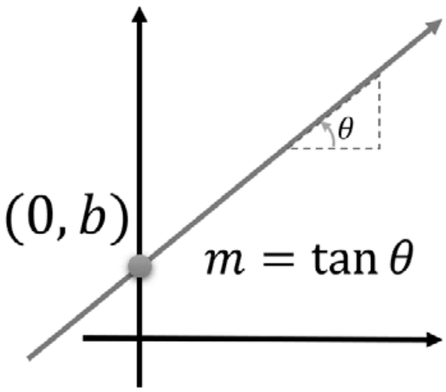


Figura 2.12. *Intercepto de una ecuación con las ordenadas.*

Todas las funciones lineales definidas en los reales cortan al eje Y sin excepción.

Algunas veces las ecuaciones lineales no están escritas en forma explícita sino implícita, lo que se conoce con el nombre de **forma general** y que tiene la estructura

$$Ax + By + C = 0$$

Nótese que los exponentes que acompañan a las variables son iguales a 1, lo que permite reconocerla como la ecuación de una función lineal.

Ejemplo 2.9*. Encuentre la pendiente de la ecuación lineal*

$$6x - 3y + 9 = 0$$

Solución*: Basta con despejar la variable y en términos de x, así*

$$6x + 9 = 3y$$

$$y = \frac{6x + 9}{3}$$

Finalmente

$$y = 2x + 3$$

La pendiente de esta línea recta es 2 y su intercepto con el eje Y es (0,3)

Razones de cambio

La pendiente de cualquier curva tiene muchas interpretaciones entre ellas sirve como razón o proporción y también como un ritmo o razón de cambio, que permite tomar acertadamente decisiones importantes. Cuando los ejes x e y tienen la misma unidad de medida, la pendiente no tiene unidad y la razón es una proporción; por otro lado, cuando los ejes tienen unidades diferentes, la pendiente es una tasa, ritmo o razón de cambio.

El Último Teorema de Fermat

Figura 2.12.1 Fermat.

Imagen tomada de : https://aprendiendomatematicas.com/el-utlimo-teorema-de-fermat/

Pierre de Fermat fue un matemático francés del siglo XVII, famoso por su conjetura sobre ecuaciones diofánticas que se conoció como el "Último teorema de Fermat". La conjetura fue escrita en el margen de un libro llamado "Arithmetica", escrito por el matemático griego Diofanto; aquí Fermat anotó la conjetura en latín, y la traducción al español sería algo como:

"Es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados, y en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias de este exponente. No puedo probarlo ahora, pero tengo una prueba verdaderamente maravillosa para este teorema, que es demasiado grande para caber en este margen". Oré (2015).

En otras palabras, si n es un número entero mayor que 2, entonces no existen números enteros a, b y c distintos de 0, tales que se cumpla la igualdad:

$$a^n + b^n = c^n$$

En el año 1996 el matemático Andrew Wiles, demuestra el Teorema de Taniyama-Shimura, anteriormente una conjetura, que enlaza las formas modulares y las curvas elípticas con los cuales es posible la demostración del último teorema de Fermat

Ejemplo 2.10. *La intensidad de la señal de comunicación en cierto conductor decrece proporcionalmente con la longitud de este; se sabe que en los primeros 3m la señal cae un 4,5%. ¿Cuál es el ritmo de cambio de la señal respecto a la longitud? Y ¿cuánto habrá caído la señal los primeros 50m?*

Solución*: lo primero es hallar la razón de cambio, haciendo uso de la pendiente*

$$\text{Razón de Cambio} = \frac{\%caída}{longitud}$$

$$R.C = \frac{4{,}5\%}{3m}$$

$$R.C = 1{,}5\frac{\%}{m}$$

Lo que significa que, por cada metro, la señal cae 1,5%. De esta manera es posible predecir el porcentaje de caída en 50 m, que corresponde a:

$$\text{Caída de señal} = 1{,}5\frac{\%}{m} \times 50m = 75\%$$

La señal, en 50 metros habrá caído 75%.

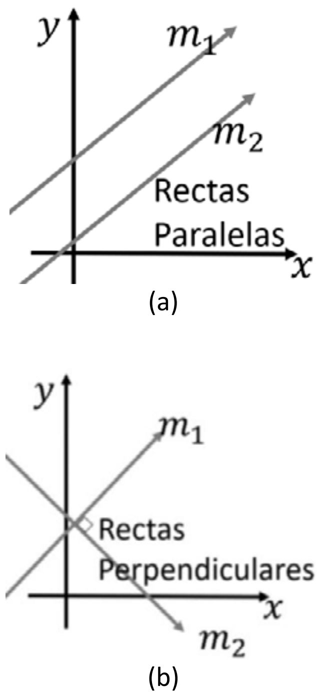


Figura 2.13. *Rectas paralelas y rectas perpendiculares*.

Una de las particularidades de las líneas rectas paralelas es que, al ser distintas, ellas nunca se interceptan. Por otro lado, en las rectas perpendiculares, el ángulo al cual se interceptan es de 90º.

Rectas paralelas y perpendiculares

En algunas ocasiones las líneas pueden ser paralelas o perpendiculares; en el caso de las rectas paralelas, sus pendientes son iguales, y no tienen punto de intersección; para las líneas perpendiculares, la intersección se realiza a un ángulo de 90º; las representaciones gráficas de estas situaciones se muestran en la figura 2.13.

Teorema 2.3. Líneas Paralelas y Perpendiculares. *Dos rectas son paralelas o perpendiculares si cumplen con las siguientes condiciones:*

1. *Dos líneas rectas no verticales son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.*

$$m_1 = m_2 \qquad \text{[Ec. 2.5]}$$

2. *Dos líneas rectas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a –1.*

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \qquad \text{[Ec. 2.6]}$$

Es importante recordar que, para encontrar el punto de corte de dos líneas rectas no paralelas, existen diversos métodos algebraicos como reducción por sustitución, igualación, determinantes e inclusive, para sistemas de 2x2 puede emplearse el método gráfico.

Las funciones lineales son ampliamente utilizadas en disciplinas como la ingeniería, la administración, la economía y los negocios, representan diversas situaciones donde las relaciones entre variables son directamente proporcionales y es en ese sentido que deben ser estudiadas con detenimiento.

Ejemplo 2.11. *Dada la ecuación de la línea recta* $6x - 3y + 9 = 0$, *encontrar la ecuación de una línea recta que pase por el punto* $(2{,}3)$ *y que sea:*

a. Paralela. *B. Perpendicular.*

Solución*: en el problema anterior, se obtuvo la ecuación canónica llegando a la expresión:*

$$y = 2x + 3$$

Llegando a la conclusión que la pendiente es 2; en la primera situación, se tiene una línea recta paralela a esta y en consecuencia la pendiente debe ser también 2 y utilizando la ecuación punto pendiente anteriormente definida se logra:

$$y - 3 = 2(x - 2)$$

Simplificando se obtiene:

$$y = 2x - 1$$

Y expresándola en forma general se obtiene:

$$2x - y - 1 = 0$$

En la recta perpendicular, el producto de las dos pendientes debe ser –1 entonces:

$$m_1 m_2 = -1 \rightarrow \; m_1 2 = -1 \; \rightarrow \; m = -\tfrac{1}{2}$$

La pendiente de la recta perpendicular a la primera línea es –½, así, aplicando la ecuación punto pendiente se obtiene:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

Simplificando se obtiene:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Expresándola en forma general se logra:

$$2y + x - 8 = 0$$

La representación gráfica de estas tres funciones se muestra a continuación.

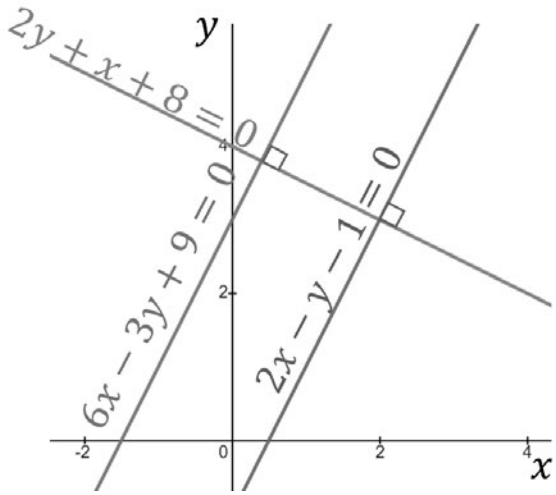


Figura 2.14. *Rectas paralelas y perpendiculares del problema 2.11.*

Nótese entre otras cosas, que los coeficientes de las variables son múltiplos entre sí y, de hecho, si se dividen estos coeficientes entre ellos, –los coeficientes de la variable x entre sí, y los coeficientes de la variable y entre sí–, deben dar valores iguales.

Ejemplo 2.12. *La cerveza es un producto de alta demanda en todo el mundo, representando para Colombia casi el 70% del total del total del mercado de licores. En los últimos cuatro años el consumo promedio de cerveza medido en litros por persona se ha venido incrementando aproximadamente de forma lineal tal como muestra la figura siguiente.*

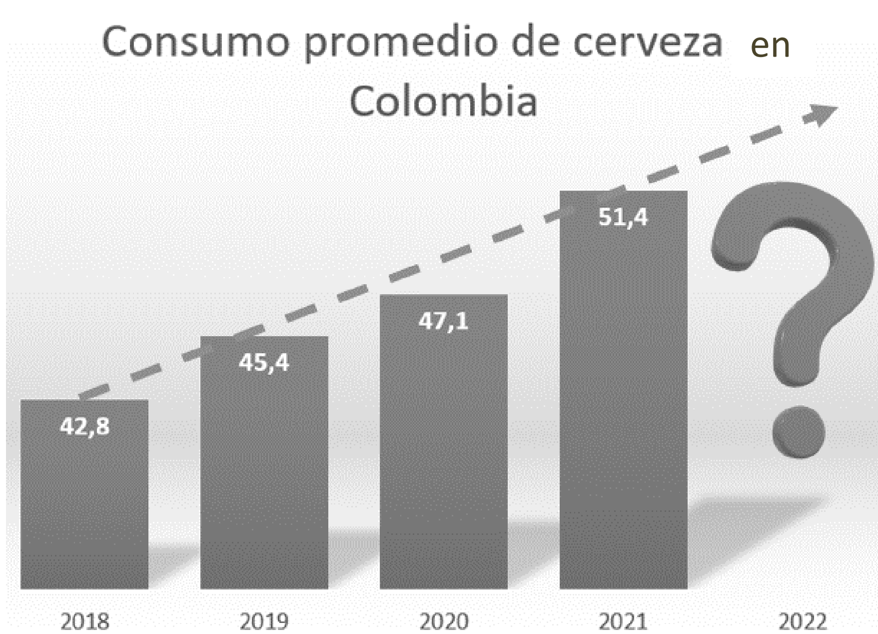


Figura 2.15. *Consumo promedio en litros de licor por persona.*

a. Determinar la función lineal del consumo, tomando como referencia los años 2018 y 2021 y estimar el consumo esperado para el año 2022.

***Solución**: dado que el problema establece que se puede tener una función lineal que represente los datos, usando la ecuación 2.3., y los puntos de referencia* $(año\,,consumo)=(x_1,y_1)=(2018\,,48.8)$ *y el punto* $(x_2,y_2)=(2021\,,51.48)$*, se llega a la expresión:*

$$y-48{,}8=\frac{51{,}48-48{,}8}{2021-2018}(x-2018)$$

Simplificando se obtiene:

$$y-48{,}8=\frac{2{,}6}{3}(x-2018)\rightarrow\ y-48{,}8=\frac{13}{15}(x-2018)$$

Que equivale a:

$$y-48{,}8=\frac{13}{15}x-\frac{26234}{15}\quad\rightarrow\quad y=\frac{13}{15}x-\frac{25502}{15}$$

Reemplazando en la anterior expresión el año 2022, se obtiene:

$$y=\frac{13}{15}(2022)-\frac{25502}{15}=\frac{784}{15}\approx 52{,}27$$

Por tanto, para el literal a, se espera que el consumo de cerveza en Colombia, este alrededor de 52,27 litros por persona.

Se deja al lector encontrar la función lineal que represente el promedio en litros de consumo de cerveza en Colombia, tomando como referencia los años 2018 y 2020. ¿por qué la estimación no es igual a la anterior?

YouTube

DEPRECIACIÓN

La depreciación es la forma contable y financiera mediante la cual se reconoce el desgaste y pérdida de valor que sufre un bien debido al uso, deterioro u obsolescencia que sufre este con el paso del tiempo.

En el año 2023 una empresa transportadora adquiere un vehículo nuevo por un valor de USD 24.000 y estima que este pierde su valor o deprecia totalmente a los 15 años. Si la depreciación ocurre de forma constante, obtener:

a. La ecuación que representa el valor de vehículo en función del tiempo.
b. El valor comercial del vehículo en el 2030.
c. El momento para el cual el vehículo ha perdido el 60% de s valor inicial.

SOLUCIÓN

Ejercicios Sección 2.2. Función lineal.

Responda a las siguientes preguntas y cuestiones.

Responda a las siguientes preguntas y cuestiones justificando su respuesta

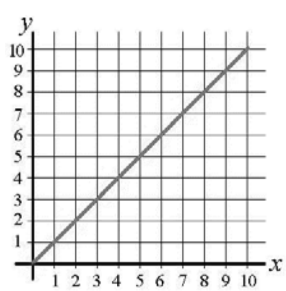
1. Explique desde un sustento teórico y geométrico, porque la pendiente en una línea recta es constante.
2. ¿Bajo qué circunstancias una línea recta no corta el eje X?
3. ¿Bajo qué circunstancias una línea recta no corta el eje Y?
4. Demuestre que la pendiente de una línea recta puede definirse en términos de la función tangente.
5. En términos matemáticos y geométricos, por qué no existe pendiente de una línea vertical.
6. Las ecuaciones de la línea recta que no muestran punto intercepto con el eje Y ¿es porque no tienen?
7. Enuncie y explique tres aplicaciones donde se evidencie las pendientes y las razones de cambio.
8. ¿Existen rectas paralelas que se corten?
9. ¿Existen rectas perpendiculares que no se corten?
10. ¿Qué condiciones deben tener dos curvas, para que se corten en más de un punto?

Ejercicios.

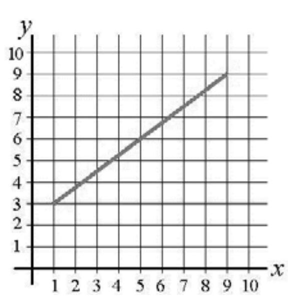
En esta sección usted va a encontrar una serie de problemas teóricos relacionados con el tema visto en la presente sección. Resuelva cada uno de la manera más precisa posible, indicando las propiedades, principios, teoremas y teorías aplicadas.

Para los problemas siguientes, estime el valor de la pendiente

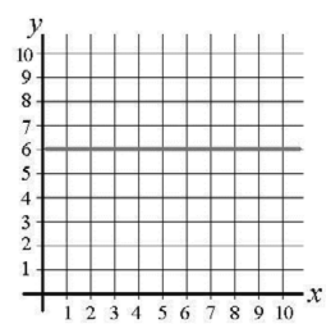
11.



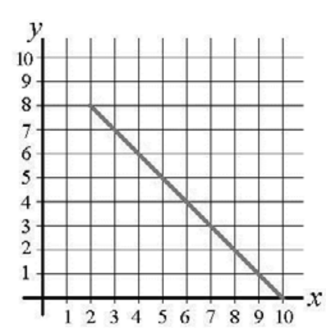
12.



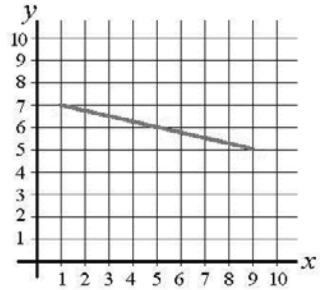
13.



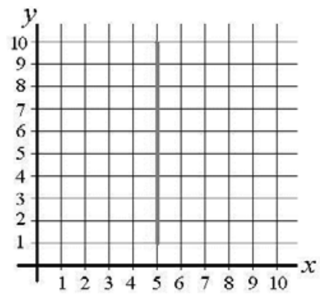
14.



15.



16.



Para cada pareja de puntos, encuentre la función lineal que los representa

17. $(0,1)\ y\ (3,5)$
18. $(2,1)\ y\ (-3,4)$
19. $(1,1)\ y\ (-2,2)$
20. $(3,4)\ y\ (1,2)$
21. $(-3,2)\ y\ (5,-3)$
22. $(0,-1)\ y\ (4,-4)$
23. $(10,3)\ y\ (6,6)$
24. $(-8,-3)\ y\ (7,2)$
25. $(-3,-1)\ y\ (2,-5)$
26. $(6,-4)\ y\ (-4,6)$
27. $(0,0)\ y\ (2,6)$
28. $(-5,0)\ y\ (-3,1)$

Grafique las siguientes funciones usando tabla de valores y saque sus propias conclusiones sobre la pendiente y los puntos de intercepción con los ejes coordenados.

29. $y = 2x + 2$
30. $y = -\frac{1}{2}x - 2$
31. $y = \frac{1}{2}x + 2$
32. $y = -3x - 2$
33. $y = 2x + 3$
34. $y = \frac{1}{3}x + 3$
35. $y = -\frac{5}{2}x + 2$
36. $y = 12x - 3$
37. $y = \frac{2}{3}x$

A continuación, se muestran parejas de funciones lineales, grafique cada par en un mismo plano, encuentre el punto de corte y corrobórelo de forma analítica

38. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -3x + 2 \end{cases}$

39. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$

40. $\begin{cases} y = \frac{x}{3} + 3 \\ y = x - 2 \end{cases}$

41. $\begin{cases} y = x \\ y = 5x - 12 \end{cases}$

42. $\begin{cases} y = 5 - x \\ y = 4 + x \end{cases}$

43. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = -x - 6 \end{cases}$

44. $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 4 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$

Dado un punto sobre el plano, determine las ecuaciones que pasan por el punto de tal forma que una sea paralela y la otra perpendicular a la ecuación dada.

45. $2x + 3y = 4$ (0,0)
46. $-x + 3y = 2$ (5,2)
47. $6x - 3y = 0$ (2,–2)
48. $3x - 5y = -1$ (0,–4)
49. $-x + y = -6$ (–2,–1)
50. $5x - 2y = -1$ (–5,1)

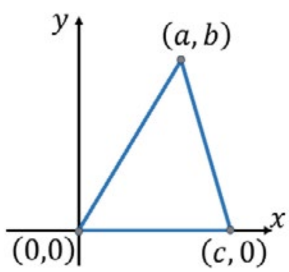
Problemas de Aplicación

A continuación, usted va a encontrar una serie de situaciones problema en diversas áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), las cuales debe interpretar, modelar y resolver para dar cuenta de la solución. Ilustre y explique claramente los modelos propuestos, identificando las variables utilizadas, explicando también la estrategia de solución y la calidad de la solución encontrada

51. **Diseño de una banda transportadora.** Un ingeniero industrial quiere diseñar una banda transportadora que ascienda 1 metro por cada 6 m de avance horizontal.

a. Determinar el valor numérico de la pendiente de la banda transportadora.
b. Supóngase que la banda transportadora se necesita instalar en medio de dos niveles de una manufacturera, determine la longitud de la banda si el desnivel es de 6 metros.

52. **Algo de geometría**. La figura muestra un triángulo escaleno en el cual uno de los vértices está en el origen cartesiano y uno de sus lados es paralelo y está sobre el eje horizontal.



a. Encuentre la ecuación de la línea recta que representa cada lado.
b. Encuentre el intercepto (punto) de las medianas.
c. Encuentre el intercepto (punto) de las alturas.

53. **Niveles de temperatura**. Las escalas de temperatura son sistemas de medición para cuantificar la intensidad del calor en un objeto y las tres escalas más conocidas son Celsius (°C), Fahrenheit (°F) y Kelvin (K); por su parte Celsius y Fahrenheit miden la temperatura relativa a los puntos de congelación del agua que es 0°C o 32°F y el punto de ebullición 100°C o 212°F, ambos a una atmosfera de presión

a. Encontrar una expresión a partir de la información dada, que relacione la escala Celsius (°C) y la escala Fahrenheit (°F)
b. Convertir 77° F en grados Celsius.
c. Convertir 50° C en grados Fahrenheit

54. **Niveles de temperatura**. La escala de temperatura Kelvin es una escala absoluta utilizada en ciencia y especialmente en la física y en la química; se basa en el concepto de cero absoluto, donde las moléculas de una sustancia no tienen movimiento térmico.

a. Encontrar una expresión analítica que relacione la temperatura en grados Celsius (°C) con la temperatura en grados Kelvin (K), sabiendo que el agua se congela a 0°C o 273K y se evapora a 100°C o 373K:
a. Convertir 300K en grados Celsius con la expresión anterior.
b. Convertir 50ºC en grados Kelvin a partir del resultado de la pregunta (a).

55. **Dilatación térmica**. Cierto tipo de metal en forma de alambre se somete uniformemente al calor y sufre una dilación lineal aumentando su longitud según la expresión matemática

$$L = L_0(1 + \alpha\Delta T)$$

Donde Lo es la longitud inicial, α es una constante de dilatación y ΔT es el gradiente o cambio de temperatura. Si la variable dependiente es la longitud (L) y la independiente es la temperatura (T), determine la relación analítica para la pendiente de esta función lineal.

56. **Prevención.** Los viáticos son una asignación de dinero que una empresa, organización o institución proporciona a sus empleados o representantes para cubrir gastos de alimentación, transporte y alojamiento –entre

otros– durante viajes de negocios o misiones de trabajo. Una empresa reembolsa a sus vendedores $150.000 diarios por alojamiento y alimentación, a esto le suma $5.000 por kilómetro recorrido. Obtener una función lineal que exprese el gasto diario G por cada vendedor en términos de los kilómetros recorridos.

57. **Oferta de ascenso.** Una empresa manufacturera le propone a uno de sus trabajadores un ascenso a través de dos ofertas; en la primera le pagan $25000 por dia más un incentivo de $2500 por articulo producido, en la segunda propuesta, le ofrecen $18000 por dia más un incentivo de $3200 por articulo producido.

a. Encontrar expresiones lineales que relacionen los salarios por dia en términos del número de artículos producidos, para cada oferta de la empresa.

b. Utilizar un graficador WEB para graficar cada una de estas expresiones y así encontrar el intercepto(punto) de estas.

d. Analizar el significado del punto de corte de las dos líneas y explicar el contexto en el cual es más favorable una de las ofertas con respecto a las otra.

58. **Devaluación lineal.** La depreciación es una disminución del valor de un activo, como maquinaria o equipo, debido al desgaste, obsolescencia o uso a lo largo del tiempo y por lo general se modela como una línea recta. Una empresa compra un equipo por USD 6.000 y transcurridos 10 años el equipo estará depreciado completamente.

a. Escribir una ecuación lineal que relacione el costo del equipo C, con el número de años x, donde $0 \leq x \leq 10$.

b. Dibujar una gáfica de la función encontrada en el punto anterior.

c. Estime el valor depreciado y el valor del equipo transcurrido dos años. Corrobore los datos analíticos con lo obtenido en la gráfica.

d. Estime el valor del equipo transcurrido 11 años, interprete su respuesta.

e. Estime en qué momento el equipo vale USD 4.500.

f. Estime en qué momento el equipo vale USD 3.500.

59. **Alquiler de automóviles.** Una agencia de vehículos tiene en patios 50 carros idénticos para alquilar. Cuando el valor del alquiler mensual de $1,2 millones, todos los 50 vehículos están ocupados; sin embargo, cuando el precio del alquiler sube a $1,5 millones, el número de vehículos alquilados desciende a 40 carros. Supóngase una relación lineal entre el número de unidades alquiladas (N) y el precio del alquiler (x).

a. Escribir una ecuación lineal y obtener su entre precio y vehículos alquilados.

b. ¿Cuántos vehículos se pueden alquilar si el precio es de 1 millón de pesos?

c. ¿Cuántos vehículos se pueden alquilar si el precio es de 1,32 millones de pesos?

d. ¿Cuántos vehículos se pueden alquilar si el precio es de 3 millones de pesos?

e. ¿Si la empresa vende 12 vehículos, ¿Cuál es el costo del alquiler de los restantes para emplearlos a todos?

60. **Demostración**. Demuestre que la mínima distancia entre un punto (x_1, y_2) y la recta expresada de la forma $Ax + By + C = 0$ está dada por la expresión matemática:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

61. **Oferta.** Un almacén de cadena tiene una mega-promoción, en la cual reduce el precio de sus artículos un 10%, posteriormente el gerente decide para la semana siguiente, aplicar otra promoción sin eliminar la anterior

promoción y que consiste en reducir el precio todos sus artículos en 5 dólares adicionales.

a. Encuentre una expresión lineal que relacione el precio original de un artículo con su precio final para la primera semana
b. Encuentre una expresión lineal que relacione el precio original de un artículo con su precio final para la segunda semana.
c. Una persona compra cierto artículo por 35 dólares, determine su valor de venta para la primera semana de promoción.
d. Una persona compra cierto artículo por 40 dólares, determine su valor de venta para la segunda semana de promoción.
e. Supóngase que se compra un artículo en la primera semana de promoción, si el valor pagado es de 30 dólares, cuál es el valor original del mismo.
f. Supóngase ahora que el precio final de un artículo que se compró la segunda semana es de 31 dólares, encontrar el valor original de este artículo.

62. **Impuesto predial**. En 2024 el impuesto predial se ha incrementado de forma constante en un 6% cada año. Si en el 2018 una familia paga por predial un valor de $2,000,000, determinar la cantidad que debe pagar en el 2022.

63. **Cámaras fotográficas**. En una venta de Black Friday, un almacén de cadena reduce los precios de todas sus cámaras digitales en ¼, y después ofrece reducir $500.000 al valor resultante. Si una persona adquiere una cámara digital por $4.000.000 durante esta oferta, encuentre el precio original de la cámara.

64. **Pinturas de arte**: Fernando estima que el precio de venta de cada una de las fotos que toma, es de US$ 100 y para aumentar sus ventas se asocia con una galería de artes, la cual le cobra a Fernando US$ 2.000 al mes por tener las fotos en exposición, más una comisión del 10% sobre las fotos que venda. Dado este contexto, ¿Cuántas fotos debe vender Fernando al mes para quedar para obtener alguna ganancia?

65. **Propiedad**. Una finca agrícola se destina para el cultivo de café, plátano y mora. El área de la región destinada al cultivo de café es dos veces más grande que el área de la región destinada al cultivo de la mora, y el área de la región destinada al cultivo de plátano es 4 hectáreas menor que tres veces el área de la región destinada al cultivo de mora. Si el total de la superficie de la finca es de 512 hectáreas cultivables, encuentre el área de cada uno de los cultivos.

66. **Parcela**. Un jardín tiene forma de rectángulo, con dimensiones de 20 metros de largo por 10 metros de ancho, y está segmentado en cuatro partes; se sabe que dos de las particiones, poseen la misma superficie, la siguiente partición tiene una superficie dos veces más grande que cualquier de las dos particiones iguales mencionadas anteriormente y por último, la cuarta partición tiene un área de 20 m^2 superior que cualquiera de las dos particiones que tiene la misma área y que fueron enunciadas al inicio del problema. Dadas estas condiciones, determine de forma precisa la superficie que tiene cada una de las particiones del jardín.

67. **Llantas usadas**. El departamento de estadística de Estados Unidos, estima que anualmente se desechan aproximadamente 455 millones de llantas, las que, por políticas gubernamentales de los diferentes países, deben exclusivamente ya sea almacenarse (se apilan), reciclarse, incinerarse o exportarse. En el año 2022 el número de llantas incineradas fue de $\frac{1}{10}$ del total, por su parte los neumáticos que fueron exportados fue de $\frac{2}{7}$ también del

total y finalmente las llantas que tuvieron que almacenarse fue a suqu vez $\frac{2}{13}$. Dadas estas condiciones, determine de forma numérica la cantidad de neumáticos que se ubican en cada una de las anteriores categorías.

68. **Lámparas LED**. El valor de compra de una lámpara fluorescente convencional para utilizarla durante un periodo mayor a 10.000 horas es de $9.000 y el valor de la factura de la electricidad consumida para esta lámpara durante este periodo es de $150.000, por su parte, se conoce que el valor económico de la adquisición de una lámpara electrónica ahorradora (LED) con una duración equivale a las 10.000 horas es de $25.000. Utilizando una lámpara LED en vez de una tradicional por 10.000 horas, lo que se ahorra en el valor de compra y el valor de la electricidad es de $250.000. ¿Cuál es el valor de la energía utilizando la lámpara ahorradora durante este periodo?

69. **Bonos de Dotación**: En muchos países incluyendo Colombia existe para algunos trabajadores, un auxilio o bono de dotación, consistente al suministro económico, de elementos o prendas de vestir que un empleador proporciona a sus empleados para desempeñar sus labores de manera adecuada y segura. Estos elementos de dotación pueden incluir uniformes, calzado especializado, equipos de protección personal, y otros elementos necesarios para el desarrollo de la actividad laboral. Ana es una trabajadora que recibe subsidio de ropa y adicionalmente sobre este le otorgan una reducción sobre el IVA de forma tal que cuando gasta este dinero en vestuario, se le reduce en un 7%, sin embargo, en otras compras con el bono, debe pagar completamente el impuesto. Ana fue de compras a un almacén, donde utilizó su bono para adquirir vestuario, pero también adquiere otras cosas por las que le cobraron el IVA completo. Si Ana gastó un total de $650.000 antes de impuestos y pagó un impuesto total sobre las ventas de $35.000, determine la cantidad de dinero gastado en sus compras.

70. **Problema de la Tienda:** Una pequeña tienda vende un producto en particular, para analizar la relación entre el precio de venta y la cantidad de unidades vendidas, el gerente realiza un estudio durante varios meses, recopilado los siguientes datos:

Cantidad Vendida (unidades)	Precio de Venta (en euros)
0	500
5	450
10	400
15	350
20	300

a. Sobre un plano cartesiano, ubique los puntos y trace una gráfica que mejor una los puntos.
b. Explique cómo es la correspondencia entre las dos variables de la tabla.
b. Obtenga un modelo matemático que relacione la cantidad de productos vendidos con el precio de venta de los mismo.
c. Si el precio de venta es de 200 €, cuántos productos se pueden vender.
d. Si la tienda pretende vender 25 artículos, cuál debe ser el precio de venta de los mismos.

71. **Santuario de Vida Animal**: En un santuario de conservación de vida silvestre, se ha llevado a cabo un estudio durante varios años para monitorear la población de cierta especie de animal en peligro de extinción. Se han recopilado los siguientes datos sobre la cantidad de animales en el santuario en diferentes años:

Año	Cantidad de Animales

2010	50
2012	70
2014	90
2016	110
2018	130

a. Obtener en un plano cartesiano, la representación de los puntos, donde el eje horizontal corresponda al año y en el eje vertical la cantidad de individuos.
b. Explicar el tipo de relación entre estas dos variables.
c. Obtener un modelo matemático a partir del análisis anterior, que relacione el año del análisis y la cantidad de individuos.
d. Cuántos individuos hubo en el 2022.
f. Cuántos individuos habrá en el 2025
g. En qué año, la cantidad de individuos llegará a los 300 especímenes.

72. Una empresa del sector tecnológico, fabrica celulares y logra estimar que su función de costo de producción viene dada por la función lineal:

$$C(n) = 4500 + 0{,}5n$$

Donde C es el costo expresado en millones de pesos y n es el número de celulares fabricados y vendidos; por otro lado, el precio de venta de cada celular es de $4.000.000 de pesos.

a. Obtenga la función de ingresos de la empresa tecnológica por la venta de celulares.
b. Cuál es el dominio de la función, para el cual la empresa no tiene ganancia.
c. El punto de equilibrio en economía es el nivel de producción o ventas en el cual los ingresos totales son iguales a los costos totales, para el problema dado, encontrar el punto de equilibrio.
d. Cuál es el intervalo de ventas para el cual la empresa tendrá ganancia.
e. Obtenga una expresión matemática para la función ganancia.

SECCIÓN 2.3 FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

En la sección anterior se hace una pequeña introducción al concepto de las funciones matemáticas con énfasis en las funciones lineales; en esta sección y en las próximas se hace una revisión de algunos tipos de funciones de uso frecuente en las matemáticas, las ciencias y las ingenierías.

Las funciones polinomiales de las que trata el cálculo elemental son de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde las constantes *a* son números reales y la constante n es un número natural, el exponente más grande al cual llegue la función determina su grado y comportamiento:

Función constante	$f(x) = a_0$	Con $a_0 \neq 0$
Función lineal	$f(x) = a_1 x + a_0$	Con $a_1 \neq 0$
Función cuadrática	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	Con $a_2 \neq 0$
Función cúbica	$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	Con $a_3 \neq 0$
Función 4° grado	$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	Con $a_4 \neq 0$

En esta sección se analizan las funciones polinomiales haciendo énfasis en las funciones cuadráticas o de segundo grado.

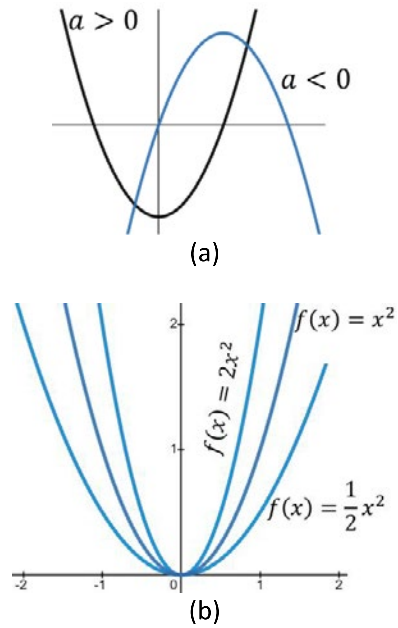


***Figura 2.16**. Naturaleza de las gráficas de las funciones cuadráticas. (a). Sentido de la apertura de las parábolas. (b). Magnitud de la apertura de las parábolas.*

El valor –a– en funciones cuadráticas es un parámetro importante y determina la naturaleza de esta. Valores positivos hacen que la gráfica de la función sea cóncava hacia arriba, valores negativos hacen que la función sea cóncava hacia abajo. Valores grandes de –a– hacen la curva más cerrada (menor radio de curvatura), valores cercanos a cero hacen la curva más abierta (radios de curvatura grandes)

Función Cuadrática.

Otra de las funciones ampliamente utilizadas en diversas disciplinas del conocimiento es la función cuadrática; esta función tiene como particularidad que el exponente de mayor grado es 2.

> ***Definición 2.6. Función cuadrática:*** *las funciones polinomiales de la forma:*
>
> $$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{[Ec. 2.7]}$$
>
> *Representan en forma general, la función cuadrática, donde a, b y c son constantes reales y* $a \neq 0$.

La representación gráfica de la función cuadrática se obtiene haciendo la transformación $y = f(x)$ obteniendo así una parábola ahora, dependiendo de la naturaleza de la constante *a*, la parábola puede abrir hacia arriba o hacia abajo, cuando $a > 0$ la parábola abre hacia arriba –ver figura 2.16.a–, cuando $a < 0$ la parábola abre hacia abajo; por otro lado, la magnitud de $|a|$ determina la abertura de la parábola, entre más grande sea el valor, más cerrada es la parábola; la figura 2.16.b., ilustra tres funciones parabólicas con diferente valor de *a*, nótese la abertura de las curvas.

Solución de una ecuación de segundo grado.

Para que una función se convierta en ecuación, es necesario que la variable dependiente, tome algún número real, el cual por lo general es cero; una vez hecho esto, se precisa encontrar el valor de la variable independiente tal que se cumpla la igualdad.

$$f(x) = y = 0$$

Y, en consecuencia

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para resolver esta última expresión, existen muchas alternativas, sin embargo, una de las más simples e igualmente utilizadas es la **fórmula general**.

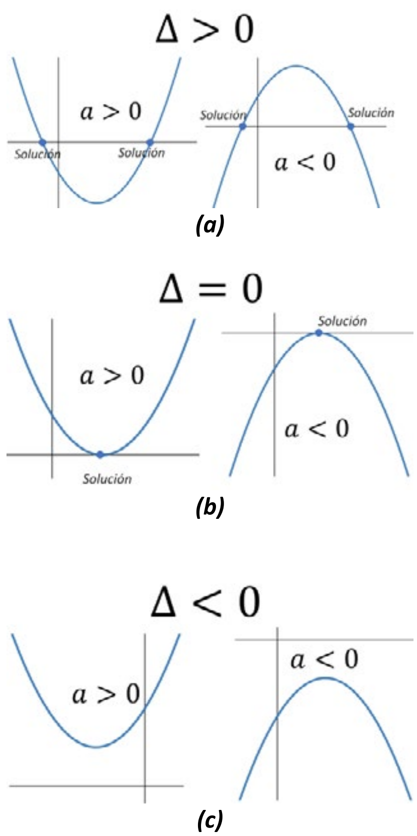


Figura 2.17. *Naturaleza gráfica de las posibles soluciones de una ecuación de segundo grado*

> ***Teorema 2.4. Soluciones de una ecuación de segundo**: toda ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones dadas por:*
>
> $$x_I = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
> $$x_{II} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{[Ec. 2.8]}$$
>
> *Donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$*

La expresión dentro del radical recibe el nombre de discriminante, simbolizado por la letra griega Δ y determina la naturaleza la solución

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

En consecuencia, existen tres posibles resultados para la solución de una ecuación de segundo grado:

1. **Discriminante mayor a cero** ($\Delta > 0$): en este caso, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales diferentes.
2. **Discriminante igual a cero** ($\Delta = 0$): en este caso, la ecuación cuadrática tiene una solución real.
3. **Discriminante menor a cero** ($\Delta < 0$): en este caso, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones complejas[1].

En términos gráficos, solucionar una ecuación implica encontrar los puntos de corte con el eje de las abscisas; dada la naturaleza de estos discriminantes, pueden ocurrir tres casos

---

[1] Es común afirmar que cuando el discriminante de una ecuación de segundo grado es menor a cero, no tiene solución real, y aunque esto es cierto es más preciso afirmar que las soluciones son complejas, es decir la solución tiene parte real y parte imaginaria.

Ejemplo 2.13. *Dadas las siguientes funciones, transformar en ecuaciones y resolverlas.*

(a). $f(x) = x^2 + 3x - 4$

(b). $f(x) = 5x^2 + 2x + 2$

Solución*: para convertir una función en ecuación, es necesario primero igualarla a una constante, por lo general cero, en consecuencia:*

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Aplicando la fórmula general con $a = 1, b = 3. c =- 4$ *se tiene:*

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 - 5}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 + 5}{2} = 1$$

Para la segunda expresión se tiene que $a = 5, b = 2. c = 2$ *y aplicando la fórmula general*

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{(2)^2 - 4(5)(2)}}{2(5)} = \frac{-2 - \sqrt{-36}}{10} = \frac{-2 - 6i}{10} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{(2)^2 - 4(5)(2)}}{2(5)} = \frac{-2 + \sqrt{-36}}{10} = \frac{-2 - 6i}{10} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Nótese en el primer problema que el discriminante es mayor que cero y en consecuencia se tienen dos soluciones reales diferentes, lo que corresponde a la intersección de la función, con el eje x, en dos puntos. Para la segunda función, se tienen dos soluciones complejas, lo que implica que la ecuación no corta al eje x. En la figura 2.18., se pueden ver las representaciones gráficas de estas ecuaciones.

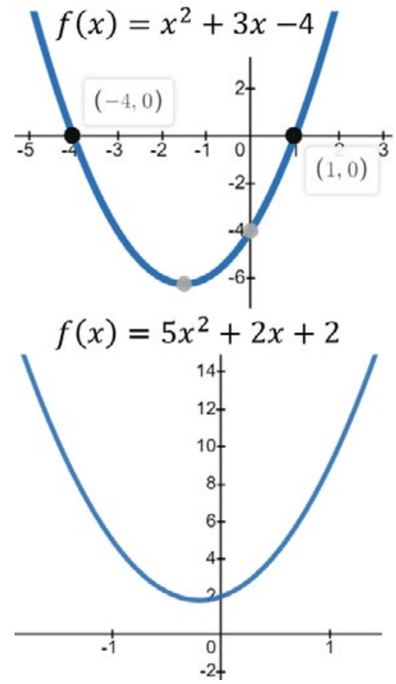


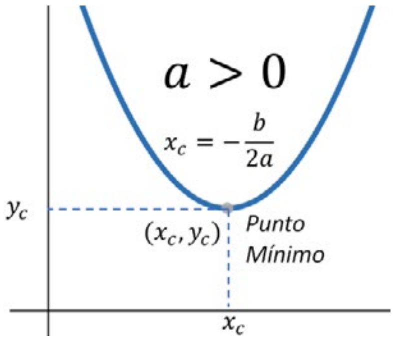
Figura 2.18*. Representaciones gráficas de las funciones del problema 2.10.*

Nótese que la primera gráfica corta al eje de las x en los puntos $(0, -4)$ *y* $(0,1)$*, lo que corresponde a las dos soluciones encontradas. Por otro lado, la segunda ecuación tiene dos soluciones complejas, lo que se establece que la gráfica NO corta al eje de las x en ningún punto.*

Puntos extremos de una función cuadrática.

Los puntos extremos, también conocidos como los puntos de mínima o máxima para funciones reales, son valores definidos en un intervalo cerrado, tal que la función en ese punto tenga una imagen de mayor valor que en cualquier otro punto o también puede suceder que tenga la imagen más pequeña que cualquier otra en otro punto diferente.

En disciplinas como la ingeniería, las ciencias económicas y administrativas, es especialmente útil encontrar los puntos extremos; supóngase, por ejemplo, que por algún medio una empresa obtiene la expresión que relaciona las utilidades semanales dadas las unidades que se fabriquen de cierto producto, resulta muy deseable encontrar la cantidad precisa de unidades de tal forma que se maximicen las ganancias, en este caso el problema consiste en encontrar un punto de máxima. Supóngase ahora en



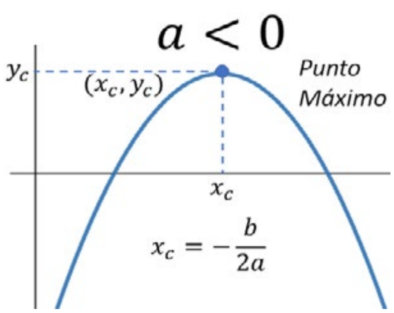


Figura 2.19. *Puntos extremos de funciones cuadráticas.*

Las funciones cuadráticas o polinómicas de segundo grado poseen puntos extremos relativos que pueden ser de máxima o mínima. Empleando la expresión mostrada en la ecuación 2.9., es posible encontrar estos puntos.

otro escenario que se tiene que diseñar un circuito integrado de baja potencia y que se cuenta con la función de transferencia de potencia en términos de la resistencia eléctrica, en este caso, se precisa hallar un punto de mínima o baja operación. En la sección de diferenciación y derivación, se evalúan algunas estrategias para encontrar de forma analítica estos puntos.

Definición 2.7. Extremos relativos: *Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ que contiene el punto x_o.*

1. *La función tiene un mínimo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$ si para cualquier otro punto se cumple que:*

$$f(x) \geq f(x_0)$$

2. *La función tiene un máximo relativo en el punto $(x_0, f(x_0))$ si para cualquier otro punto se cumple que:*

$$f(x) \leq f(x_0)$$

En el caso de las funciones cuadráticas, fácilmente se puede ver que, si la parábola abre hacia arriba, existe un único punto de mínima, mientras que, si la función abre hacia abajo, la función tiene un punto de máxima. Este punto se puede hallar:

Teorema 2.5. Puntos extremos: *dada la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ esta tiene un punto extremo absoluto en:*

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \qquad \text{[Ec. 2.9]}$$

El cual:
1. *Es un punto extremo de mínima si $a > 0$*
2. *Es un punto extremo de máxima si $a < 0$*

Esta situación fácilmente se puede apreciar en la figura 2.18.

Ejercicio 2.14. *Un granjero utiliza 180 metros de cerca para encerrar una región rectangular con una división paralela a uno de los lados, como muestra la figura, determinar:*

a. El ancho a de la región en función del largo l, de la región.
b. El área total A de la región, en función de l.
c. Las dimensiones que dan, a la región encerrada y dividida, la mayor área.

Solución: *Los 180 metros de cerca corresponden al perímetro de la región y a la longitud del cable que divide los dos terrenos, en consecuencia, dados los parámetros del problema, se puede decir:*

$$2l + 3a = 180 \text{ lo que corresponde } a = 60 - \frac{2l}{3}$$

b. Sabiendo que el área de una figura rectangular es lado por lado, se tiene entonces que:

$$A = l \cdot a = l\left(60 - \frac{2l}{3}\right) = -\frac{2}{3}l^2 + 60l$$

Donde $l \in [0,90]$… ¿por qué?

c. De la última expresión se tiene el área en términos de la longitud del terreno y que corresponde a una función polinómica de segundo grado cuyos coeficientes son $a = -\frac{2}{3}$, $b = 60$ y $c = 0$, así, como $a < 0$ y aplicando el teorema de los puntos extremos se tiene que:

$$l = -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{-2\frac{2}{3}} = 45m \quad y \quad a = 60 - \frac{2 \cdot 45}{3} = 30m$$

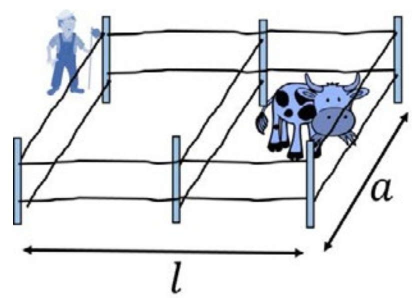


***Figura 2.20**. Situación de problema 2.11.*

La figura 2.20., muestra la gráfica correspondiente a la función que representa el área del terreno en términos de su longitud. Nótese que solo existe un único valor para el cual el área es máxima

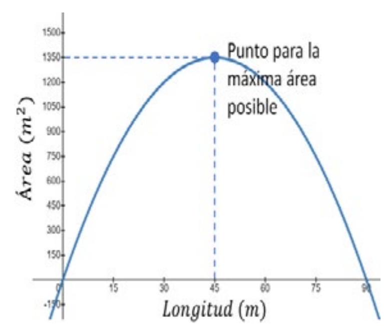


***Figura 2.21**. Comportamiento del área de un terreno, en función de su longitud. Problema 2.11.*

Funciones polinomiales de orden superior.

Las funciones algebraicas se clasifican en funciones polinomiales y racionales, las primeras inician desde la función constante hasta las funciones n–ésimas de orden superior; en las secciones anteriores se analizaron la función constante, la función lineal y la función cuadrática como primeras funciones polinomiales, a continuación, se establecen algunas propiedades y características para las funciones de tercer y cuarto orden.

> ***Definición 2.8. Función polinomial.*** *Expresiones algebraicas de la forma:*
>
> $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ con } a_n \neq 0$$
>
> *Son funciones polinomiales, donde los términos $a_n, a_{n-1}, a_{n-2} \cdots a_3, a_2, a_1, a_0$ son los coeficientes de la expresión y el número entero positivo n, determina el grado del polinomio*

Expresiones con un solo término reciben el nombre de monomios.

***Ejercicios 2.15**. Grafique cada una de las siguientes funciones.*

$f(x) = x \qquad f(x) = x^2 \qquad f(x) = x^3$

$f(x) = x^4 \qquad f(x) = x^5$

***Solución:** La tabla de valores muestra algunos puntos característicos de estas funciones; se han escogido valores positivos para tabular, sin embargo, también es preciso encontrar valores negativos para obtener una buena representación gráfica.*

***Tabla 2.2.** Valores característicos de las funciones del problema 2.12.*

x	x	x^2	x^3	x^4	x^5
0,0	0,0	0,00	0,000	0,0000	0,00000
0,1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
0,2	0,2	0,04	0,008	0,0016	0,00032
0,5	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125
0,7	0,7	0,49	0,343	0,2401	0,16807
1,0	1,0	1,00	1,000	1,0000	1,00000
1,2	1,2	1,44	1,728	2,0736	2,48832
1,5	1,5	2,25	3,375	5,0625	7,59375
1,7	1,7	2,89	4,913	8,3521	14,19857
2,0	2,0	4,00	8,000	16,0000	32,00000

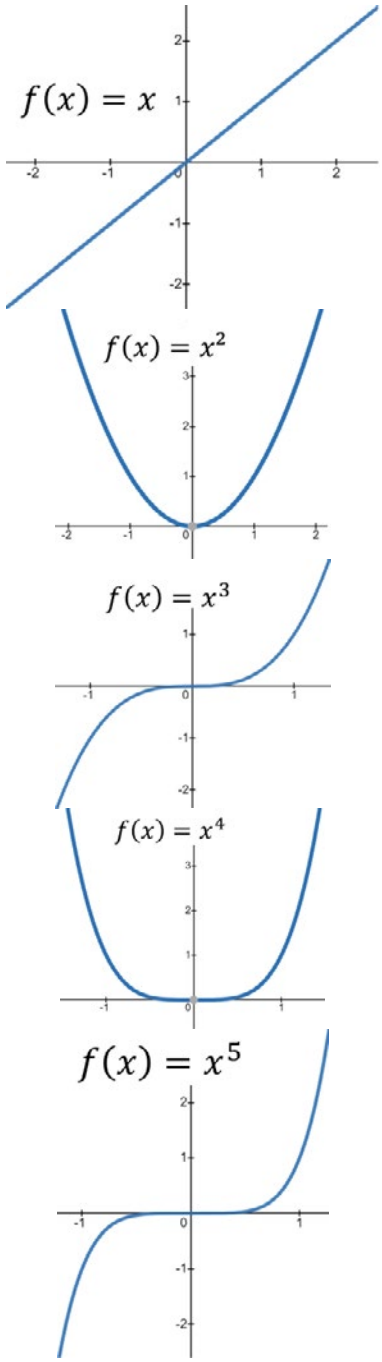


***Figura 2.23**. Representaciones gráficas de varias funciones monomicas.*

Estas funciones reciben el nombre de funciones monomiales o de un solo término. Cuando el exponente es par, la función monomial es par e igual sucede para las funciones impares.

El grado del polinomio permite predecir aproximadamente el comportamiento de este y el coeficiente de la variable con este exponente a su vez permite aproximar el sentido las concavidades. La figura 2.22., muestra estos comportamientos.

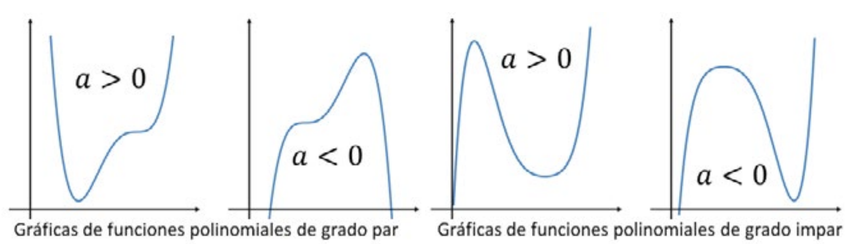


***Figura 2.22**. Características gráficas generales de las funciones polinomiales*

Para las funciones polinomiales se tiene que su dominio son todos los números reales.

$$\mathcal{D}f = \mathbb{R}$$

El rango de las funciones polinomiales de grado impar también son todos los reales, pero en las funciones de grado par, el rango si está restringido a ciertos valores.

Ceros polinomiales

En la sección anterior se analizan los puntos de corte de las ecuaciones cuadráticas con el eje de las abscisas y se llega a una expresión denominada fórmula general; en el caso de los polinomios de grado tres, cuatro, quinto grado o mayor no existen expresiones directas[2] con las cuales se puedan encontrar estas soluciones por lo cual es común acudir a estrategias como la división sintética o a métodos numéricos.

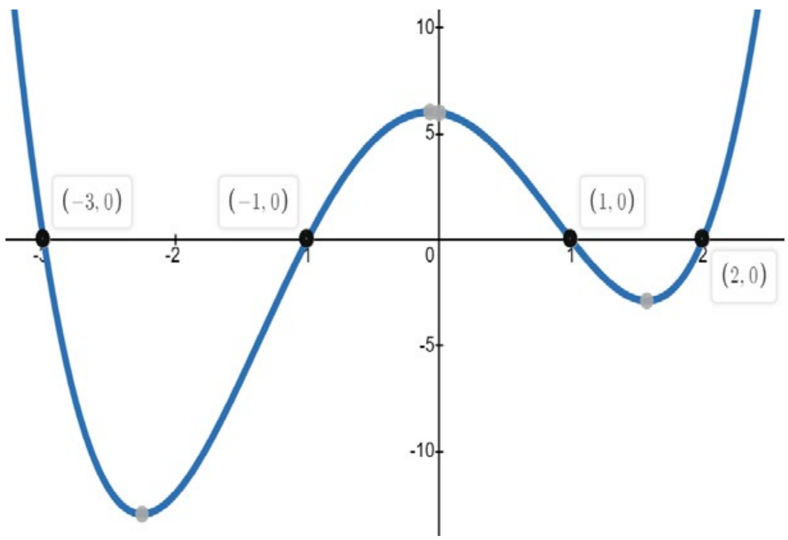


Figura 2.24. *Gráfica de una función polinomial de cuarto grado*

Cuando se menciona los ceros polinomiales –también conocidos como raíces, polos o soluciones–, se está indagando por los valores de la variable independiente tal que reemplazados en el polinomio lo convierta en cero. La figura 2.22., muestra la representación gráfica de una función polinomial de cuarto grado

$$f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$$

Nótese que la gráfica corta al eje x en cuatro puntos, $x = -3$; $x = -1$; $x = 1$ y $x = 2$; estos son los ceros polinomiales, ya que reemplazados en la función original hace que esta sea igual a cero; a estos valores también se les denomina raíces y constituyen lo que se denomina factores lineales.

$$f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x+3)(x+1)(x-1)(x-2)$$

Otra particularidad que muestra la gráfica es que la función tiene tres puntos extremos, uno es un mínimo absoluto, otro es un mínimo relativo y el otro es un máximo relativo; estos temas se tratan con mayor profundidad en la sección de la derivada.

PAUTAS PARA GRAFICAR UN POLINOMIO

1. Factorizar el polinomio para hallar las raíces reales, estas corresponden a las intersecciones con el eje x de la gráfica.

2. Elaborar una tabla de valores del polinomio donde se evalúe la variable x en función de y, tanto a la izquierda como a la derecha de los ceros determinados en el paso Nº 1. Agregue a la tabla el intercepto con el eje y .

3. Graficar los interceptos y los puntos ilustrados en el paso Nº 2.

4.Establecer la tendencia final del polinomio.

5. Trazar suavemente una curva que cruce por cada uno de los puntos señalados en el paso Nº 3, la cual represente la trayectoria final de la gráfica

Dada la siguiente función de cuarto grado, obtener los ceros o raíces polinomiales.

$$f(x) = x^4 - 25x^2 + 144$$

[2] La metodología de Cardano y Tartaglia son alternativas para encontrar las soluciones a ecuaciones polinómicas de tercer y cuarto grado respectivamente.

Funciones racionales.

En aritmética, los números racionales son aquellos que se pueden escribir como el cociente de dos números reales; de la misma manera, una función racional es aquella que se puede escribir como el cociente de dos funciones polinómicas.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad con \quad q(x) \neq 0$$

Son ejemplos de funciones racionales

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 3}{x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 6x - 4} \qquad f(x) = \frac{3x + 2}{x^3 + 10x^2 - 6x - 8}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x^5 - 2x^3 + x - 1} \qquad f(x) = \frac{2x + 5}{x^4 - 12x^2 - 3x + 10}$$

Las funciones polinomiales y racionales son ejemplos de funciones algebraicas. Una función algebraica de x, es cualquier función que puede ser expresada con un número finito de operaciones como sumas, restas, multiplicaciones, cocientes y radicales que involucren x^n, son ejemplos de funciones algebraicas las ya vistas, pero también pueden ser:

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 3} \qquad f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

Ejemplo 2.16. *Graficar la función:*

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3x - 4}$$

Solución: *al factorizar la expresión del denominador, se tiene que*

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

y así la función no está definida ni para $x = 4$ *ni para* $x = -1$*, puesto que ocurriría división por cero, el dominio de f(x) es el conjunto de los números reales salvo* $x = 4$ *y* $x = -1$*. El único intercepto de la gráfica con el eje X está en* $(-3,0)$ *que corresponde al cero del denominador.*

Para encontrar el intercepto con el eje Y basta tomar a X como cero con lo cual se llega al punto $(0, -¾)$.

Los signos de f(x) se analizan de acuerdo con las siguientes posibilidades:

- ✓ *Si x en valor absoluto toma valores muy grandes, entonces S(x) se aproxima a 0.*

- ✓ *Si se toman valores de x aproximándonos a -1 por la izquierda, la función crece sin parar.*
- ✓ *Si se toman valores de x aproximándonos a -1 por la derecha, la función f(x) decrece sin parar.*
- ✓ *Si se toman valores de x aproximándonos a 4 por la izquierda, los valores correspondientes a la función f(x) decrecen sin parar.*
- ✓ *Si se toman valores de x aproximándonos a 4 por la derecha, los valores correspondientes a la función f(x) crecen sin parar.*
- ✓ *Las rectas verticales x=-1 y x = 4 son asíntotas verticales de S(x).*

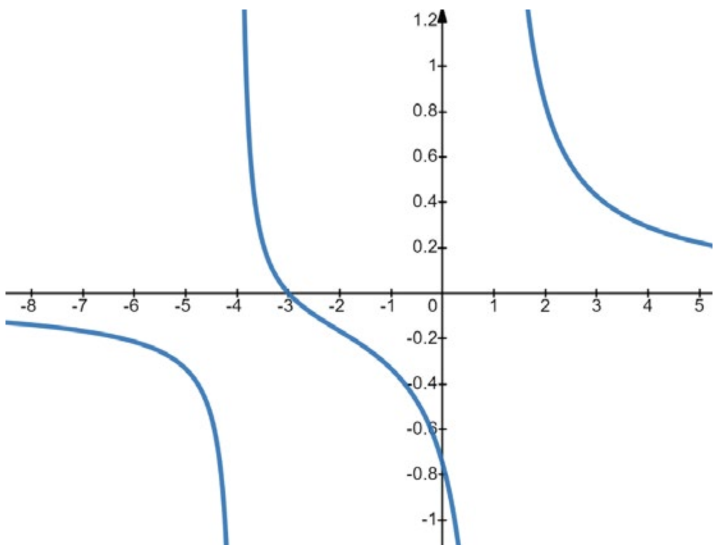


***Figura 2.25**. Gráfica del problema 2.13.*

No todas las funciones racionales tienen asíntotas verticales, tómese como ejemplo la función racional

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

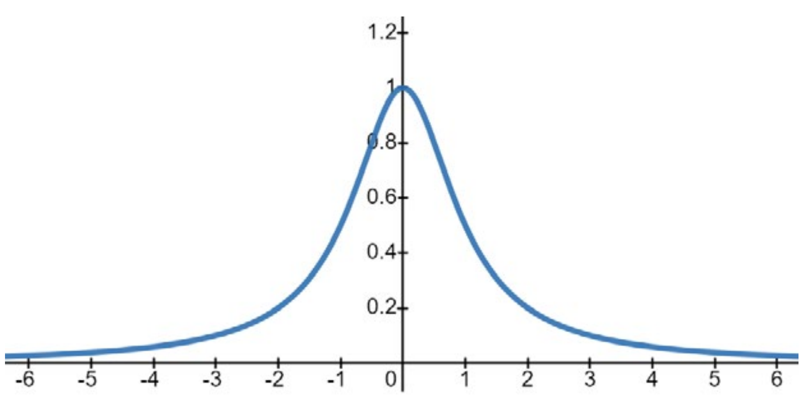


***Figura 2.26**. Gráfica de una función que no posee asíntotas verticales.*

Claramente se puede apreciar que el dominio de la función son todos los números reales, mientras que el rango está en el intervalo (0,1). Queda como ejercicio para el lector corroborar este hecho.

Ejercicios Sección 2.3. Funciones polinomiales y racionales

Responda a las siguientes preguntas y cuestiones.

1. ¿Qué semejanzas y diferencias encuentra entre las funciones y las relaciones?
2. Identifique los elementos presentes en cualquier expresión matemática del tipo polinomial.
3. Cuál sería el grado de la expresión matemática $x^2y^3z^4$, justificando su escogencia.
4. La función lineal puede considerarse de naturaleza polinomial?
5. Cuando dos polinomios son sumados o restados, qué condiciones se deben tener en cuenta para su reducción.
6. Explique la estrategia convencional para clasificar las funciones polinomiales y proponga una alternativa para una nueva clasificación de estas funciones.
7. Qué son los polinomios completos o en su defecto, los polinomios incompletos. Establezca algunos ejemplos de cada una de estas categorías.
8. Cuándo una función polinomial tiene la característica de ser función par. Establezca algunos ejemplos.
9. Cuándo una función polinomial tiene la característica de ser función impar. Establezca algunos ejemplos.
10. Describa las características de las funciones cuadráticas y como se asocian estas con las parábolas.

Para los siguientes ejercicios, encuentre el grado del polinomio.

11. $p(x) = x^2 + 3x + 5$
12. $p(x) = 6x^5 - 4x^3 + 8x + 1$
13. $p(y) = 6y^4 + 5y^3 - 2y^2 + y + 1$
14. $p(z) = \frac{1}{2}z^4 + 3z^3 - \frac{3}{2}z^2 + 5z$
15. $p(x, y) = 6x^2y^3 - y^2 - 6yx - 4x^4y$
16. $p(x, y, z) = x^2y^3z + z^4yx^5$
17. $p(x) = 3x^6 - 5x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 7$
18. $p(x) = \pi x^3 + ex^2 - \sqrt{2}x + 1$
19. $p(x, y) = x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 3y^2$
20. $p(m) = mn + m^2n^2 + 1$

Dadas las siguientes funciones cuadráticas, determine su concavidad.

21. $f(x) = 2x^2 + 1$
22. $f(x) = 5x^2 + 3x + 1$
23. $f(x) = 6x - 2x^2$
24. $f(x) = \frac{1}{2}x - 3 - \frac{5}{2}x^2$
25. $f(m) = m^2 + 3m - 1$
26. $g(n) = \sqrt{2}n^2 - 5n + \frac{\pi}{2}$
27. $P(x) = \frac{5 - x^2}{\sqrt{3}}$
28. $f(x) = 16 - \sqrt[3]{-8}x^2$
29. $f(x) = -[x^2 + 2x - 1]$
30. $p(x) = (5 - x)^2$
31. $p(x) = -(5 + x)^2$

Convierta las siguientes funciones en ecuaciones y emplee el método de factorización para hallar los ceros.

32. $f(x) = x^2 + 4x + 3$
33. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
34. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
35. $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$
36. $f(x) = 6x^2 + 3x - 3$
37. $f(x) = 2x^2 - 5x - 12$
38. $f(x) = 2x^2 - 9x + 10$

39. $f(x) = 12x^2 - 31x + 20$
40. $f(x) = 6x^2 - 11x - 10$
41. $f(x) = 18x^2 + 21x + 5$
42. $f(x) = 3x + 2x^2$
43. $f(x) = 4x^2 - 1$
44. $f(x) = 2x^2 - 3$
45. $f(x) = 5x - 2x^2$
46. $f(x) = 6x - 2x^2$
47. $f(x) = 12x - 3x^2$

Resuelva las siguientes ecuaciones empleando el método de formula general para hallar los ceros.

48. $x^2 + 2x + 3 = 0$
49. $x^2 - 2x + 3 = 0$
50. $x^2 - 2x - 6 = 0$
51. $x^2 - 2x - 3 = 0$
52. $2x^2 - 2x - 5 = 0$
53. $3x^2 - 4x - 5 = 0$
54. $2x^2 - 3x - 7 = 0$
55. $3x^2 - 6x + 2 = 0$
56. $\frac{1}{3}x^2 + 2x - 12 = 0$
57. $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 = 0$
58. $-\frac{2}{3}x^2 + 4x - 1 = 0$
59. $x^2 + 1 = 0$
60. $x^2 + x + 1 = 0$
61. $-x^2 + x - 3 = 0$

Dadas las siguientes funciones cuadráticas, encontrar sus puntos críticos de máxima o de mínima según corresponda.

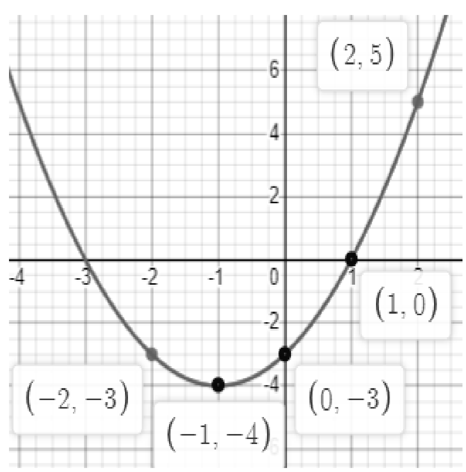
62. $f(x) = 2x^2$
63. $f(x) = x^2 - 4x + 1$
64. $f(x) = 3 + 2x - x^2$
65. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$
66. $f(x) = x + 2x^2 - 3$
67. $f(m) = -3m^2 - 4m + 5$
68. $f(n) = 4 - 12n^2$
69. $f(x) = 1 - 5x^2$
70. $f(x) = 3x - 2x^2$
71. $f(x) = x^2 + 2x$
72. $f(p) = 2p^2 - 4p + 3$
73. $f(x) = 24 - 9x + 2x^2$

Dadas las siguientes funciones cuadráticas, determine su concavidad, su punto crítico y resuelva las ecuaciones correspondientes. Corrobore sus resultados con la gráfica o representación geométrica.

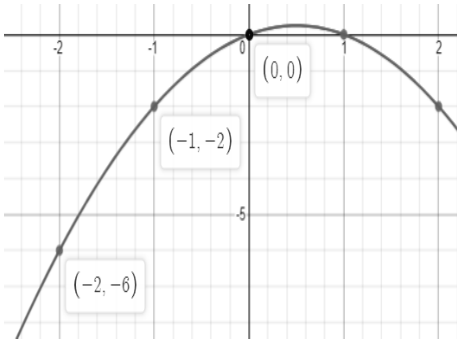
74. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
75. $f(x) = -x^2 + 2x - 3$
76. $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$
77. $f(x) = 3x^2 - 8x + 4$
78. $f(x) = 4 - x + x^2$
79. $f(x) = 4 - x^2$
80. $f(x) = x^2 - 9$
81. $f(x) = x - x^2$
82. $f(x) = 3x^2$
83. $f(x) = -10 + 8x + 2x^2$

Las siguientes representaciones ilustran funciones cuadráticas. Dados los puntos por donde pasa la gráfica, encuentre analíticamente la función que la representa.

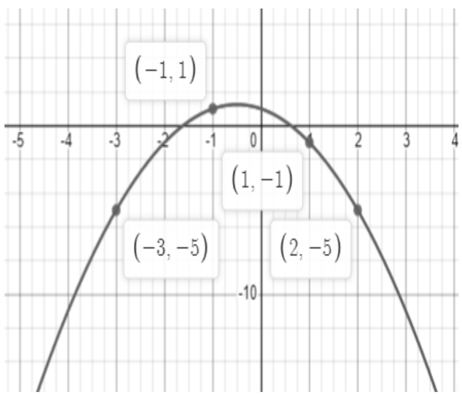
84.



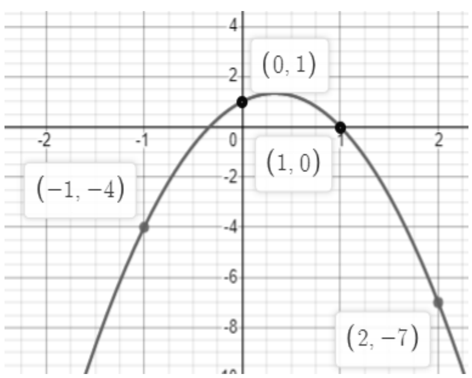
85.



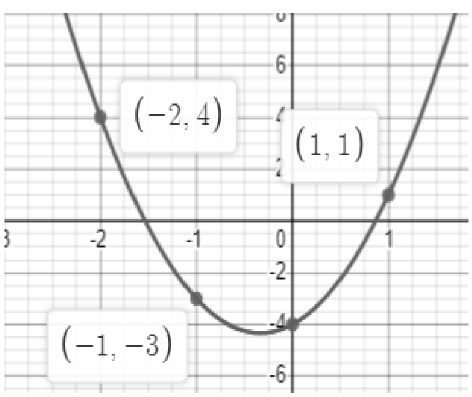
86.



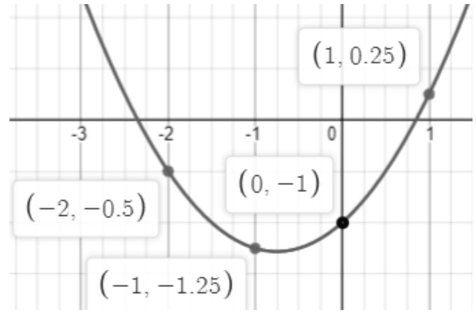
87.



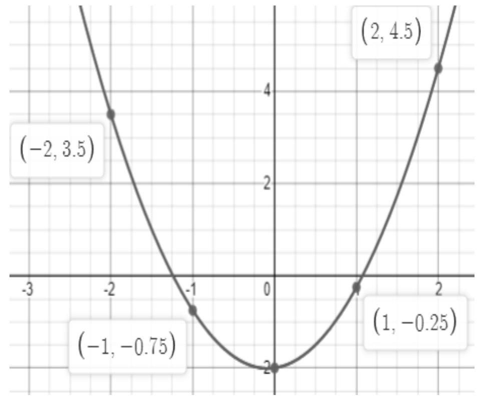
88.



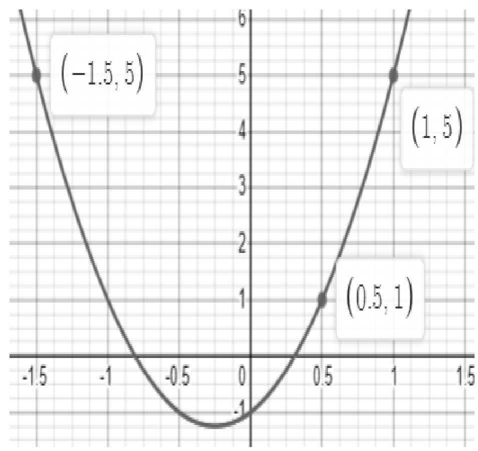
89.



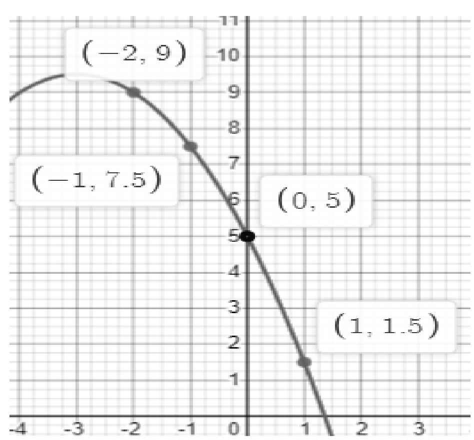
90.



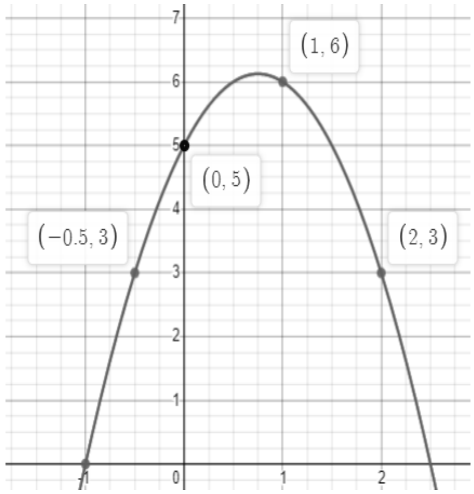
91.

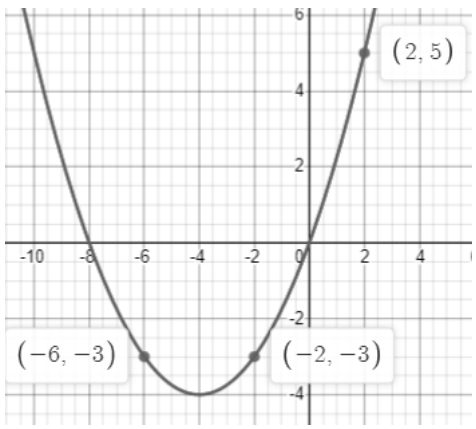


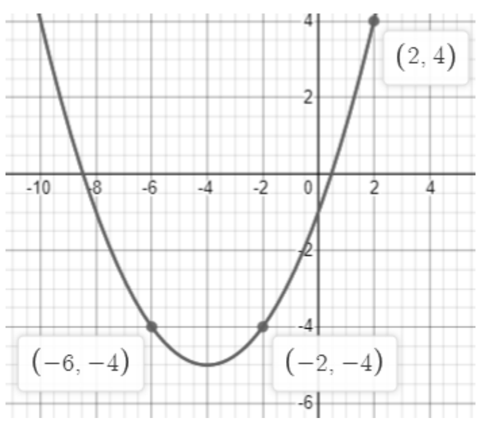
92.



93.



94. 

95. 

Los siguientes ejercicios muestran un sistema de ecuaciones 2x2, encuentre de forma analítica los puntos de corte.

96. $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$

97. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$

98. $\begin{cases} y = 3x - 4 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

99. $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = 2x^2 - 3x \end{cases}$

100. $\begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = x^2 - 2x + 3 \end{cases}$

101. $\begin{cases} y = 5x - 1 \\ y = 2x^2 - x + 3 \end{cases}$

102. $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = x^2 + 3x - 2 \end{cases}$

103. $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = x^2 + 3x - 2 \end{cases}$

104. $\begin{matrix} y = -2x^2 + x - 1 \\ y = 3x^2 - 2x - 2 \end{matrix}$

105. $\begin{cases} y = -4x^2 + 3x + 6 \\ y = x^2 + x - 1 \end{cases}$

106. $\begin{matrix} y = 6x^2 + 4x - 11 \\ y = 2x^2 + x - 4 \end{matrix}$

107. $\begin{cases} y = 4x^2 + 4x - 9 \\ y = x^2 + x - 3 \end{cases}$

En los siguientes ejercicios, obtener la solución para el conjunto de ecuaciones, realizar en un mismo plano sus representaciones geométricas e interpretar la respuesta

108. $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$

109. $\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = x + 2 \end{cases}$

110. $\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ y = -x^2 - x \end{cases}$

111. $\begin{cases} y = x^2 + x + 2 \\ y = -x^2 - 3x - 1 \end{cases}$

112. $\begin{cases} y = x^2 + x + 2 \\ y = -x \end{cases}$

Describa el comportamiento de cada una de las funciones siguientes

113. $f(x) = x^3 + 5x$

114. $f(x) = -x^3 + x$

115. $f(x) = x^3 + x^5$

116. $f(x) = -x^3 + 2x^5$

117. $f(x) = x^4 + x^2$

118. $f(x) = -x^4 + x^2$

119. $f(x) = x^6 + x^4$

120. $f(x) = x^4 - x^2$

Encuentre los ceros polinomiales de las siguientes funciones

121. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

122. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

123. $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

124. $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 3)$

125. $f(x) = x^3 - 4x$

126. $f(x) = x^3 - x^2 - 12x$

127. $f(x) = x^3 - x^2 - 12x$

128. $f(x) = 2x^4 - 8x^2$

129. $f(x) = (x^2 + x)(x^2 - 9)$

130. $f(x) = 5x^4 - 20x^2$

131. $f(x) = 1 - x^4$

En los ejercicios siguientes, encuentre la función polinomial de grado n que tiene los ceros polinomiales dados. (Hay múltiples respuestas válidas

132. Grado 2; ceros (-1,1)

133. Grado 2; ceros (2,3)

134. Grado 2; ceros (-3,1)

135. Grado 3; ceros (-2,1,3)

136. Grado 3; ceros (-1,2,4)

137. Grado 3; ceros (-3,0,1)

138. Grado 4; ceros (-2,-1,0,3)

139. Grado 4; ceros (-3,-1,1,2)

140. Grado 4; ceros (-2,0,1,3)

Problemas de aplicación

A continuación, usted va a encontrar una serie de situaciones problema en diversas áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), las cuales debe interpretar, modelar y resolver para dar cuenta de la solución. Ilustre y explique claramente los modelos propuestos, identificando las variables utilizadas, explicando también la estrategia de solución y la calidad de la solución encontrada.

141. **Función de demanda**. Una empresa dedicada a la comercialización de relojes inteligentes determina que su función de demanda para una determinada marca está dada por la expresión matemática:

$$p = d(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}5x + 60$$

Donde x representa la cantidad de relojes vendidos mensualmente y expresado en cientos de unidades, y $p = d(x)$ representa el valor de cada reloj expresado en dólares. Para esta situación determine:

a. El precio de cada reloj para el cual ya no habrá demanda.

b. La cantidad mensual de relojes que se deben producir para maximizar su precio.

142. **Función de oferta**. la misma empresa del problema anterior logra determinar que su función de oferta para la comercialización de relojes inteligentes de baja gama está dada por la expresión matemática:

$$p = O(x) = 0{,}05x^2 + 30$$

Donde p corresponde con el precio por unidad de cada equipo y x representa la cantidad de artículos comercializados, expresado en cientos de unidades. para las condiciones planteadas en el problema determine cuál es el precio más bajo al cual esta empresa comercializadora introducirá los relojes al mercado.

143. **Punto de equilibrio**: En condiciones ideales de mercado y competencia, el precio de un

producto tenderá a estabilizarse en relación con el equilibrio entre la oferta de este y la demanda que se haga de él; si el precio es muy alto, en condiciones normales las ventas tienden a bajar porque el consumidor no lo comprará, si por el contrario el precio es muy bajo, el comerciante o el fabricante no lo producirá porque no tendrá margen de ganancia. El equilibrio de mercado es el resultado de encontrar el punto óptimo donde la cantidad producida es igual a la cantidad demandada, Siendo para este punto de artículos producidos y vendidos, la cantidad de equilibrio y el precio que se asocia a esto se denomina el precio de equilibrio. Para los dos problemas anteriores, con sus respectivas funciones de demanda y oferta, determine la cantidad y el precio de equilibrio para la comercialización de celulares de gama baja. Obtenga una gráfica del problema.

144. **Movimiento Parabólico**: Un arma dispara una bala con una rapidez de $10\ m/s$ a un ángulo de 45°, cuyo movimiento se puede describir mediante la ecuación parabólica

$$h = x - 0{,}098x^2$$

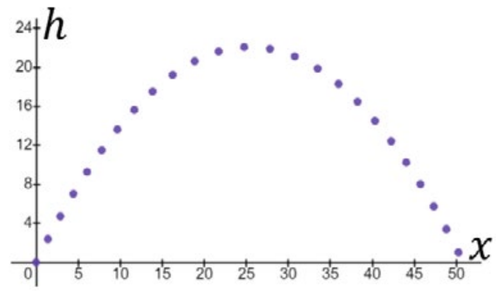
Donde x representa el espacio recorrido y h la altura a la cual sube la bala. Para la situación anterior determine:

a. La altura cuando $x = 2m$
b. La altura cuando $x = 6m$
c. La altura cuando $x = 12m$
d. La altura mayor a la cual sube la bala
e. El alcance máximo de la bala
f. Obtenga una representación geométrica de la función y ubique las respuestas anteriores

145. **Movimiento Parabólico**: Un cañón dispara una bala con una rapidez de $24\ m/s$ a un ángulo de 60°, cuyo movimiento se puede describir mediante la ecuación parabólica

$$h = 1{,}73205x - 0{,}03402x^2$$

Donde x representa el espacio recorrido y h la altura a la cual sube la bala y cuya representación geométrica se muestra a continuación:



Para la situación anterior determine:

a. La altura cuando $x = 12\ m$
b. La altura cuando $x = 36\ m$
c. La altura cuando $x = 50\ m$
d. La altura mayor a la cual sube la bala
e. El alcance máximo de la bala

146. **Procesadores de computadoras**. Una empresa se dedica a la comercialización de procesadores para computadores de alto rendimiento y estima que la rentabilidad está dada por la expresión matemática

$$R(x) = -10x^2 + 2000x$$

Donde x simboliza la cantidad de unidades vendidas, y $R(x)$ la rentabilidad expresada en dólares. Bajo las condiciones planteadas por el problema determine la cantidad de procesadores que debe vender esta empresa comercializadora para maximizar su utilidad o rentabilidad.

147. **Calzado masculino**. Una fábrica de zapatos deportivos para hombres determine que la rentabilidad por la venta de estos elementos está dada por la expresión matemática

$$y = -0{,}02x^2 + 200x$$

Donde x representa la cantidad de unidades vendidas, y $R(x)$ la rentabilidad expresada en dólares. Bajo las condiciones planteadas por el problema determine la cantidad de zapatillas que debe fabricar esta empresa para maximizar su utilidad o rentabilidad.

148. **Velocidad del flujo sanguíneo**. La velocidad con que circula el flujo sanguíneo en el interior de la arteria en $\frac{cm}{s}$ para un ser humano, está dada por la ecuación de Poiseuille que establece:

$$v = k(R^2 - r^2)$$

Donde k es un valor fijo, R el radio de la arteria (expresado en centímetros), r es el punto donde se quiere determinar la velocidad del flujo sanguíneo y que se mide con respecto al centro de la arteria. Para esta configuración dado que k=1000 y se tiene una arteria de 2 milímetros de radio, estime la velocidad con que viaja el flujo sanguíneo a 1 milímetro del centro de la arteria.

149. **Velocidad del flujo sanguíneo**. Para el problema anterior, conociendo la ecuación de Poiseuille:

$$v = k(R^2 - r^2)$$

Obtenga para $k = 800$, y $R = 4$ milímetros:

a. La representación gráfica de velocidad del flujo sanguíneo contra posición de la medida.
b. La velocidad del flujo sanguíneo en el centro de la arteria.
c. La velocidad del flujo sanguíneo en el extremo del radio de la arteria.
d. La velocidad del flujo sanguíneo en el punto medio de la arteria.

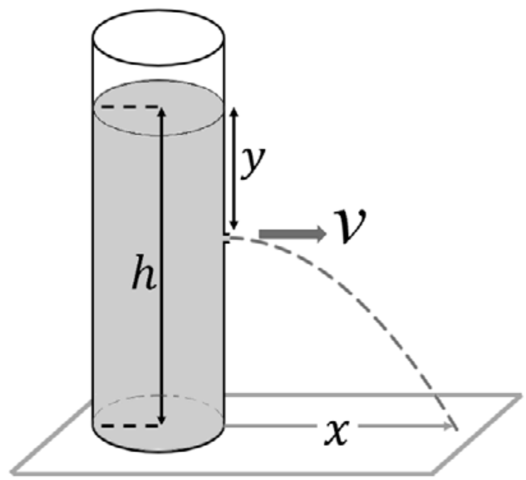
150. la figura muestra un tanque en forma cilíndrica que contiene agua hasta una altura h medida desde la base del cilindro. En este se perfora un pequeño agujero a una distancia y medida desde el nivel del agua, por lo que el líquido empieza a salirse con una velocidad dada por la ecuación de Bernoulli.

$$v = \sqrt{2gy}$$

Y el chorro cae a una distancia x de la base del cilindro, que se puede modelar por la relación matemática:

$$x = 2\sqrt{y(y-h)}$$

Donde g es la gravedad –considérese igual a 10 m/s²–, las distancias expresadas en metros y la velocidad de salida del líquido en el agujero dado en m/s. (Ver figura)



Con las expresiones definidas anteriormente y un cilindro que tiene agua con una profundidad de 1 m, encuentre:

a. La representación geométrica de la velocidad de salida en función de la altura o de nivel de líquido.
b. La representación geométrica del alcance del chorro en función de la altura o nivel de líquido.
b. La posición del agujero para que el chorro de agua caiga lo más lejos posible del cilindro.

SECCIÓN 2.4 FUNCIONES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

La trigonometria es una disciplina en las matemáticas, que en primera instancia estudia las relaciones geométricas entre lados y ángulos en triángulos, pero que se extiende a diversas disciplinas y puede aplicarse tanto en contextos académicos, pero también en contextos situacionales reales. El estudio de la trigonometría inicia con el concepto del ángulo y las diversas formas que existen para medirlo.

> ***Definición 2.9. El ángulo****: es la amplitud de rotación que describe un segmento rectilíneo en torno de uno de sus extremos tomado como vértice desde una posición inicial hasta una posición final.*

Si la rotación es en sentido levógiro (contrario a las manecillas del reloj), se considera el ángulo positivo. Si la rotación es en sentido dextrógiro (conforme a las manecillas del reloj), el ángulo se considera negativo. Existen tres formas básicas de medir ángulos, el sistema sexagesimal, el sistema radian y el sistema hexagesimal.

El sistema sexagesimal, divide la circunferencia en 360 partes iguales y cada parte la denomina grado, posteriormente toma cada grado y lo divide en 60 partes iguales y a cada una se le da el nombre de minuto, cada minuto a su vez es dividido en 60 partes y cada parte recibe el nombre de segundo.

El sistema radián, es el sistema natural de medida de ángulos y se define como:

> ***Definición 2.10. El radián****: es la unidad de ángulo plano equivalente a un ángulo cuyo arco posee igual longitud que el radio.*

Uno de los aspectos interesantes es que, si se toma media circunferencia de cualquier radio, sin importar el tamaño, siempre hay el mismo número de radios y a este número se le asignó un símbolo, $pi = \pi$. Una forma equivalente de verlo es tomar el perímetro de la circunferencia –la longitud total de la circunferencia– y se divide entre el diámetro, sin importar las dimensiones de esta circunferencia, el cociente siempre es el mismo.

π = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510 = 180°

Conversión entre sistemas para medir ángulos

En la conversión de un sistema de medida angular a otro se pueden usar diversas estrategias, sin embargo, recordando que $\pi = 180º$, es posible usar este factor de conversión.

Angulo*: es la abertura entre dos líneas de cualquier tipo que concurren en un punto común llamado vértice.*

Según la abertura los ángulos se clasifican en:

Agudos*: ángulos menores a 90º*
Rectos*: ángulos iguales a 90º*
Obtusos*: ángulos mayores a 90º pero menores a 180º*

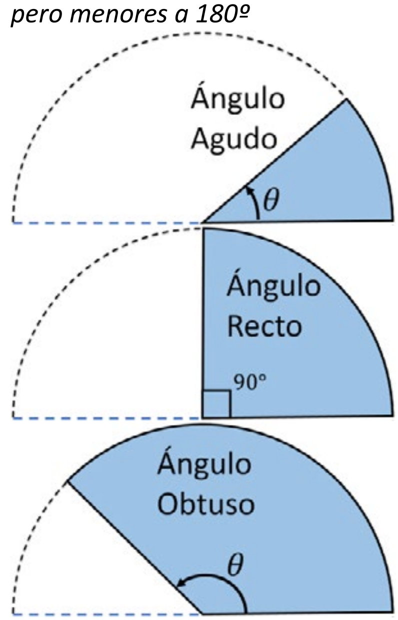


Figura 2.27*. Tipos de ángulos*

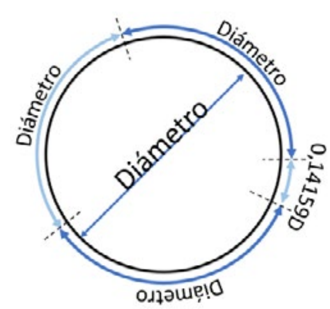


Figura 2.28. El número π

$$\frac{Perimetro}{Diámetro} = 3{,}14159\ \ldots.$$

***Ejemplo 2.17**. Pasar a grados, los siguientes ángulos expresados en radianes:*

$$\frac{3\pi}{2}, \frac{4\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$$

***Solución**: recordando que $\pi = 180º$ se tiene entonces que*:

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{3 \cdot 180}{2} = 270º \qquad \frac{4\pi}{5} = \frac{4 \cdot 180}{5} = 144º \qquad \frac{\pi}{3} = \frac{180}{3} = 60º$$

Aunque este ejemplo da como resultado valores enteros, no necesariamente las respuestas a todos los problemas dan de esta manera.

A continuación, se plantea un ejemplo de conversión de sistema radián a sistema sexagesimal

***Ejemplo 2.18**. Pasar a radianes, los siguientes ángulos expresados en grados:*

$$135°, \quad 220°, \quad 45°$$

***Solución**: empleando el factor de conversión se tiene:*

$$135° = 135º\left(\frac{\pi}{180º}\right) = \frac{135°\pi}{180°} = \frac{3\pi}{4}$$

$$220° = 220º\left(\frac{\pi}{180º}\right) = \frac{220°\pi}{180°} = \frac{11\pi}{9}$$

$$45° = 45º\left(\frac{\pi}{180º}\right) = \frac{45°\pi}{180º} = \frac{\pi}{4}$$

Nótese que las conversiones de un sistema al otro se pueden hacer por medio de una regla de tres simple directa.

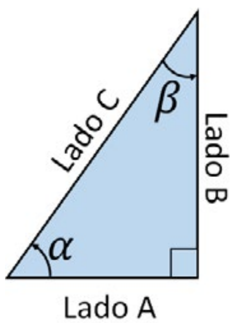


***Figura 2.29**. Lados en un triángulo rectángulo.*

Si se toma el ángulo α como ángulo de medida, entonces

Lado A = Cateto adyacente
Lado B = Cateto opuesto
Lado C = Hipotenusa

Por otra parte, si se toma el ángulo β como ángulo de medida entonces

Lado A = Cateto opuesto
Lado B = Cateto adyacente
Lado C = Hipotenusa

Las Funciones trigonométricas

Hay dos formas de definir las funciones trigonométricas, una es empleando las razones entre dos lados en un triángulo rectángulo, la otra es usando el punto terminal de un segmento que describe una circunferencia en un plano cartesiano. Dado que se pueden tener hasta seis relaciones para un triángulo entonces existen ser relaciones trigonométricas: seno (sen), coseno (cos), tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (csc), las cuales se definen a continuación.

Definición 2.11. Las funciones trigonométricas dado un triángulo rectángulo. *Dado un triángulo rectángulo, donde* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ *entonces:*

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{cat.\,opuesto}{hipotenusa} \qquad \cot\theta = \frac{cat.\,adyacente}{cat.\,opuesto}$$

$$\cos\theta = \frac{cat.\,adyancente}{hipotenusa} \qquad \sec\theta = \frac{hipotenusa}{cat.\,adyacente} \qquad \text{[Ec. 2.10]}$$

$$\tan\theta = \frac{cat.\,opuesto}{Adyacente} \qquad \csc\theta = \frac{hipotenusa}{cat.\,opuesto}$$

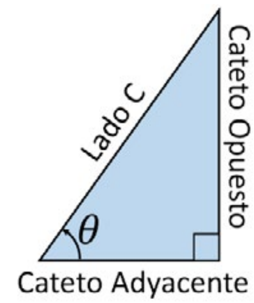


***Figura 2.30**. Triángulo rectángulo para la definición 2.11.*

En los problemas de aplicación normalmente se utilizan las tres primeras relaciones trigonométricas.

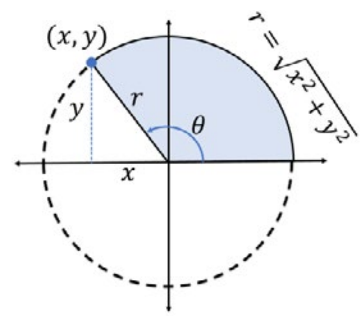


***Figura 2.31**. Circulo trigonométrico para la definición 2.12.*

Definición 2.12. Las funciones trigonométricas circulares. *Dada una circunferencia de radio r, donde θ es cualquier ángulo entonces:*

$$sen\,\theta = \frac{y}{r} \qquad cot\,\theta = \frac{x}{y}$$

$$cos\,\theta = \frac{x}{r} \qquad sec\,\theta = \frac{r}{x} \qquad \text{[Ec. 2.11]}$$

$$tan\,\theta = \frac{y}{x} \qquad csc\,\theta = \frac{r}{y}$$

Estas definiciones son especialmente útiles para resolver problemas que tiene en su contexto triángulos rectángulos

SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO

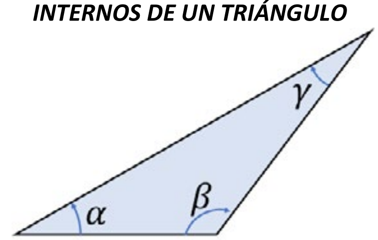


***Figura 2.32**. La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a π o 180°*

$$\alpha + \beta + \gamma = 180$$

Resolución de triángulos rectángulos usando trigonometría

Tal como se expresó anteriormente las funciones trigonométricas tienen un campo de aplicación muy amplio en las matemáticas, en las ingenierías y las tecnologías especialmente, por tanto, la comprensión de los contextos donde se desarrollan facilita la solución de diversos problemas de naturaleza académica o práctica. El siguiente ejemplo pide solucionar un triángulo lo que implica determinar el valor exacto de todos los ángulos y de todos los lados de la figura.

Teorema de Pitágoras

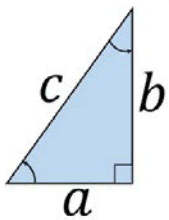


Figura 2.33. *Triángulo rectángulo*

Para un triángulo rectángulo la semisuma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Funciones Trigonométricas inversas

Al igual que las funciones polinomiales, las funciones trigonométricas tiene inversa en regiones específicas de su dominio; a manera de ejemplo considérese la función trigonométrica seno

$$y = \operatorname{sen} x$$

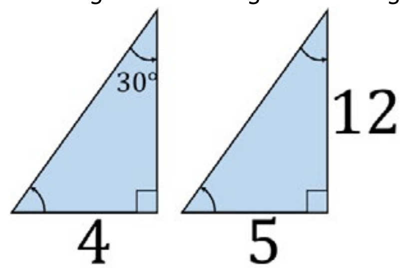
La función inversa del seno es

$$\operatorname{sen}^{-1} y = x$$

Que también se abrevia como arcoseno

$$\operatorname{arcsen} y = x$$

Ejemplo 2.19. *Resolver los siguientes triángulos rectángulos*



(a) (b)

Solución*: para el primer triángulo nótese que se tiene un ángulo y el lado opuesto, renombrando los datos desconocidos se obtiene:*

Dado el ángulo y el lado opuesto, se puede usar la relación seno

$$sen\,30° = \frac{4}{m}$$

Despejando se obtiene

$$m = \frac{4}{sen\,30°} = 8$$

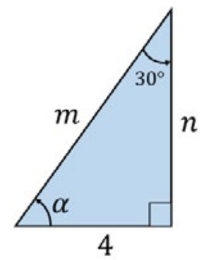


Figura 2.34.

Con los datos que se tienen, existen diversas formas de encontrar el lado restante.

$$cos\,30° = \frac{n}{m}$$

Pero como se conoce a m, despejando a n se obtiene:

$$n = m\,cos\,30 = 8\,cos\,30 = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$$

Finalmente, el ángulo restante se puede obtener por medio de una relación inversa –que se ve en el siguiente problema– o usando el teorema de la suma interna de los ángulos de un triángulo.

$$30° + 90° + \alpha = 180 \qquad \rightarrow \qquad \alpha = 60°$$

B. Renombrando los lados se logra.

La hipotenusa h se puede obtener usando el teorema de Pitágoras.

$$h^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

Por tanto

$$h = \sqrt{169} = 13$$

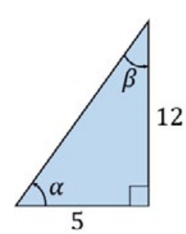


Figura 2.35.

Sin embargo, para los ángulos, se debe usar una relación trigonométrica inversa, que puede ser:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{5}{12} \approx 22{,}62°$$

Finalmente, el ángulo restante se puede obtener por medio de la suma de los ángulos internos:

$$22{,}62° + 90° + \beta = 180 \quad \rightarrow \quad \beta = 67{,}38°$$

Con lo cual el triángulo queda totalmente resuelto

***Ejemplo 2.20**. Desde lo alto de un cerro Pilón de 240 m.s.n.m en la Guajira colombiana, se sitúa un puesto de vigía para monitorear los barcos que pasan frente a la costa. En un determinado día el vigía divisa dos embarcaciones con ángulos de depresión de 15° y 23° respectivamente. Encuentre la distancia entre las dos embarcaciones.*

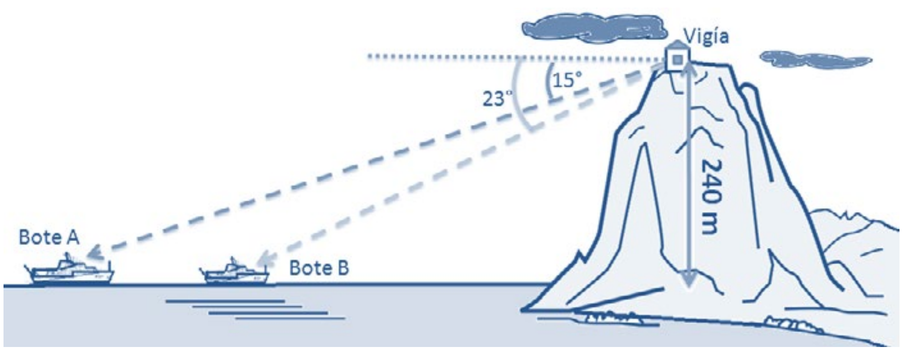


***Figura 2.36.** Gráfico del problema 2.16.*
Imagen adaptada de : https://www.uaeh.edu.mx/docencia

***Tabla 2.3.** Relaciones trigonométricas para ángulos notables*

	30°	45°	60°
Sen	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

	0°	90°	180°	270°
Sen	0	1	0	-1
Cos	1	0	-1	0
Tan	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

***Solución:** como puede apreciarse, existen dos triángulos rectos y sabiendo que los ángulos alternos internos entre líneas paralelas son iguales entonces se tiene la siguiente figura.*

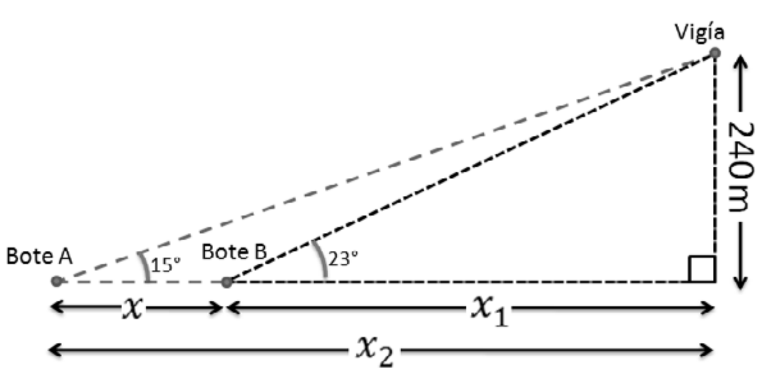


***Figura 2.37**. Interpretación gráfica del problema 2.16.*

Es de interés para el problema encontrar la distancia x que se puede obtener de la expresión

$$x = x_2 - x_1$$

Por tanto, se debe encontrar las distancias x_2 y x_1 y usando la definición 2.11., o 2.12, se tiene

$$\tan 15 = \frac{240}{x_2} \qquad \tan 23 = \frac{240}{x_2}$$

$$x_2 \tan 15 = 240 \qquad x_2 \tan 23 = 240$$

$$x_2 = \frac{240}{\tan 15} \qquad x_2 = \frac{240}{\tan 23}$$

$$x_2 \approx 895{,}69\, m \qquad x_2 \approx 561{,}41\, m$$

La diferencia entre estas dos distancias es la distancia que existe entre los botes

$$x \approx 895{,}69 - 561{,}41 \approx 330{,}29\, m$$

Es un valor aproximado ya que se usa una aproximación a al centésima.

Teoremas Trigonométricos

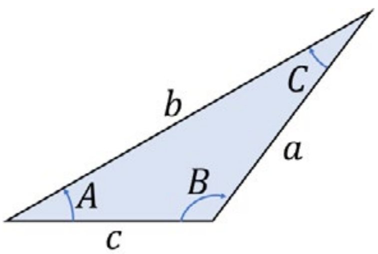


Figura 2.38. *Teoremas Trigonométricos*

Las relaciones trigonométricas en su presentación más simple permiten resolver exclusivamente triángulos rectángulos, para triángulos que no son rectángulos, se deben aplicar dos teoremas a saber:

Teorema 2.6. Teorema del seno: *para todo triángulo se cumple la relación –ver figura 2.38–*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \qquad \text{[Ec. 2.12]}$$

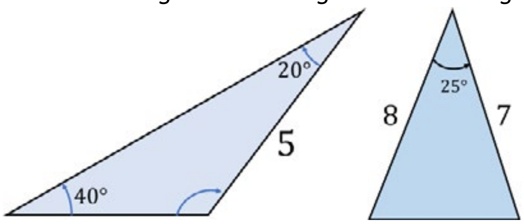
En el teorema se aprecian dos igualdades y según la naturaleza del problema se puede escoger cual igualdad utilizar; por otro lado, en teorema se aplica especialmente cuando se tienen dos ángulos y un lado o cuando se tiene dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Teorema 2.7. Teorema del coseno: *para todo triángulo se cumple la relación:*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned} \qquad \text{[Ec. 2.13]}$$

Una consecuencia de las definiciones anteriores, son las identidades trigonométricas, estas son relaciones entre las diferentes funciones, que son de mucha utilidad al momento de simplificar expresiones o de resolver ecuaciones.

***Ejemplo 2.21**. Resuelva los siguientes triángulos NO rectángulos.*



***Solución**: recordando que solucionar un triángulo implica encontrar el valor de todos los lados y todos los ángulos, para el caso (a) se tienen dos ángulos y un lado siendo viable el teorema del seno.*

$$\frac{5}{sen\,40} = \frac{x}{sen\,20}$$

Despejando

$$\frac{5\,sin\,20}{sin\,40} = x$$

Reduciendo

$$x \approx 2{,}66$$

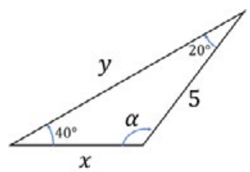


Figura 2.39

Sabiendo que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, el ángulo $\alpha = 120°$ y aplicando de nuevo el teorema del seno –se puede igualmente aplicar el teorema del coseno y se llega al mismo resultado–, se obtiene:

$$\frac{5}{sen\,40} = \frac{y}{sen\,120}$$

Despejando

$$\frac{5\,\text{sen}\,120}{\text{sen}\,40} = x$$

Reduciendo $x \approx 6.73$

Para el segundo triángulo, resulta conveniente usar el teorema del coseno.

$$x^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot cos\,25 \approx 11.49$$

Cuya raíz es $x = 3{,}39$

Para sacar los ángulos internos se puede usar tanto el teorema del coseno despejando, como el teorema del seno, sin embargo, se prefiere este último por la simplicidad al momento de hacer los cálculos

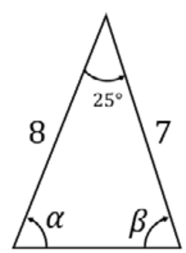


Figura 2.40.

$$\frac{3.39}{\text{sen}\,25} = \frac{7}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{8}{\text{sen}\,\beta}$$

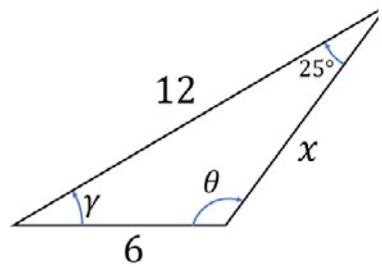
Despejando se obtiene:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{7\,sin\,25}{3{,}39} \qquad \to \qquad \text{sen}\,\alpha \approx 0{,}873$$

Por tanto $\alpha \approx arcsen\,0{,}873 \approx 60{,}77°$

YouTube

Resolver el siguiente triángulo no rectángulo



SOLUCIÓN

Con un procedimiento similar se puede obtener el ángulo que da $\beta = 94.23°$

Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas son relaciones matemáticas de igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas; su importancia radica en el hecho que permite hacer transformaciones de una expresión en otra que explica mejor el comportamiento de un sistema o de un objeto, por otro lado, desarrolla habilidades de pensamiento como análisis y la síntesis entre otras, fundamentales para la comprensión y solución de problemas.

Las identidades se agrupan por funcionalidad tal como se muestra en las siguientes relaciones

Identidades reciprocas

$$cot\,\theta = \frac{1}{tan\,\theta}$$
$$sec\,\theta = \frac{1}{cos\,\theta}$$
$$csc\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta}$$

Identidades de cociente

$$tan\,\theta = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}$$
$$cot\,\theta = \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}$$

Fórmulas de ángulo medio

$$sen^2\,\theta = \frac{1 - cos\,2\,\theta}{2}$$
$$cos^2\,\theta = \frac{1 + cos\,2\,\theta}{2}$$

Identidades pitagóricas

$$sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1$$
$$tan^2\,\theta + 1 = sec^2\,\theta$$
$$1 + cot^2\,\theta = csc^2\,\theta$$

Suma o diferencia de dos ángulos

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta \pm sen\,\beta\,cos\,\alpha$$
$$cos(\alpha \pm \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta \mp sen\,\beta\,sen\,\alpha$$
$$tan(\alpha \pm \beta) = \frac{tan\,\alpha\,tan\,\beta}{1 \mp tan\,\alpha\,tan\,\beta}$$

Reducción

$$sen(-\theta) = -\,sen\,\theta \qquad sen\,\theta = -\,sen(\theta - \pi)$$
$$cos(-\theta) = cos\,\theta \qquad cos\,\theta = -\,cos(\theta - \pi)$$
$$tan(-\theta) = -\,tan\,\theta \qquad tan\,\theta = tan(\theta - \pi)$$

En las identidades trigonométricas se busca demostrar, por medio de procedimientos analíticos que un lado de la ecuación es igual al otro lado, sin trasponer términos de un lado al otro –no porque sea incorrecto sino para poder demostrar la equivalencia–, a continuación, se muestran algunos ejemplos.

Ejemplo 2.22. *Demuestre la siguiente identidad:*

$$\frac{1 + sec\,\alpha}{1 - sec\,\alpha} = \frac{cos\,\alpha + 1}{cos\,\alpha - 1}$$

Solución*: una recomendación que frecuentemente resulta útil es llevar todas las funciones a términos de senos y coseno. Por tanto, usando las identidades recíprocas se tiene:*

$$\frac{1+\dfrac{1}{\cos\alpha}}{1-\dfrac{1}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha-1}$$

Sumando las fracciones se llega a:

$$\frac{\dfrac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha-1}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha-1}$$

Aplicando la ley de extremos y medios se obtiene:

$$\frac{(\cos\alpha+1)\cos\alpha}{(\cos\alpha-1)\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha-1}$$

Cancelando los factores en el numerador y denominador se obtiene

$$\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha-1}=\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha-1}$$

Que es una igualdad y comprueba la identidad.

Ejemplo 2.23*. Demuestre la siguiente identidad.*

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta}=\cot\theta$$

Solución*: organizando el denominador se obtiene:*

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\cos\theta}{(1-\cos^2\theta)-\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta}=\cot\theta$$

Aplicando una de las identidades trigonométricas

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta-\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta}=\cot\theta$$

Reduciendo

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\cos\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta-\operatorname{sen}\theta}=\cot\theta$$

Factorizando

$$\frac{\cos\theta\,(2\operatorname{sen}\theta-1)}{\operatorname{sen}\theta\,(2\operatorname{sen}\theta-1)}=\cot\theta$$

Cancelando los paréntesis se comprueba finalmente la identidad

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\cot\theta$$

Que corresponde a igualdad

Acertijo

Imagen tomada de : https://clipart-library.com/

1. Un oso camina 10 km hacia el sur, luego, 10 kilómetros hacia el oeste, finalmente otros 10 km hacia el norte. ¿De qué color es el oso?

Ingenio.

Imagen adaptada de : https://pixabay.com/es

2. De un solo trazo recto, tache dos cifras y deje cortado el reloj en dos partes, tal que manera que la suma de los números de un lado de igual que la suma de los del otro.

Solución de ecuaciones trigonométricas.

Resolver o solucionar una ecuación, es encontrar todos los valores que vuelven cierta una expresión; en el caso de las funciones trigonométricas, se debe prestar mayor atención puesto que por lo general, se involucran diversas funciones.

Estrategia para resolver una ecuación trigonométrica.

1. *Identificar muy bien la variable de interés.*
2. *Cuando existan más de un tipo de función trigonométrica, escoger una sola y transformar las demás funciones en la función escogida; para eso se pueden usar las identidades.*
3. *Simplificar la expresión, reduciéndola al máximo posible.*
4. *Resolver la ecuación, teniendo en cuenta soluciones en otros cuadrantes.*
5. *Probar cada una de las soluciones en la ecuación original para analizar si son consistentes.*

Ejemplo 2.24. *Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica.*

$$cos^2\theta + sen\,\theta = 1$$

Solución*: De las identidades pitagóricas se lleva la expresión a términos de senos.*

$$1 - sen^2\theta + sen\,\theta = 1$$

Reduciendo esta expresión se llega:

$$-sen^2\theta + sen\,\theta = 0$$

Al factorizar:

$$sen\,\theta\,(-sen\,\theta + 1) = 0$$

Con lo cual se tienen factores igualados a cero, lo que implica que para que la ecuación sea cierta, cada factor, o todos, tienen que ser cero, así:

$$sen\,\theta = 0,$$

Lo cual es cierto para:

$$\theta = 0 \text{ y } \theta = \pi$$

El segundo factor también se iguala a cero, lo cual lleva a:

$$-sen\,\theta + 1 = 0 \;\rightarrow\; sen\,\theta = 1$$

Esta última expresión es cierta para:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Finalmente, la ecuación tiene tres soluciones en el intervalo de [0,2π)

$$\theta = 0, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta = \pi$$

Ejemplo 2.25. *Resolver la siguiente ecuación trigonométrica.*

$$3\,tan\,x = 2\,cos\,x$$

Solución*: llevando todos los términos a senos y cosenos se tiene:*

$$\frac{3\,sen\,x}{cos\,x} = 2\,cos\,x$$

Despejando

$$3\,sen\,x = 2\,cos^2 x$$

Usando las identidades trigonométricas se obtiene

$$3\,sen\,x = 2(1 - sen^2 x)$$

Reorganizando se obtiene:

$$2\,sen^2 x + 3\,sen\,x - 2 = 0$$

Esta ecuación se puede resolver tanto factorizando como utilizando la fórmula general cuadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0 \;\; \rightarrow \;\; 2\,sen^2 x + 3\,sen\,x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \;\; \rightrightarrows \;\; sin\,x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-2)}}{4}$$

$$sen\,x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

Lo que lleva a plantear dos soluciones posibles

$$sen\,x = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

Como la función seno nunca es mayor a 1 o menor a –1, esta respuesta no tiene solución

$$sen\,x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia:

$$x = arcsen\frac{1}{2}$$

Tiene dos soluciones a saber: $x = 30°$ *o* $x = 150°$

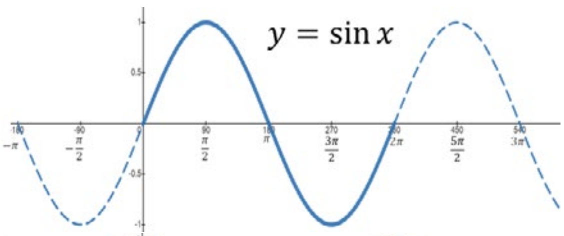
Resolver la siguiente ecuación trigonométrica.

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

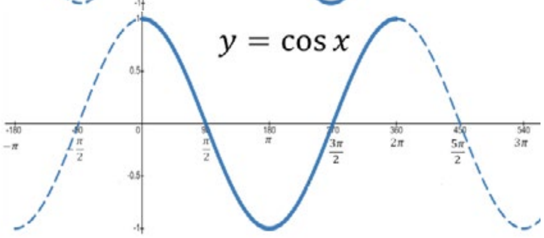
SOLUCIÓN

Gráficas de las funciones trigonométricas

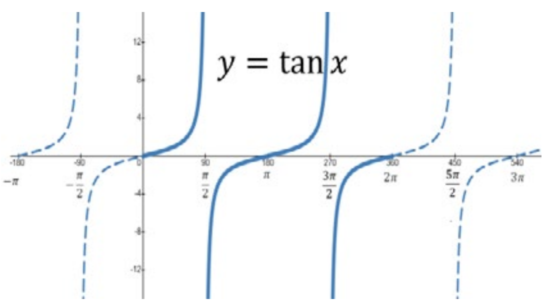
Se dice que una función es periódica si se repite cada cierto momento, es decir, tiene las mismas características en determinadas partes de su dominio. Las funciones trigonométricas tienen una particularidad, y es que son periódicas; la función seno, coseno, secante y cosecante tienen como periodo 2π, mientras que las funciones tangente y cotangente tiene como periodo π. A continuación, se muestran las gráficas de las seis funciones trigonométricas.



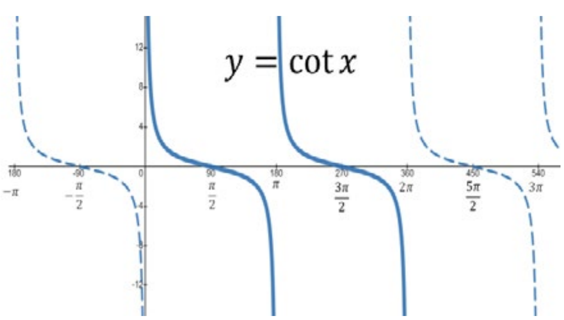
Función seno
Continua
Oscilante
Dominio: $\mathbb{R}$
Rango: $[-1,1]$
Periodo: 2π



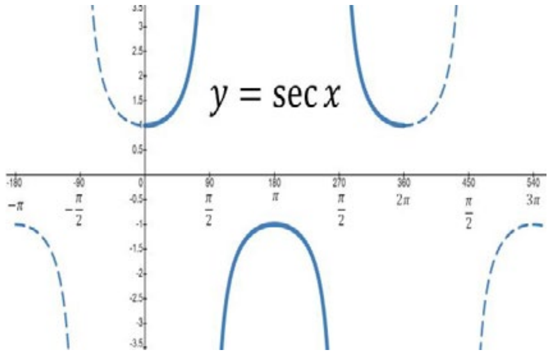
Función coseno
Continua
Oscilante
Dominio: $\mathbb{R}$
Rango: [-1,1]
Periodo: 2π



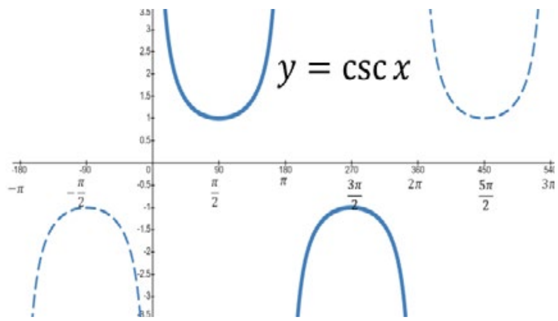
Función tangente
Discontinua
Creciente
Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$
Rango: $\mathbb{R}$
Periodo: π



Función cotangente
Discontinua
Creciente
Dominio: $\mathbb{R} - \{\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}\}$
Rango: R
Periodo: π



Función Secante
Discontinua
Oscilante
Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$
Rango: $\mathbb{R} - (-1{,}1)$
Periodo: 2π



Función Cosecante
Continua
Oscilante
Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$
Rango: $\mathbb{R} - (-1{,}1)$
Periodo: 2π

***Figura 2.41**. Gráficas de las seis funciones trigonométricas.*

Las gráficas mostradas en la figura 2.41., son las formas de las curvas más generales cuando las funciones son simples. Cuando aparecen constantes numéricas en las expresiones, es posible que cambien las amplitudes o las longitudes, sin embargo, las formas de las curvas se conservan, de ahí la importancia de estudiar el comportamiento de las seis funciones trigonométricas.

***Ejemplo 2.26**. Analizar el comportamiento de las funciones.*

$$f(x) = sin\,x \qquad\qquad f(x) = sin\,2x$$

***Solución**: graficando estas funciones se obtiene.*

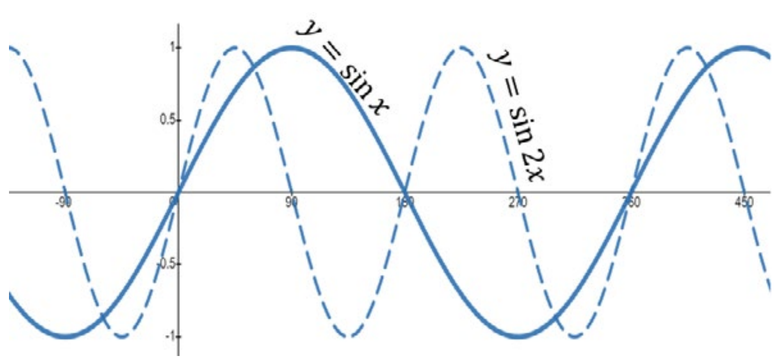


***Figura 2.42**. Gráfica del ejercicio 2.22.*

Se aprecia que entre más grande sea el factor del argumento –parte interna de la función que en algunas disciplinas recibe el nombre de frecuencia angular–, más oscilaciones da la misma.

Ejemplo 2.27. *Analizar el comportamiento de las funciones:*

$$f(x) = sen\, x \qquad f(x) = 2\, sen\, x$$

Solución: *Graficando estas funciones se obtienen.*

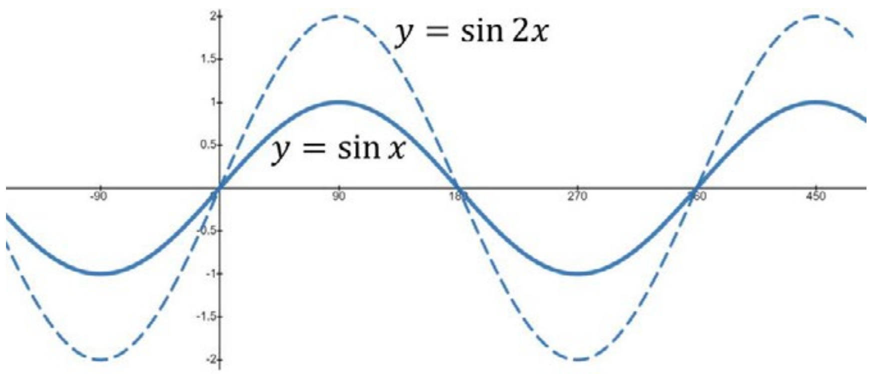


Figura 2.43. *Gráfica del ejercicio 2.24.*

Como conclusión, al multiplicar por una constante la función aumenta su rango o amplitud;

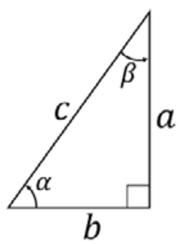
Ejercicios sección 2.4. Funciones y ecuaciones trigonométricas.

Exprese en radianes, cada uno de los siguientes ángulos

1. θ = 25°
2. θ = 72°
3. θ = 24°
4. θ = 225°
5. θ = 330°
6. θ = 150°
7. θ = 180°
8. θ = 45°
9. θ = 200°

Exprese en grados cada uno de los siguientes ángulos.

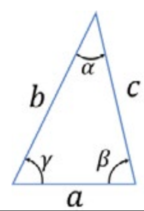
10. $\theta = \frac{3\pi}{2}$
11. $\theta = \frac{2\pi}{3}$
12. $\theta = \frac{4\pi}{3}$
13. $\theta = \frac{6\pi}{5}$
14. $\theta = \frac{\pi}{2}$
15. $\theta = \frac{8\pi}{3}$
16. $\theta = \frac{\pi}{3}$
17. $\theta = \frac{\pi}{4}$
18. $\theta = \frac{7\pi}{5}$



Para cada situación, encuentre los datos faltantes de tabla que se muestra a continuación. Recuerde que la imagen no está a escala y tampoco es proporcionada con los valores de cada punto.

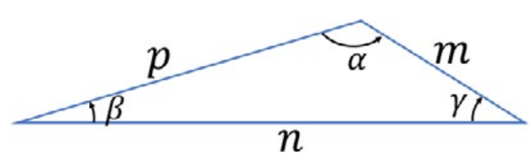
	a	b	c	α	β
19	1			45°	
20	3			30°	
21.	6			37°	
22.		5			45°
23.		9			20°
24			12		
25			40	40°	
26			48	38°	
27.	6				35°
28.	9				23°
29.		50		40°	
30.		16		53°	
31.			12		70°
32.			28		30°
33.	12	16			
34.	10	15			
35.		12	18		
36.		20	36		
37.	24		28		
38.	16		20		

Los triángulos que se muestran a continuación no son rectángulos. Con los datos indicados, encuentre el valor de todos los lados y de todos los ángulos. Recuerde que la imagen no está a escala y tampoco es proporcionada con los valores de cada punto.



	a	b	c	α	β	γ
39.	1	1		50°		
40.	7	6		75°		
41.	12	11			60°	
42.	40	50				80°
43.		12	14	70°		
44.		8	7		74°	
45.		10	12			65°

Los triángulos que se muestran a continuación no son rectángulos. Con los datos indicados, encuentre el valor de todos los lados y de todos los ángulos. Recuerde que la imagen no está a escala y tampoco es proporcionada con los valores de cada punto.



	m	n	p	α	β	γ
46.	8	12		100°		
47.	8	14		120°		
48.	12	20			18°	
49.	4	7				20°
50.		300	280	140°		
51.		12	8			24°
52.		12	10		16	

Compruebe de forma analítica las siguientes identidades trigonométricas

53. $\cos\theta\tan\theta = \sin\theta$
54. $1+\sin\theta = \dfrac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$
55. $\sin\theta = \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$
56. $\dfrac{\sec\theta - 1}{\sec^2\theta} = \sin\theta$
57. $\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta+\cot\theta} = \sin\theta$
58. $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$
59. $\sec\theta+\tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$
60. $2\tan\theta+\cos\theta = \dfrac{\cos^2\theta+2\sin\theta}{\cos\theta}$
61. $\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta} = -\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$
62. $\dfrac{1}{\tan\theta}+\dfrac{1}{\cot\theta} = \tan\theta+\cot\theta$
63. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$
64. $(\tan^2\theta+1)(1-\cos^2\theta) = \tan^2\theta$
65. $\dfrac{\tan\theta-\sin\theta}{\sin^3\theta} = \dfrac{\sec\theta}{1+\cos\theta}$
66. $2\sin^2\theta - 1 = sin^4\theta - cos^4\theta$
67. $\cot^2\theta\,(1+\tan^2\theta) = \csc^2\theta$

Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas

68. $\sin x - cos\, x = 0$
69. $sen^2\theta + cos\,\theta - 1 = 0$
70. $\csc x = \sec x$
71. $\sin x - \sqrt{2} = -\sin x$
72. $cos^2\,\theta + cos\,\theta = \dfrac{1}{2}$
73. $sen\,x + cos\,2\,x = 1$
74. $cos^2 x - sen^2 x = \dfrac{1}{2}$
75. $\cos x - \sin x = 1$
76. $sen\,x - 2\,cos\,2\,x = -\dfrac{1}{2}$
77. $tan\,2\,\theta = -\,tan\,\theta$
78. $cos\,2\,x + 5\,cos\,x + 3 = 0$
79. $cos\dfrac{\theta}{2} - cos\,\theta = 1$
80. $\cos x + 2\sin^2 x = 1$
81. $2\cos^2 x = 3 - 3\sin x$
82. $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}$
83. $4\,sen^2x\,tan\,x - 4\,sen^2x - 3\,tan\,x + 3 = 0$
84. $4\,sen(x-30)\,cos(x-30) = \sqrt{3}$
85. $2\sin^2 x = 2 + \cos x$
86. $\tan^2 x + 4\tan x - 4 = 0$
87. $4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$

Realice sobre un mismo plano, las gráficas de las funciones que se muestran a continuación, posteriormente analice el comportamiento de cada una y concluya las variaciones que se obtienen cuando se cambian los parámetros.

88. $\begin{cases} y = sen\,x \\ y = sen\,2\,x \\ y = sen\,3\,x \end{cases}$

89. $\begin{cases} y = 0.5\,sen\,x \\ y = sen\,x \\ y = 2\,sen\,x \end{cases}$

90. $\begin{cases} y = -\,cos\,x \\ y = cos\,x \end{cases}$

91. $\begin{cases} y = cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \\ y = cos\,x \\ y = cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$

92. $\begin{cases} y = sen\,x \\ y = sen(-x) \end{cases}$

93. $\begin{cases} y = cos\,x \\ y = cos(-x) \end{cases}$

Problemas de aplicación

A continuación, usted va a encontrar una serie de situaciones problema en diversas áreas del conocimiento (ciencias sociales, ciencias humanas, ciencias aplicadas), las cuales debe interpretar, modelar y resolver para dar cuenta de la solución. Ilustre y explique claramente los modelos propuestos, identificando las variables utilizadas, explicando también la estrategia de solución y la calidad de la solución encontrada

94. El Big Ben es gran campana del reloj situado Palacio de Westminster en Londres, sede del Parlamento del Reino Unido. Un observador se encuentra a 55 metros de la base central de la cúpula del reloj y observa la punta del palacio con ángulo de elevación de 60° tal como muestra la figura.

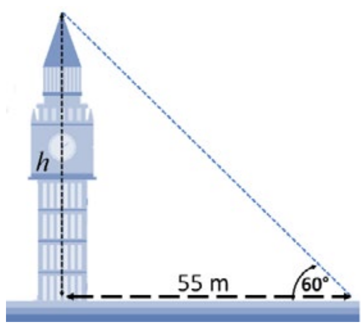


Imagen adaptada de : https://brainly.lat

Determine la altura del punto más alto de la torre del reloj.

95. La Torre Eiffel es un monumento de hierro pudelado, diseñada inicialmente por los ingenieros civiles Koechlin y Nouguier y construida, tras su rediseño por el ingeniero civil francés Alexandre Gustave Eiffel y sus colaboradores para la Exposición Universal de 1889 en París.

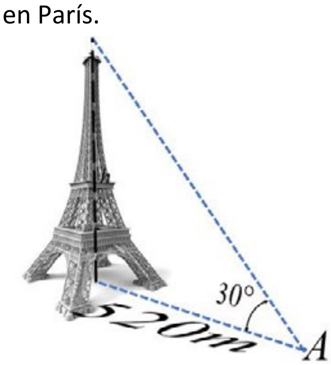
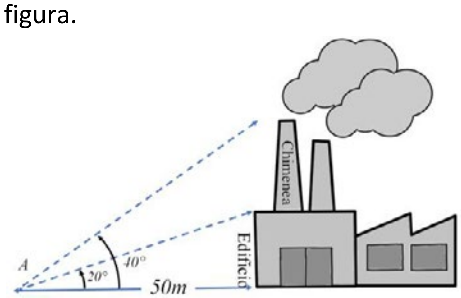


Imagen adaptada de :
https://recursoslibres.reformamatematica.net/

Una persona se encuentra a 520 metros del punto central exactamente debajo de la torre, y observa desde A, el punto más alto de la misma con un ángulo de elevación de 30°. Dada esta configuración determine –El dibujo no está a escala y corresponde a una proyección oblicua–:

A. La altura de la torre.
B. Otra persona situada a 400 metros del punto central de la base de la torre, con qué ángulo vería el punto más alto de la torre.

96. Una persona situada en el punto A, a 50 metros lineales de la estructura de una fábrica, nota el punto superior del edificio con un ángulo de elevación de 20° y el punto más alto sobre la chimenea, con un ángulo de elevación de 40° tal como se aprecia en la figura.



Determine de forma analítica:

a. La altura del edificio
b. La altura de la chimenea

97. El piloto de un avión comercial que vuela a 3000 m de altura divisa el centro de dos ciudades perfectamente alineadas con ángulos de depreciación de 50° y 35° respectivamente tal como muestra la figura.

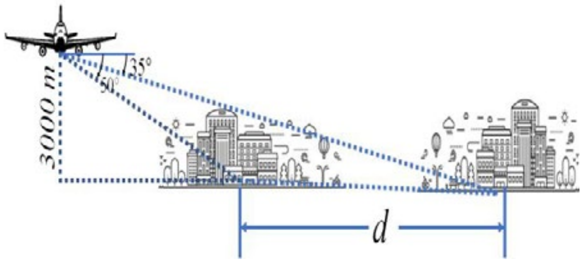
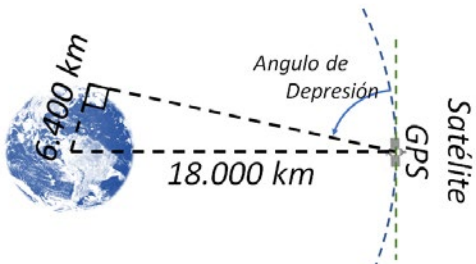


Imagen adaptada de : https://espanol.libretexts.org/

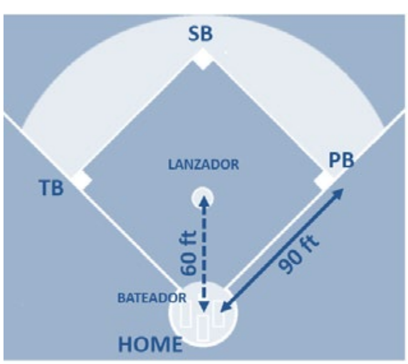
Dada la configuración determine la distancia que hay entre los centros de las dos ciudades.

98. Un satélite GPS –Sistema de Posicionamiento Global–gira alrededor de la Tierra en una órbita estable de 18.000 km del centro, tal como muestra la figura (no está a escala).



Dada la anterior representación geométrica, encuentre el ángulo de depresión con que está girando el satélite GPS.

99. Un juego de béisbol se juega en una cancha, con un campo interior formado por un cuadrado de 90 pies de lado, tal como muestra la figura. El lanzador se ubica en el montículo el cual está sobre la línea que une el bateador y la segunda base a 60 pies del bateador –pero no está en la mitad de esa distancia–.



Encuentre la distancia en pies, a la cual está el lanzador de cada una de las bases y el ángulo de los triángulos internos que se forman entre el bateador y las cuatro esquinas para este juego popular en los Estados Unidos.

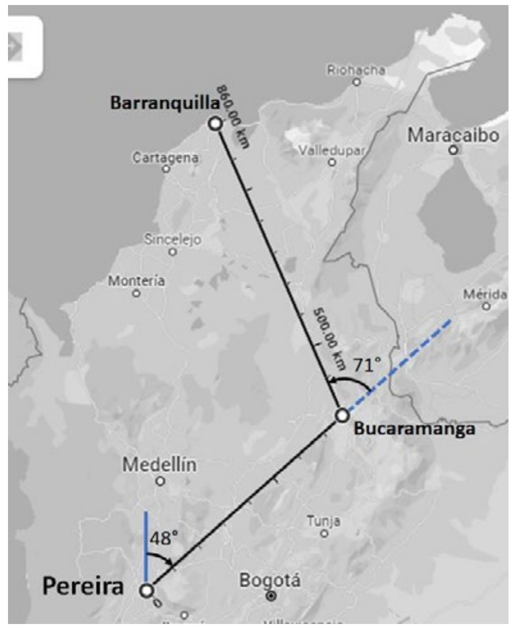


Imagen adaptada de : https://es.wikipedia.org/

100. Un avión que sale de Pereira, vuela directamente a la ciudad de Bucaramanga que está a una distancia de 390 km lineales con una dirección de 48° norte-este, posteriormente cuando el avión llega a Bucaramanga, gira a su izquierda 71° con respecto a su dirección inicial para dirigirse directamente a la ciudad de Barranquilla que se encuentra a 470 km en dirección norte-oeste, tal como muestra la figura.

Encuentre la distancia lineal y la dirección con respecto al norte en la que debe volar un avión, si desea ir directamente desde la ciudad de Pereira hasta la ciudad de Barranquilla. (El dibujo no está a escala ni es proporcional)

SECCIÓN 2.5 FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

En el campo de las Ciencias Económicas y Administrativas, es muy frecuente plantear soluciones a situaciones de tipo económico y de producción, donde se tiene que recurrir a modelos matemáticos que involucren variables independientes en los exponentes –tal es el caso del interés continuo o compuesto, donde los periodos de tiempo son una variable exponencial–, en ingeniería también es muy frecuente esta situación –mitigación de campos, caída de intensidades eléctricas o sonoras– de ahí la importancia de analizar el comportamiento tanto de la función exponencial como de la función logarítmica.

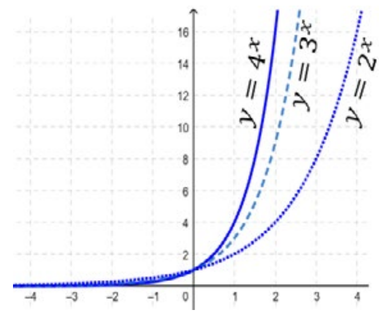


Figura 2.44. *Varias funciones exponenciales.*

Nótese que a medida que la base se va volviendo más grande, la función crece más rápido.

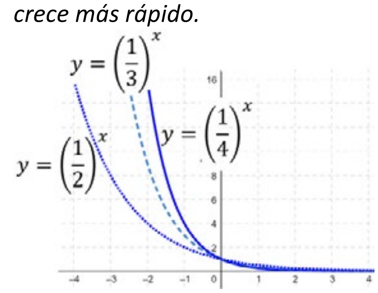


Figura 2.45. *Varias funciones exponenciales.*

¿Qué puede concluir del comportamiento de estas funciones exponenciales, cuando la base está entre cero y uno?

YouTube
Resolver la siguiente ecuación

$$2^{x+5} - 2^{x+3} - 2^{x+1} = 88$$

SOLUCIÓN

Función exponencial

La función exponencial es de la forma $y = f(x) = a^x$, donde a es un número positivo que recibe el nombre de base. El exponente es la variable independiente. Esta expresión es muy diferente al concepto de potenciación pues es la variable la que se eleva a una potencia conocida.

> ***Definición 2.13. Función exponencial****: toda función de la forma:*
>
> $$f(x) = a^x \quad \text{[Ec. 2.14]}$$
>
> *Con $a > 0$ y $a \neq 1$ es una función exponencial.*

La figura 2.44., muestra la representación gráfica de la función exponencial canónica.

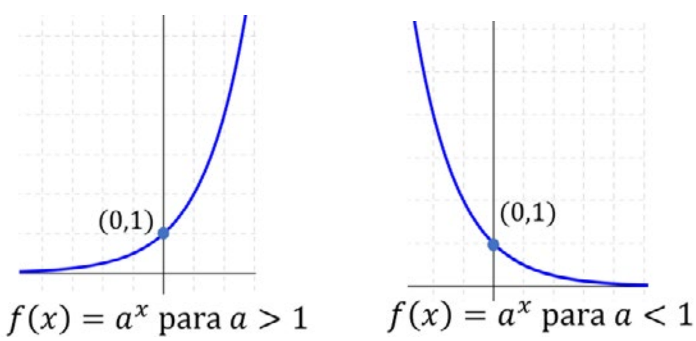


Figura 2.46. *Gráficas de la función exponencial.*

Nótese en la figura que la función exponencial como se define inicialmente siempre corta el eje de las ordenadas en (0,1), por otro lado, y=0 es una asíntota horizontal, lo que significa que nunca corta al eje –X–. El dominio de la función exponencial y el rango son respectivamente.

La Identidad de Euler.

Una de las curiosidades de la matemática, es la identidad de Euler relaciona perfectamente las cuatro constantes más importantes del cálculo.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Y aún se discuten algunas propiedades del número Neperiano.

Aunque el número –e– no se puede obtener de forma exacta con ninguna expresión algebraica, si existe una relación que obtiene de forma aproximada el número, esta se muestra a continuación:

Tabla 2.4. *Número de Neper*

N	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2,000000000
10	2,593742460
100	2,704813829
1000	2,716923932
10000	2,718145927
100000	2,718268237
1000000	2,718280469
10000000	2,718281694
100000000	2,718281786
1000000000	2,718282031

Nótese que entre más grande sea el orden en la tabla, más se aproxima la relación a la constante neperiana.

$$Df = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$
$$Rf = \mathbb{R}^{+} = (0, +\infty)$$

Teorema 2.8. Propiedades de los exponentes: *Sea a y b dos números reales positivos mayores que cero y n y m dos números enteros, que cumplen con las siguientes propiedades:*

Exponente cero	$a^0 = 1$	
Producto	$a^m a^n = a^{m+n}$	
Cociente	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	
Potencia	$(a^m)^n = a^{mn}$	
Raíz	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	
Distributiva del producto	$(ab)^m = a^m b^m$	[Ec. 2.15]
Distributiva del cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	
Invertida	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	
Invertida	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$	

Estas propiedades son ampliamente utilizadas en la reducción y solución de problemas que involucren cantidades con potencias o cantidades exponenciales.

Función exponencial natural

En la matemática, existen números muy importantes con los cuales se definen otras propiedades o cantidades, entre ellos están el $0, 1, \pi$ y el número imaginario $-i-$ y ahora se introduce otro número importante, el número e, conocido como número de Euler o también como constante neperiana. Este número curiosamente aparece frecuentemente en muchos fenómenos naturales, sirve para explicar y predecir el comportamiento de algunos sistemas eléctricos, electrónicos y mecánicos, también aparece en fenómenos sociales como el crecimiento de poblaciones, en fenómenos económicos, por citar tan solo algunos y de ahí la importancia de su estudio en el cálculo. Por otro lado, el número $-e-$ como el número $-\pi-$ son números trascendentales, es decir, no pueden obtener por la resolución de una ecuación algebraica y su valor exacto no puede expresarse como un número finito de cifras decimales o con decimales periódicos, por lo tanto, solamente se puede trabajar con valores aproximados.

$$e \approx 2{,}71828182845904523536$$

Aunque en primera instancia, resulte aparentemente más sencillo trabajar con exponentes de base 10, en muchas aplicaciones reales es más práctico usar directamente el número neperiano.

Definición 2.14. Función exponencial natural*: dada la función de la forma:*

$$f(x) = e^x \qquad \text{[Ec. 2.16]}$$

Recibe el nombre de función exponencial natural, la cual tiene como base el número neperiano.

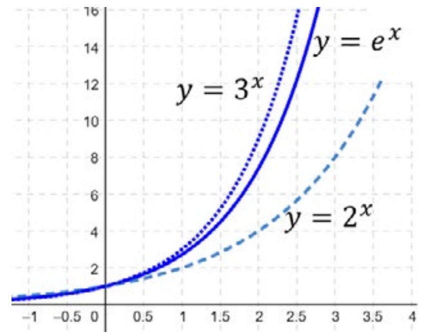


Figura 2.47. *Comparación de la función exponencial natural con otras funciones exponenciales.*

Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de la función exponencial natural se encuentra entre las gráficas $y = 2x$ y la gráfica $y = 3x$. La figura 2.45., ilustra esta situación.

Interés.

El interés es un concepto financiero que expresar el costo de usar dinero o el beneficio de prestarlo durante cierto tiempo. Si un monto de dinero P denominado capital, se invierte a una tasa de **interés simple** r, al final del plazo, el dinero se ha transformado en:

$$A = P(1 + r) \qquad \text{[Ec. 2.17]}$$

Si esos intereses no se retiran, sino que se invierten de nuevo al capital, durante un número seguido de n periodos de tiempo, entonces lo que se obtiene producto de ese **interés compuesto** es:

$$A = P(1 + r)^n \qquad \text{[Ec. 2.18]}$$

Ahora, en un contexto más real y práctico, supóngase que ese interés se calcula n veces en un año, entonces en cada periodo la tasa de interés es $\frac{r}{n}$ y existen n periodos en t años, lo cual permite obtener una expresión para el monto de capital después de t años –esta expresión es conocida como la tasa de interés anual nominal–.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad \text{[Ec. 2.19]}$$

Que es por lo general, la estrategia financiera aplicada por bancos y demás entidades.

Ejemplo 2.28*. Una persona hace un préstamo de 20 millones en un banco que le ofrece un interés de 12% anual, encuentre el costo final que debe pagar este usuario si el interés se lo liquidan anual, semestral, trimestral, mensual y diariamente.*

Solución*: La tabla 2.5., muestra los resultados de las operaciones*

Tabla 2.5. *Capital invertido después de N periodos de tiempo.*

Periodos de Composición	N	Monto después de 10 años
Anual	1	$20\left(1+\frac{0,12}{1}\right)^{1(10)} = \$62.116.964$
Semestral	2	$20\left(1+\frac{0,12}{2}\right)^{2(10)} = \$64.142.709$
Trimestral	4	$20\left(1+\frac{0,12}{4}\right)^{4(10)} = \$65.240.756$
Mensual	12	$20\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{12(10)} = \$66.007.737$
Diario	365	$20\left(1+\frac{0,12}{4}\right)^{4(10)} = \$66.389.244$

Nótese que la expresión con la que se calcula el interés compuesto es muy similar a la expresión con que se obtiene el número neperiano, y de esta forma es posible definir una expresión para el **interés continuamente compuesto**.

$$A = Pe^{rt} \qquad \text{[Ec. 2.20]}$$

Donde A es el capital al final de los periodos de tiempo, r el interés en el periodo de tiempo y t los periodos de tiempo.

Ejemplo 2.29. *Con los datos de problema anterior, determine el monto de dinero, pero usando un interés continuamente compuesto:*

Solución: *aplicando la expresión anterior, se obtiene:*

$$A = Pe^{rt} = 20e^{0,12\cdot 10 años} = \$66.402.338$$

Que corresponde al monto de dinero con un interés calculado cada instante de tiempo.

Tabla 2.6. *Comportamiento en valores de la función logaritmo decimal*

x	x	$Log_{10}x$
10^{-3}	0,001	-3
10^{-2}	0,01	-2
10^{-1}	0,1	-1
10^{0}	1	0
10^{1}	10	1
10^{2}	100	2
10^{3}	1000	3

Función logarítmica

Las funciones exponenciales vistas anteriormente son funciones inyectivas o uno a uno y en consecuencia es posible obtener su función inversa, así, la función inversa de la exponencial es la función logarítmica. Supóngase que se tiene $y = 2^x$, cuando $x = 3$, reemplazando $y = 8$, es decir $8 = 2^3$, ahora supóngase que se quiere hallar el exponente, teniéndose el número, lo que en términos matemáticos implica plantear que

$$2^x = 8$$

Fácilmente se puede resolver esta expresión, pero situaciones más complejas precisan definir una operación que permita realizar los cálculos; esta es la tarea de los logaritmos

Definición 2.15. Función logarítmica: sea a un número positivo con $a \neq 1$. *La función logaritmo con base a, denotada por $log_a x$ se define como:*

$$log_a x = y \quad \leftrightarrow \quad a^y = x$$

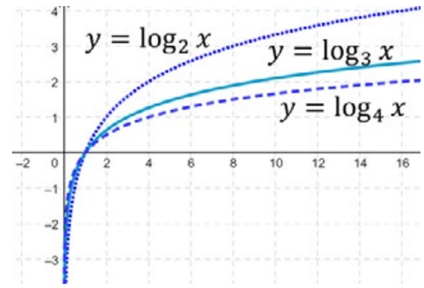


***Figura 2.48**. Varias curvas para la función logaritmo.*

La gráfica muestra que entre mayor sea la base del logaritmo, la función tiende a ser cada vez más horizontal. Otra particularidad es que, en la forma estándar, un logaritmo no corta al eje Y y corta al eje X en (1,0).

Lo anterior, es equivalente a decir que el logaritmo de un número corresponde al exponente al cual debe elevarse una base, para obtener el número.

***Ejemplo 2.30**. Obtener los siguientes logaritmos.*

a. $log_2 1.024$
b. $log_3 243$
c. $log_5 125$
d. $log_{10} 1.000.000$

***Solución:** expresando cada número como una potencia, es posible reducir estas cantidades:*

a. $log_2 1.024 \rightarrow 2^x = 1024 \rightarrow 2^x = 2^{10} \rightarrow x = 10$

b. $log_3 243 \rightarrow 3^x = 243 \rightarrow 3^x = 3^5 \rightarrow x = 5$

c. $log_5 125 \rightarrow 5^x = 125 \rightarrow 5^x = 5^3 \rightarrow x = 3$

d. $log_{10} 1.000.000 \rightarrow 10^x = 1.000.000 \rightarrow 10^x = 10^6 \rightarrow x = 6$

Recordando que la función logarítmica es la función inversa a la función exponencial, es posible obtener una gráfica. La figura 2.49., muestra la situación.

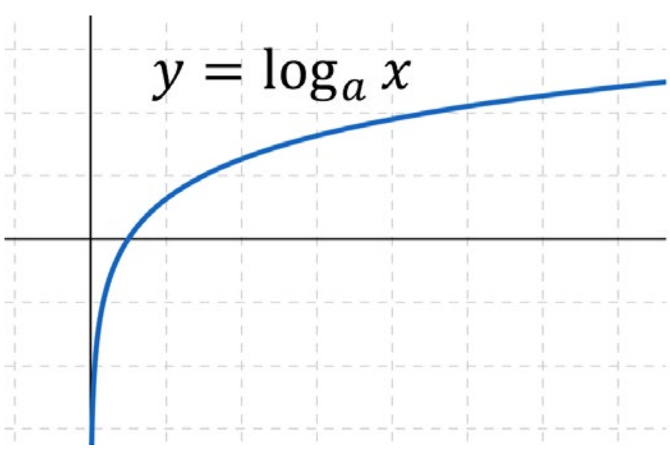


***Figura 2.49.** Curva característica para $f(x) = log_a x$ para a > 1*

Errores comunes que se cometen en matemáticas

Es frecuente encontrar errores que se cometen con las propiedades de los exponentes y de los logaritmos, razón por la cual se invita al lector a ser muy cuidadoso al momento de aplicarlas y tener en cuenta que:

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

$$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

$$log(ab) \neq log\, a\, log\, b$$

$$log(a \pm b) \neq log\, a \pm log\, b$$

$$log\left(\frac{a}{b}\right) \neq \frac{log\, a}{log\, b}$$

Igual aplica para las funciones trigonométricas

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

$$\frac{ab}{c} \neq \frac{a}{c}\frac{b}{c}$$

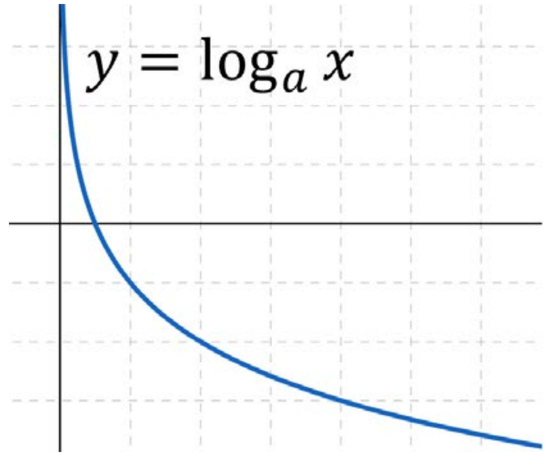


Figura 2.50. *Curva característica para* $f(x) = log_a\, x$ *para 0 < a < 1*

Nótese en la figura que la función logarítmica como se define en primera instancia siempre corta el eje de las abscisas en $(1,0)$, pero este varía si el argumento se le adicionan constantes, por otro lado, para la función mostrada en la figura 2.48., $x = 0$ es una asíntota vertical, lo que implica que nunca corta al eje –Y–; así el dominio de la función exponencial y el rango son respectivamente.

$$Df = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty) \qquad\qquad Rf = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Contrario como se había definido para la función exponencial.

Teorema 2.9. Propiedades de los logaritmos: *sean a y b números reales positivos diferentes de cero y n un número entero positivo, las siguientes son propiedades para los logaritmos:*

1. Log de una multiplicación	$log_a(xy) = log_a\, x + log_a\, y$
2. Log de un cociente	$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a\, x - log_a\, y$
3. Log de una potencia	$log_a(x^n) = n\, log_a\, x$
4. Log de un radical	$log_a \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} log_a\, x$
5. Inv de la base	$log_{\frac{a}{b}}\, x = -\, log_{\frac{b}{a}}\, x$
6. Inv de la base	$log_{\frac{1}{a}}\, x = -\, log_a\, x$

Otras Identidades con logaritmos

7. Logaritmo de 1	$log_a\, 1 = 0$
8. Igual base y número	$log_a\, a = 1$
9. Exp de un logaritmo	$a^{log_a x} = x$
10.Log de iguales bases	$log_a\, a^x = x$
11. Cambio de base	$log_a\, x = \frac{log_b\, x}{log_b\, a}$
12. Cambio de base	$log_a\, x = \frac{1}{log_x\, a}$
13. Cambio de base	$log_{a^n}\, x = \frac{1}{n} log_a\, x$
14. Cambio de base	$a^{log_b c} = c^{log_b a}$

Los logaritmos pueden tener cualquier base que sea positiva y diferente de 1, sin embargo, es común emplear dos bases, una es la base decimal y la otra es la base neperiana. Las calculadoras científicas modernas, traen incorporadas en sus funciones ambos tipos de logaritmos, lo que simplifica mucho las operaciones.

El logaritmo con base 10, se le conoce como logaritmo común o logaritmo decimal y se denota omitiendo las bases:

$$log_{10} x = log\, x$$

Cuando un logaritmo no tiene base, se supone inmediatamente que es un logaritmo común o decimal. La otra clase de logaritmo, que aparece con gran recurrencia en las situaciones reales, es el logaritmo de base –e–, conocido como logaritmo natural y se denota por –ln–.

$$log_e x = ln\, x$$

Las calculadoras científicas por lo general traen la operación logaritmo natural como segunda función de la tecla logaritmo decimal.

Ejemplo 2.31. *Una muestra de 10 miligramos de polonio radiactivo decrece de acuerdo con el siguiente modelo matemático:*

$$Q(t) = Q_0 e^{-0{,}00502t}$$

Donde $Q(t)$ es la cantidad de masa presente después de t días, Q_0 es la masa inicial de la muestra y t el tiempo transcurrido. Dada una muestra de 10 mg, determine la cantidad presente de dicho material 120 días después.

Solución: *Para determinar la cantidad presente de material en un instante de tiempo cualquiera, es suficiente reemplazar las cantidades en la ecuación dada*

$$Q(120) = 10e^{-0{,}00502\times 120} = 5{,}47mg$$

Por tanto, al cabo de 120 días, el material ha liberado 4,53 mg

Ejemplo 2.32. *La vida media de cualquier sustancia se define como el tiempo necesario para que una muestra de material se desintegre hasta llegar a la mitad de la cantidad inicial. Dada la ecuación del problema anterior, determine la vida media del polonio.*

Solución: *El problema plantea claramente que se debe buscar el momento de tiempo para el cual $Q_{(t)} = \frac{Q_0}{2}$ reemplazando en la ecuación se tiene entonces que:*

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-0.00502t}$$

YouTube

Resolver el siguiente problema

La cantidad (en mg) de isótopo de carbono-14 en una muestra orgánica que se descompone en el tiempo está dado por $C(t) = C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$ donde t es el tiempo en años y Co es la cantidad inicial de este isótopo. (a). Determine la cantidad de material presente después de 1200 años de una muestra que contenía inicialmente 10mg de C-14. (b). Determine el tiempo transcurrido de una muestra que inicialmente tenía 12mg de C-14 y actualmente tiene 7 mg.

SOLUCIÓN

Simplificando se llega a:

$$\frac{1}{2} = e^{-0{,}00502t}$$

Aplicando logaritmo natural a ambos lados de la última expresión y usando la propiedad 8 y 10 se obtiene:

$$ln\left(\frac{1}{2}\right) = ln(e^{-0{,}00502t}) \rightarrow ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}00502t\, ln(e^{1})$$

Con lo cual se puede despejar a t,

$$t = \frac{ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}00502} = 138{,}1\ dias$$

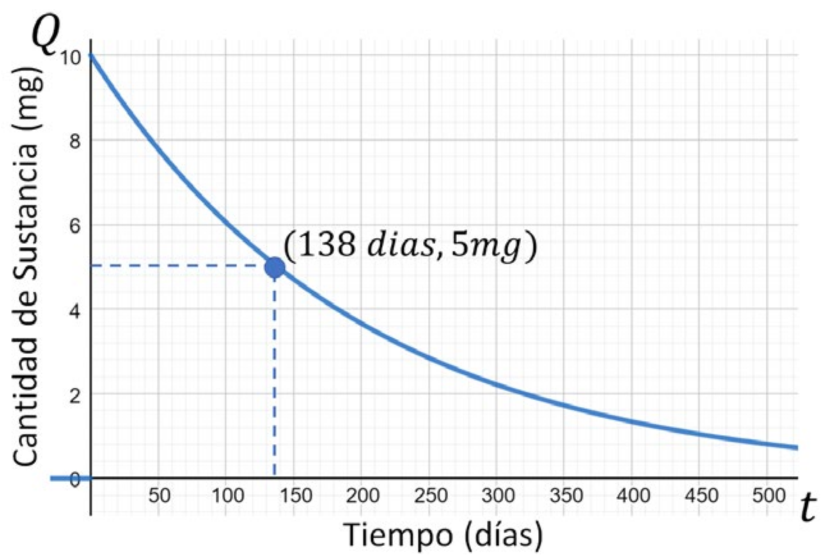


Figura 2.51. *Desintegración de una sustancia para el problema 2.29*

La vida media del polonio radiactivo es de 138,1 días, tal como se muestra en la figura.

El problema anterior contiene una ecuación de tipo exponencial, la cual se resolvió usando las propiedades de los exponentes y logaritmos, sin embargo, es conveniente tener presente algunas reglas que pueden simplificar las operaciones.

Estrategia para resolver una ecuación con logaritmos o exponentes.

1. Identificar muy bien la variable de interés.
2. Reducir el número de variables empleando algún método algebraico.
3. Simplificar toda la expresión, reduciéndola al máximo posible, usando las propiedades de los logaritmos y de los exponentes.
4. Resolver la ecuación, despejando la variable de interés. Posiblemente se deba usar algunas de las propiedades.
5. *Probar cada una de las soluciones en la ecuación original para analizar si son consistentes.*

Ejemplo 2.33. *Resolver la ecuación:*

$$log_2 x = 5 - log_2(2x+5)$$

Solución*: aquí la variable de interés es –x–, se pasan entonces las variables a un lado de la ecuación y las demás cantidades quedan al otro lado:*

$$log_2 x + log_2(2x+5) = 5$$

Aplicando la propiedad 1 se obtiene:

$$log_2\big(x(2x+5)\big) = 5$$

Lo que puede reducirse con la propiedad 9.

$$2^{log_2\left(x(2x+5)\right)} = 2^5$$

Simplificando se llega

$$2x^2 + 5x - 32 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, se tienen dos respuestas:

$$x \approx 3 \;\; y \;\; x \approx -5{,}5$$

La solución al problema es x=3, la segunda respuesta NO es solución ¿por qué?

Resolver la siguiente ecuación

$$\log_2 x + \log_2(x+8) = 7$$

SOLUCIÓN

Ejercicios Sección 2.5. Funciones logarítmicas y exponenciales

Trace en un mismo plano, las siguientes gráficas; analice el comportamiento de cada una y saque sus propias conclusiones

1. $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{2x} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 3^x \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = e^x \\ y = 2e^x \\ y = \frac{1}{2}e^x \end{cases}$ 4. $\begin{cases} y = e^{2x} \\ y = -e^{2x} \end{cases}$

5. $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{x+1} \end{cases}$ 6. $\begin{cases} y = e^{3x} \\ y = e^{-3x} \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = e^{2x} \\ y = -e^{2x} \end{cases}$ 8. $\begin{cases} y = log\, x \\ y = log\, 2\, x \\ y = log\, 3\, x \end{cases}$

9. $\begin{cases} y = 2\, log\, x \\ y = -2\, log\, x \\ y = 0.5\, log\, x \end{cases}$ 10. $\begin{cases} y = log(x+1) \\ y = log\, x \\ y = log(x-1) \end{cases}$

11. $\begin{cases} y = log_2\, x \\ y = log_3\, x \\ y = log_4\, x \end{cases}$ $\begin{cases} y = sen\, x \\ y = sen(-x) \end{cases}$

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales.

12. $2^{x+1} = 10$
13. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} = 4$
14. $3^{2x+3} = 3^{-x-3}$
15. $7 + 3(4^{x+1}) = 12$
16. $3^{x+4} = 6^x$
17. $e^{x+1} = 2^{-3x+4}$
18. $4^{2x} = 5^{3x}$
19. $\left(\frac{1}{2}\right)^{6x+1} = e$
20. $2^{x^2-4} = 2^{3x}$
21. $\frac{1}{2} = 3^{x^2-1}$
22. $e^{3x}e^{5x} = e^{14}$
23. $\frac{1}{e^{2x}} = 6e^{3x}$
24. $8^x = \left(\frac{1}{32}\right)^{x-2}$
25. $2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$
26. $3^{5x-4} = 3^{11}$
27. $2^x + 4^x = 72$
28. $3^x + 9^x = 90$
29. $\sqrt[2-x]{25^{\frac{2x+1}{2}}} = \frac{1}{5}$
30. $\sqrt[3]{(-8)^{3x-2}} = -(2)^x$
31. $3^{2x-1} - 3^x = 18$

Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas

32. $\log_{\frac{1}{2}} 0.25 = x$
33. $\ln \frac{1}{e^5} = x$
34. $2\log x - \log(x+6) = 0$
35. $\log(4x-1) - \log(x-2) = \log 5$
36. $\log x^2 - \log x = 2$
37. $\log x^2 - \log x = 3$
38. $log(2x+1) = log(x-6)$
39. $log_2(x+1) = 2$
40. $log_3(12-3x) = 3$
41. $ln(x+1) = 2$
42. $log\, x - log(x+1) = log\, 4$
43. $log_2(x) + log_2 2 = log_2\left(\frac{x}{2}\right)$
44. $ln(-x) = ln(x^2 - 6)$
45. $ln(4-x) + ln\, 3 = 2\, ln\, x$
46. $log_2(x+1) - log_2(2x-3) = 1$
47. $log_7 x = \frac{3}{2} log_7 6\, 4$
48. $log(3x-1) + log\, 4 = log(9x+2)$
49. $\log_4 x = \log_2(x-1)$
50. $\log_2 x^2 = \log_3 x$

51. **GPS**. Una empresa de rastreo satelital ha estimado qué número de vehículos seguidos a través de los sistemas GPS (sistema de posicionamiento global) crece en razón a la siguiente expresión matemática:

$$N(t) = 0.72e^{0.25t} \quad con \quad 0 \leq t \leq 10$$

Donde N(t) es el número total de rastreadores instalados, expresados en miles de unidades y t es el tiempo medido en años siendo el año inicial 2020. Para lo anterior:

a. Trace una gráfica de N en función de t.
b. Cuantos rastreadores instalará la empresa en el año 2020
c. Cuántos rastreadores instalar a la empresa en el año 2023
d. Cuántos rastreadores instalara la empresa en junio del 2024
e. Para que momento la empresa estima que podrá instalar 5800 rastreadores.

52. **Curva de aprendizaje**: La productividad de un operario se puede aproximar a una función exponencial que relaciona su capacitación y el tiempo que lleva haciendo la labor. Entre más tiempo se entrene, mayor será su capacidad para producir, pero esta crecerá hasta cierto valor y luego se estabiliza, debido a limitaciones humanas, técnicas y de maquinaria –entre otras–. El departamento de recursos humanos de una empresa que ensambla computadores logra determinar que un operario después de realizar su entrenamiento está en capacidad de ensamblar CPU a un ritmo diario dado por la expresión matemática

$$N(t) = 50 - 20e^{-0.2t} \;\; donde \; 0 \leq t \leq 26$$

Donde N es la cantidad CPU ensambladas diariamente y t el tiempo en semanas.

a. Obtenga la representación gráfica de la cantidad de CPU ensambladas por unidad de tiempo.
b. Determine cuantas CPU arma el operario en su primer día de trabajo
c. Determine cuantas CPU arma por día el operario a las 5 semanas de trabajo.
d. Cuánto tiempo de experiencia necesita el operario para ensamblar 30 CPU por día.
c. La empresa determina que el operario pasa el periodo de prueba si después de 3 meses (12 semanas) es capaz de ensamblar como mínimo 45 CPU. Dada esta condición, determine si el operario pasa o no el periodo de prueba.

53. **Ciencias forenses**: Las ciencias forenses usa la ley de enfriamiento de Newton para determinar el momento de muerte de una persona adulta, a partir de las temperaturas de los cuerpos.

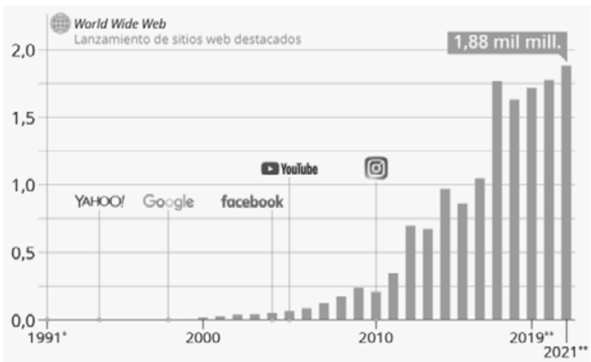
$$T = T_0 + (36.5 - T_0)(0.95)^t$$

Donde T_0 es la temperatura del ambiente y t el tiempo transcurrido entre el momento de la muerte y el momento en que se toma la temperatura al cuerpo.

a. Si una persona muere, calcule la temperatura del cuerpo pasadas 6 horas si la habitación tiene una temperatura de 22°C.
b. En la escena de un crimen, la viuda le dice al CTI que se despidió de su esposo y salió a las 7:00 am, pero cuando volvió a las 6:00 pm su esposo ya estaba muerto. Determine si la viuda dice la verdad o miente si la temperatura del cuerpo a las 6:00pm era de 27.26°C y la habitación tenía una temperatura de 20°C.

54. **Portales WEB**. En el año 1991, no existía ni un solo portal WEB accesible sin embargo esta

situación cambio el 6 de agosto con el lanzamiento del **World Wide Web** por parte del físico inglés Tim Berners-Lee y desde entonces su número ha crecido exponencialmente. La figura muestra este crecimiento y los momentos en los cuales aparecen algunas de los portales más reconocidos



Fuente: Internet Live Stats

El modelo matemático que predice este comportamiento corresponde con la expresión:

$$N(t) = 0{,}0028e^{0{,}2155t}$$

Donde N represente el número de portales WEB en miles de millones y t el tiempo iniciando en 1991 como año cero.

a. Estime la cantidad de páginas WEB en 2020
b. Estime el número de páginas WEB en 2021.
c. Estime el número de páginas WEB en 2025
d. En qué momento se alcanzarán los 3000 millones de páginas WEB en el mundo.

55. **Curva logística**. En la UCP de Pereira hay 3000 estudiantes en todos sus programas académicos de pregrado y posgrado, y en cierto momento llega a la Universidad un virus de gripa común pero altamente contagioso, cuya tasa de transferencia se puede aproximar al modelo matemático denominado curva logística.

$$N(t) = \frac{3000}{1 + 1499e^{-0.1t}}$$

Donde N representa la cantidad de alumnos contagiados y t el tiempo en días después de iniciado el primer contagio. Para esto determine:

a. La cantidad inicial de personas contagiadas.
b. La cantidad de estudiantes contagiados al cabo de 50 días.
c. Si las clases inician el primero de febrero y la universidad toma la decisión de suspenderlas cuando se llegue al 50% de contagios, en qué momento deberá hacerlo.

56. **Publicidad**: El departamento de marcadeo de una importante empresa de tecnología, estima que t semanas después de terminada una campaña publicitaria, las ventas pueden aproximarse a la siguiente expresión matemática:

$$V(t) = 1000 + Be^{-kt} \quad con \quad 0 \leq t \leq 6$$

a. Encuentre el valor de las constante B y k sabiendo que las ventas al final de la primera y tercera semana son 1600 y 1200 respectivamente.
b. Determine la cantidad de ventas al final de la cuarta semana.

57. **Crecimiento logístico**: Dada la función de crecimiento logístico:

$$Q(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Donde la población es Q_1 cuando $t = t_1$ y Q_2 cuando $t = t_2$, demuestre ampliamente que el valor de la constante k está dado por la expresión matemática

$$k = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln\left[\frac{Q_2(A - Q_1)}{Q_1(A - Q_2)}\right]$$

SECCIÓN 2.6 MATEMÁTICAS FINANCIERAS

En la sección anterior se revisó el concepto de interés compuesto como una aplicación de las funciones y ecuaciones logarítmicas y exponenciales, sin embargo, este es un tema cuyas aplicaciones son muy importantes para sectores relacionados con la economía, las finanzas, la contabilidad; de una manera u otra, de forma directa o indirecta nos vemos afectados o beneficiados por los intereses causados por el uso del capital. En esta sección se hablará con un poco de más detalle de conceptos como los capitales, las anualidades y las amortizaciones, pero para ello es importante primero establecer algunas definiciones que se trabajarán a lo largo de la presente sección.

El **interés (r)** es el costo o beneficio que se obtiene por prestar un dinero a una cierta cantidad de tiempo. Típicamente se usa un índice en escala porcentual conocida como **tasa de interés** (%) que establece la expectativa de quien presta el capital para que este sea devuelto con un beneficio adicional. En este libro el dinero o capital inicial prestado se identificará con la letra P o VP, y el valor devuelto que incluye el capital prestado y los intereses generados, que en conjunto se denomina **valor acumulado**, VF.

El ***capital inicial*** prestado (P) otros autores lo denominan valor presente (VP) y el valor ***acumulado*** lo llaman valor futuro (VF)

Interés Simple

El interés simple (I) es la aplicación de las funciones lineales útiles para determinar los valores futuros de los capitales prestados; el cálculo del interés se hace exclusivamente sobre el capital inicial, independientemente del instante de tiempo donde se capitalicen[1] de forma proporcional al tiempo según la expresión:

$$I = P \cdot r \cdot t \qquad \text{[Ec. 2.20]}$$

El valor I es la cantidad de dinero adicional que se recibe o se debe pagar –según sea el caso– por la utilización en el tiempo de ese capital. Por tanto, el valor total a pagar, puede calcularse como se define en el teorema siguiente:

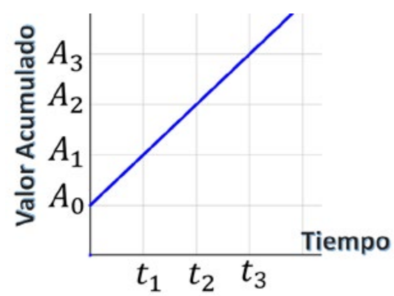


Figura 2.52. *Representación gráfica para interés simple*

> ***Teorema 2.10. Cálculo del valor acumulado para el interés simple****: sea P un capital puesto a una tasa de interés simple anual r, durante t años. El valor acumulado o valor futuro es:*
>
> $$A = P(1 + rt) \qquad \text{[Ec. 2.21]}$$

[1] La capitalización se refiere al momento en el cual se recibe o se paga un capital más los intereses que este generó.

El teorema anterior supone una tasa de interés r, en años y un plazo también en años, sin embargo, también es posible hablar de plazos más largos y cortos, por ejemplo, intereses causados semestralmente, trimestral, mensual, semanal y diario. El siguiente ejercicio ilustra un problema de un préstamo a tasas de interés en diferentes lapsos de tiempos.

USD es el símbolo ISO para dólares americanos.

En algunos problemas se usará esta moneda en vez del peso colombiano **COP**, para obviar la necesidad de usar tantos ceros.

Ejemplo 2.34. Interés Simple. *Un estudiante ahorrador decide poner un capital de USD 1.000 en una entidad financiera que le brinda un interés simple de 5% anual. Si el estudiante no retira ese capital durante cuatro años, cuánto dinero recibe en total.*

Solución*: el interés que recibe al final de cada periodo es de un 5%, por tanto:*

$$I = 1.000 * \frac{5}{100} = USD\ 50$$

Tabla 2.7. *Crecimiento de un capital a interés simple.*

Año	Capital	Intereses
0	1.000	50
1	1.000	50
2	1.000	50
3	1.000	50
4	1.000	0
Total		200

Que corresponde a un valor acumulado de $A = 1.000 + 200 = USD\ 1.200$*. Esto quiere decir que el banco le reconocerá al estudiante USD 200 más por permitirle utilizar su dinero. Este reconocimiento se le conoce con el nombre de* ***rendimiento financiero.***

Usando la expresión del teorema anterior se obtiene

$$A = 1.000(1 + 0.05 \times 4) = USD\ 1.200$$

Nótese que en la formula se usa 0.05, que corresponde al 5% eliminando el porcentaje que se hace dividiendo entre 100, el valor.

Este estudiante recibirá 1.200 dólares al finalizar el cuarto año de su inversión.

Interés compuesto

El interés compuesto, es la figura financiera que más se aplica en el comercio cuando se manejan capitales o recursos. A diferencia del interés simple, el interés compuesto agrega al capital el interés generado al cabo de cada periodo, sobre este nuevo valor acumulado se genera un nuevo interés que de nuevo se va sumando al capital. Para esto, considérese el ejemplo anterior.

***Ejemplo 2.35. Interés Compuesto**: Un estudiante ahorrador decide poner un capital de USD 1.000 en una entidad financiera que le brinda un interés compuesto de 5% anual. Si el estudiante no retira ese capital ni los intereses durante cuatro años, cuánto dinero recibe en total al finalizar el cuarto año.*

***Solución**: Recordando que los intereses se suman al capital en cada periodo, se tiene entonces que, al finalizar cada periodo de tiempo, los intereses generados el capital actual son:*

Primer año
Intereses generados: $I_1 = 1.000 \times 0{,}05 = USD\ 50$
El valor acumulado $A_1 = 1.000 + 50 = USD\ 1.050$

Segundo
Intereses generados: $I_2 = 1.050 \times 0{,}05 = USD\ 52.5$
El valor acumulado $A_2 = 1.050 + 52.5 = USD\ 1.102{,}5$

Tercer año
Intereses generados: $I_3 = 1.102{,}5 \times 0{,}05 = USD\ 55{,}125$
El valor acumulado $A_3 = 1.102{,}5 + 55{,}125 = USD\ 1.157.625$

Cuarto año
Intereses generados: $I_4 = 1.157{,}625 \times 0{,}05 = USD\ 57{,}88125$
El valor acumulado $A_4 = 1.157{,}625 + 57{,}88125 = USD\ 1.215{,}5062$

Resumiendo, se tiene:

***Tabla 2.8.** Crecimiento de un capital a Interés compuesto.*

Año	Capital	Intereses
0	$1.000	$50
1	$1.050	$52,5
2	$1.102,5	$55,125
3	$1.157,625	$57,88125
4	$1.215,50625	
Total		$215.50325

Nótese que el estudiante al finalizar el cuarto año recibe USD 1.215,5, más dinero en comparación a si lo hubiera invertido en un banco que le da interés simple. El rendimiento financiero del banco que ofrece tasas con interés compuesto es de 215,5 dólares.

Se pensaría que no hay diferencia significativa entre aplicar interés simple e interés compuesto, sin embargo, la realidad es que la diferencia se vuelve muy significativa cuando los plazos son cada vez más grandes, tal como se ilustra en los problemas que vienen a continuación.

Asúmase que se tiene un capital de \$5.000.000 el cual tiene la posibilidad de ser colocado en un CDT que da un interés del 4% anual compuesto mensual o en una cuenta de ahorros que rinde con un interés del 1% anual compuesto mensual. Determine el valor futuro o de retorno de ese capital al cabo de 5 años y compare el mismo si esa cantidad la hubiese prestado un banco con una tasa de interés del 10% anual compuesto mensual.

SOLUCIÓN

Teorema 2.11. Cálculo del valor acumulado para el interés compuesto*: sea P un capital puesto a una tasa de interés compuesto i, durante t años. El valor acumulado **A** o valor futuro es:*

$$A = P(1+i)^n \qquad \text{[Ec. 2.22]}$$

Con $i = \frac{r}{m}$ *;* $n = mt$ *y donde*

$r \rightarrow$ Tasa nominal anual de interés
$m \rightarrow$ Número de periodos de conversión anual
$t \rightarrow$ Plazo (medido en años)
$n \rightarrow$ Número total de veces que se hace efectivo el interés

Ejemplo 2.36. Interés Compuesto*: Resuelva el problema anterior, pero considerando ahora que el interés es compuesto.*

Solución*: aplicando la expresión del teorema 2.11., se tiene:*

$$A = 1.000(1+0.05)^4 = 1000(1.21550625) = USD\ 1.215{,}50625$$

El problema asume que el interés estaba compuesto anualmente, sin embargo, en la práctica las entidades financieras hacen efectivo los intereses, más veces al año, por ejemplo, mensualmente; el intervalo de tiempo entre los cálculos de intereses sucesivos se llama ***periodo de conversión***.

Ejemplo 2.37. *Determinar el valor futuro de un préstamo de USD 4.000 si este se pacta con un interés compuesto del 12% anual durante 3 años, compuesto: (a). anual. (b). semestral. (c). trimestral. (d) mensual. (e) quincenal. (f) semanal. (g) diario. (h). por hora. (i). por minuto. (j). por segundo*

Solución*: para el problema, P = 4.000; t=2, i=12%=0,12, lo que cambia en el problema es la forma en la cual se hace efectivo el interés;*

a. *Anual m = 1. Solo se cobra el interés una vez cada año*

$$A = 4000\left(1+\frac{0{,}12}{1}\right)^{1\times 2} = USD\ 5017{,}6$$

b. *Semestral m=2. Cada seis meses se cobra el interés, por tanto, en un año se cobra dos veces.*

$$A = 4000\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^{2\times 2} = USD\ 5049{,}90784$$

c. *Trimestral m=4. Se cobran los intereses cada tres meses y como en un año hay cuatro trimestres, entonces*

$$A = 4000\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4\times 2} = USD\ 5067{,}080326$$

d. Mensual m=12. Se cobra mensualmente el interés y ya que en un año hay 12 meses, entonces:

$$A = 4000\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{12\times 2} = USD\ 5078{,}938594$$

e. Quincenal m=24. Se cobran cada quincena el interés y ya que en un año hay 24 quincenas, entonces:

$$A = 4000\left(1+\frac{0{,}12}{24}\right)^{24\times 2} = USD\ 5081{,}956644$$

f. Semanal m=52. Un año tiene aproximadamente 52 semanas y al final de cada una se hace efectivo el interés, entonces:

$$A = 4000\left(1+\frac{0{,}12}{52}\right)^{52\times 2} = USD\ 5083{,}590805$$

g. Diario m=365. Un año normal tiene 365 días y al final de cada día se cobra el interés:

$$A = 4000\left(1+\frac{0{,}12}{365}\right)^{365\times 2} = USD\ 5084{,}796036$$

h. Hora m=8,760:

$$A = 4.000\left(1+\frac{0{,}12}{8760}\right)^{8760\times 2} = USD\ 5084{,}988242$$

i. Minuto m= 525,600:

$$A = 4000\left(1+\frac{0{,}12}{525{,}600}\right)^{525600\times 2} = USD\ 5084{,}988242$$

j. Segundo m=31.536,000:

$$A = 4000\left(1+\frac{0{,}12}{31536000}\right)^{31536000\times 2} = USD\ 5084{,}9966$$

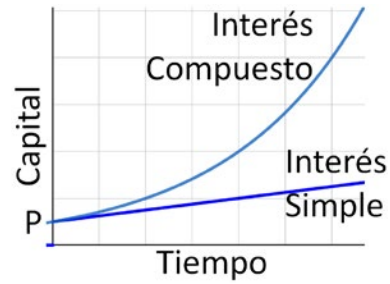


***Figura 2.53.** Comportamiento del capital dado un interés simple y un interés compuesto.*

Al principio de un crédito –por ejemplo-, el valor futuro del capital o de los intereses en ambos sistemas es muy similar, sin embargo, a medida que el plazo crece, se nota la diferencia entre un sistema de interés simple que aumenta linealmente y un sistema de interés compuesto que crece exponencialmente

Como se puede notar, cada vez que el interés se compone en periodos más pequeños, el monto total acumulado crece, sin embargo, tiende a estabilizarse y ese es el principio del interés compuesto continuo.

Interés compuesto continuo.

Como se ilustró en el problema anterior, cuando aumenta la frecuencia con la cual se capitalizan los intereses, el valor acumulado tiende a crecer, ahora, si esta capitalización se hace en cada instante de tiempo, es decir, se hace de forma continua, el valor final acumulado, sigue una expresión exponencial, para ello considérese la siguiente representación gráfica de los resultados del problema anterior:

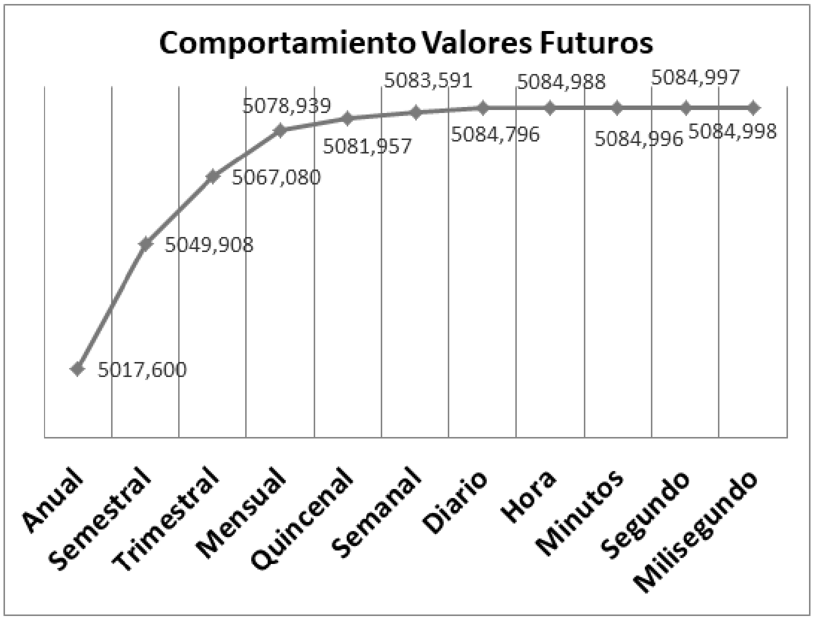


Figura 2.54. *Comportamiento de los montos acumulados o valores futuros para diferentes composiciones de un capital en el problema 2.34.*

Nótese que entre más pequeño sea el tiempo de capitalización de intereses, es decir entre más alta la frecuencia de ejecución de los intereses, el valor acumulado o valor futuro tiende a estabilizarse siendo, para el problema ilustrado, ese valor es aproximadamente USD 5.084.998. Este análisis llevó ha construir una expresión para calcular el valor futuro de préstamos o inversiones capitalizadas con interés continuo.

Teorema 2.12. Interés compuesto continuo. *Un capital P, puesto a un interés r compuesto continuo, durante un periodo de tiempo t, generará un valor acumulado A representado por la expresión:*

$$A = P \cdot e^{rt} \quad \text{[Ec.2.23]}$$

Ejemplo 2.38: *Determinar el valor futuro de un préstamo de USD 4000 si este se pacta con un interés compuesto continuo del 12% anual durante 3 años.*

Solución: *aplicando la fórmula se tiene:*

$$A = 4000 \cdot e^{0,12 \times 2} = USD\ 5084.9966$$

Que es muy similar a los valores ilustrados en la gráfica 2.54.

Tasa de interés efectiva

Los ejercicios anteriores sobre el cálculo de los valores acumulados de una inversión o un préstamo a interés compuesto ilustran muy bien que esta depende de la frecuencia con que se suman el interés, por tanto, la tasa de interés indicada o ***tasa nominal*** especificada, por sí sola, no refleja la tasa real con la cual se gana el interés.

Para ejemplificar mejor esto, considérense tres bancos que generan intereses compuestos, el primero ofrece un rendimiento del 12% anual, el segundo ofrece un rendimiento del 6% semestral y el tercero ofrece un rendimiento del 1% mensual; a simple vista se podría considerar que una inversión de USD 1.000 a dos años, produciría el mismo rendimiento en cualquier banco, sin embargo, esto no es así y la tabla siguiente lo prueba.

Tabla 2.9. *Crecimiento de un capital a Interés compuesto.*

Banco 1	12% anual	$1000(1+0{,}12)^{1*2}$	USD 1254,40
Banco 2	6% semestral	$1000(1+0{,}06)^{2*2}$	USD 1262,48
Banco 3	1% mensual	$1000(1+0{,}01)^{12*2}$	USD 1269,73

Entonces entre una inversión que da el 12% cada año y otra que da el 6% cada semestre, es indudablemente mejor la segunda opción. Con este escenario se necesita encontrar una base común para poder comparar diferentes tasas nominales de interés y es lo que se denomina ***tasa efectiva***.

Definición 2.16. La tasa efectiva. *Es la tasa de interés simple que produciría el mismo valor acumulado en un año que la tasa nominal compuesta m veces al año.*

En otras palabras, la base de comparación consiste en encontrar la tasa de interés simple de la tasa compuesta que ocasionaría el mismo valor futuro.

Teorema 2.13. Tasa de interés efectiva*: sea r la tasa de interés nominal anual, la tasa de interés efectiva anual r_{ef} será:*

$$r_{ef} = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} - 1 \qquad \text{[Ec. 2.24]}$$

Donde r es la tasa nominal anual y m es el número de conversión al año el año.

Conociendo las tasas de interés efectivas de varias propuestas financieras, es posible decidir cuál representa un beneficio mayor.

Ejemplo 2.39. *Calcule las tasas nominales del problema anterior.*

Solución: aplicando la expresión del teorema anterior se tiene:

a. Compuesto anual: m=1

$$r_{ef}=\left(1+\frac{0{,}12}{1}\right)^{1}-1=0{,}12\rightarrow 12\%$$

b. Compuesto semestral: m=2

$$r_{ef}=\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^{2}-1=0{,}1236\rightarrow 12{,}36\%$$

c. Compuesto trimestral: m=4

$$r_{ef}=\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4}-1=0{,}1255\rightarrow 12{,}55\%$$

d. Compuesto mensual: m=12

$$r_{ef}=\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{12}-1=0{,}1268\rightarrow 12{,}68\%$$

e. Compuesto quincenal: m=24

$$r_{ef}=\left(1+\frac{0{,}12}{24}\right)^{24}-1=0{,}1272\rightarrow 12{,}72\%$$

e. Compuesto semanal: m=52

$$r_{ef}=\left(1+\frac{0{,}12}{52}\right)^{52}-1=0{,}1273\rightarrow 12{,}73\%$$

f. Compuesto diario: m=365

$$r_{ef}=\left(1+\frac{0{,}12}{365}\right)^{365}-1=0{,}1275\rightarrow 12{,}74\%$$

g. Compuesto por hora: m=8760

$$r_{ef}=\left(1+\frac{0{,}12}{8760}\right)^{8760}-1=0{,}1236\rightarrow 12{,}75\%$$

Si usamos estos valores, para calcular el valor futuro de la inversión si fuera a interés simple, se obtendría la tabla que se anexa a continuación.

Tabla 2.10. *Crecimiento de un capital con tasas de interés efectiva.*

Capital	Tasa nominal	Periodicidad	Tasa efectiva anual	Valor Acumulado	
USD 4000	12,00%	Anual	12,000%	$A=4000(1+0{,}1200)^2$	= USD 5017,600
USD 4000	12,00%	Semestral	12,360%	$A=4000(1+0{,}1236)^2$	= USD 5049,908
USD 4000	12,00%	Trimestral	12,551%	$A=4000(1+0{,}12551)^2$	= USD 5067,080
USD 4000	12,00%	Mensual	12,683%	$A=4000(1+0{,}12683)^2$	= USD 5078,939
USD 4000	12,00%	Quincenal	12,716%	$A=4000(1+0{,}12716)^2$	= USD 5081,957
USD 4000	12,00%	Semanal	12,734%	$A=4000(1+0{,}12734)^2$	= USD 5083,591
USD 4000	12,00%	Diario	12,747%	$A=4000(1+0{,}12747)^2$	= USD 5084,796

Nótese que el valor acumulado es exactamente igual a lo dado en problemas anteriores.

Conversión entre tasas de interés efectiva

Como se ha visto, las tasas de interés nominal corresponden a la tasa de interés sin capitalización, es decir retirando del capital el interés ganado y son útiles para al cálculo de capitales en cualquier instante de tiempo, las tasas efectivas por su parte son las tasas reales de interés que recibe en un instante determinado, dadas después de la capitalización y son útiles al momento de hacer comparaciones, pero se debe prestar especial atención al momento de convertirlas de un periodo a otro.

Una tasa nominal del 12% anual corresponde a una tasa nominal del 6% semestral o 1% nominal mensual, sin embargo, cuando son tasas efectivas esto ya no se cumple debido precisamente a las capitalizaciones. Por ello, es útil una expresión que permita encontrar tasas efectivas equivalentes para diferentes periodos de tiempo.

Teorema 2.14. Conversión de interés efectivo anual a interés periódico: *Sea r_{ef} la tasa de interés efectiva anual, la tasa de interés efectivo periódico es:*

$$r_p = \left(1 + r_{ef}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \qquad \text{[Ec. 2.25]}$$

Donde m es el número de periodos calculados en el año.

Ejemplo 2.40. *Una entidad financiera ofrece préstamos a una tasa de interés efectiva del 36% anual en sus tarjetas de crédito. Determinar el interés efectivo semestral, trimestral, mensual y diario.*

Solución: *aplicando la expresión del teorema anterior se tiene:*

a. *Para el interés efectivo semestral, se tiene que m = 2*

$$r_p = (1 + 0{,}36)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 16{,}62\%$$

b. *Para el interés periódico efectivo trimestral, se tiene que m=4*

$$r_p = (1 + 0{,}36)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 7{,}99\%$$

c. *Para el interés periódico efectivo mensual, se tiene que m=12*

$$r_p = (1 + 0{,}36)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 2{,}59\%$$

Nótese de nuevo que, a diferencia de las tasas nominales, donde se puede hacer la equivalencia entre diferentes periodos de tiempo multiplicando o dividiendo por el factor correspondiente, esto ya no es correcto en las tasas efectivas.

Anualidades

La anualidad es otra figura financiera, ampliamente aplicada en el mercado y las economías; en términos generales una anualidad representa una serie de pagos que se hacen a intervalos de tiempos regulares –aunque es posible tener anualidades con términos variables– denominados ***términos***; son ejemplo de anualidades los pagos hechos a préstamos ordinarios, a préstamos de hipotecas, ahorros programados entre otros. Existen diversos tipos de anualidades, dependiendo del momento donde se hacen los pagos, los momentos en los que se capitalizan intereses y los intervalos de tiempo, sin embargo, para los intereses de la presente unidad, se estudian únicamente las anualidades que cumplen con las siguientes características:

1. Todos los términos son iguales, es decir, se hacen los pagos en los mismos intervalos de tiempo.
2. Todos los pagos son del mismo valor, esto implica que la cuota no cambia en el tiempo que dure la anualidad.
3. Los pagos se hacen siempre al final de cada término.
4. En el momento del pago, se capitalizan los intereses.

Dadas estas condiciones, que son típicas en los portafolios de servicios de las entidades financieras, considérese por ejemplo una persona que quiere hacer un viaje a la costa, y se propone ahorrar $200.000 cada mes durante seis meses, arrancando el 1° de enero y terminando el 31 de julio, sabiendo que una entidad financiera le ofrece un interés del 12% anual compuesto mensual, la siguiente gráfica ilustra la forma como se hacen los pagos y los rendimientos que estos tienen.

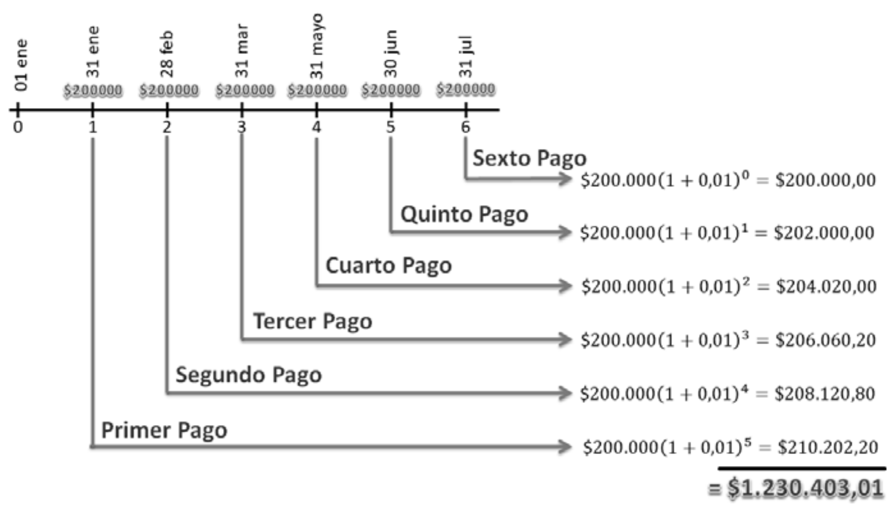


Figura 2.55. *Representación gráfica de las anualidades*

Nótense varias cosas para iniciar, como primero esta anualidad tiene seis términos, cada uno dura un mes –independientemente que los meses tengan diferente cantidad de días–, segundo, el proyecto de esta persona inicia el 01 de enero, pero da la primera cuota al final del primer término, que es en enero 31; tercero, al final de cada término, la persona da siempre la misma cantidad de dinero, $200,000. Tercero, el interés es de 12% anual compuesto mensual, por tanto, mensualmente el interés que se genera es del 1%.

En esta anualidad, la primera cuota se da el 31 de enero y la entidad financiera puede disponer de este dinero durante cinco meses, por lo que debe responder por intereses durante estos cinco meses.

$$\$200.000(1+0.01)^5 = \$210.202,20$$

La segunda cuota se da el 28 de febrero y la entidad financiera tiene a su disposición este dinero durante cuatro meses, tiempo por el cual debe responder a la persona con intereses

$$\$200.000(1+0,01)^4 = \$208.120,80$$

Así sucesivamente con cada una de las cuotas. La última cuota se da el 31 de julio, fecha en la cual se retira todo el capital ahorrado más los intereses generados, esta última cuota no genera intereses ya que la entidad financiera no pudo disponer de esta última. Sumando cada una de las cuotas y los intereses generados, al final la persona puede disponer de 1.230.403,01 para su viaje.

Teorema 2.15. Valor Futuro acumulado de una anualidad. *El valor futuro acumulado (VF) de una anualidad de n pagos todos iguales, de un valor C cada uno, pagados al final de cada término de inversión a una tasa de interés i, está dado por:*

$$VF = C\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad \text{[Ec. 2.26]}$$

Ejemplo 2.41. *Un padre de familia quiere hacer un ahorro programado para los estudios superiores de su hija, entonces decide ahorrar mensualmente una cuota fija de $300.000 depositándolos en un banco que ofrece un rendimiento del 6% anual compuesto mensual. Si el padre tiene pensado retirar estos fondos cuando la niña cumpla 16 años, ¿cuánto dinero le deberá devolver el banco?*

Solución*: aplicando el teorema anterior, se tiene que el valor futuro acumulado para esta anualidad es:*

$$VF = \$300.000,00\left[\frac{(1+0,005)^{12\times 16} - 1}{0,005}\right] = \$96.327.401$$

Esta suma podría parecer grande, sin embargo, el lector debe recordar que el dinero pierde valor por efecto de la inflación y otros factores, entonces 96 millones en 16 años no tiene el mismo valor o poder adquisitivo del que tendría ahora.

Amortización de préstamos

Solicitar un préstamo a una entidad financiera y pagar la totalidad de este más los intereses solo al final del préstamo, podría resultar muy costoso. Supóngase como ejemplo que se pide un préstamo por $50.000.000 a un plazo de 15 años a una tasa de interés anual del 9% compuesto mensual. Si no se hace ningún pago durante la vida del crédito y se deja esta acción solo al final, el deudor deberá pagar:

$$A = \$50.000.000\left(1+\frac{0{,}09}{12}\right)^{180} = \$191.902.163{,}37$$

Esto además de ser impráctico, es muy riesgoso para las entidades financieras en virtud de que las garantías del crédito para tiempos muy largos puedan no ser efectivas.

Para aliviar esta carga, el deudor puede hacer pagos periódicos a la deuda con el fin de reducirla y obviamente los intereses; estos abonos o pagos parciales a intervalos definidos se conoce con el nombre de ***amortización.*** De la misma forma que en las anualidades, se van a considerar pagos y términos iguales para simplificar el proceso.

Teorema 2.16. Amortización. El valor constante de la cuota o pago C sobre un préstamo de monto P para ser amortizado en n periodos iguales a una tasa de interés compuesta i, está dado por la expresión:

$$C = \frac{P \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \qquad \text{[Ec. 2.27]}$$

Considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.42. *Una persona pide a una entidad financiera un préstamo hipotecario de cuota fija por $50,000,000 a 15 años; si la entidad le ofrece una tasa de interés anual del 9% compuesto mensual, de cuánto le quedan las cuotas:*

Solución: *el crédito acordado tiene una tasa del 9% anual que corresponde al $\frac{9\%}{12}$ mensual, y está pactado a 15 años que es igual a 180 meses; aplicando la expresión del teorema anterior se obtiene:*

$$C = \frac{\$50.000.000 \times \dfrac{0{,}09}{12}}{1-\left(1+\dfrac{0{,}09}{12}\right)^{-180}} = \$507.133{,}29$$

Esta persona debe pagar mensualmente por un tiempo de 15 años, una cuota de $507.134 pesos, para un gran total de $91.284,120 aproximadamente. Esto en comparación con los 191 millones que debería haber pagado si no amortiza, implica una reducción de casi

Una ***hipoteca*** es un derecho que adquiere un prestamista o una entidad financiera para el cumplimiento de una deuda. Las hipotecas se constituyen normalmente sobre un inmueble y le permite al acreedor venderla o rematarla para garantizar la devolución de los dineros.

Mes	Deuda	Intereses Pagados	Abono a Capital
0	$50.000.000		
1	$49.867.866	$375.000	$132.133
2	$49.734.742	$374.009	$133.124
3	$49.600.619	$373.010	$134.122
4	$49.465.491	$372.004	$135.128
5	$49.329.348	$370.991	$136.142
175	$2.479.597	$22.233	$484.899
176	$1.991.061	$18.596	$488.536
177	$1.498.860	$14.932	$492.200
178	$1.002.969	$11.241	$495.891
179	$503.358	$7.522	$499.611
180	$0,00	$3.775	$503.358

En el problema 2.38, se muestra el valor de la cuota –sin seguros u otros cobros– para un crédito por 50 millones a 15 años y el plan de amortización al principio y al final del tiempo que dura el crédito.

Nótese que gran parte de la cuota al principio del crédito va para los intereses y una pequeña parte para el capital; al final del crédito las cosas se invierten, la mayor parte de la cuota va para el capital y una muy pequeña va para intereses.

100 millones de pesos; esa es una de las razones de la importancia de amortizar los créditos.

Adicionalmente para este problema, los bancos aparte de la cuota del crédito, anexan otros costos como los seguros de vida, de patrimonio, de deuda, de cuota de manejo y hasta extraordinarios, por lo que el deudor debe estar muy pendiente de estos antes de comprometerse con un crédito con cualquier entidad financiera.

Plan de amortización

Otro de los derechos que tienen los usuarios de la banca, por lo menos en Colombia, es conocer su plan de amortización, es decir, una tabla que le muestre cómo cambian los valores de la deuda y los intereses con el pago de cada cuota. Para ilustrar esta tabla considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.43. Plan de amortización*: una empresa pide a un banco un préstamo de USD 120,000 a un año; este le ofrece una línea de crédito con un interés anual del 12% compuesto mensual. Si los intereses se cobran sobre el saldo pendiente, determine el valor de la cuota mensual y el plan de amortización en forma de tabla.*

Solución: *aplicando la expresión del teorema 2.18, sabiendo que el interés mensual es de 12%/12 = 1%.*

$$C = \frac{120.000 \times 0.01}{1 - (1 + 0,01)^{12}} \approx US\$10.661,85$$

La empresa debe pagar mensualmente USD 10,661,85 dólares americanos por el préstamo durante 12 meses; la tabla que ilustra el plan de amortización es:

Tabla 2.11. *Plan de amortización.*

Mes	Cuota Fija	Interés pagado	Abono a Deuda	Estado de la Deuda
0				$120.000,00
1	$10.661,85	$1.200,00	$9.461,85	$110.538,15
2	$10.661,85	$1.105,38	$9.556,47	$100.981,67
3	$10.661,85	$1.009,82	$9.652,04	$91.329,63
4	$10.661,85	$913,30	$9.748,56	$81.581,08
5	$10.661,85	$815,81	$9.846,04	$71.735,03
6	$10.661,85	$717,35	$9.944,50	$61.790,53
7	$10.661,85	$617,91	$10.043,95	$51.746,58
8	$10.661,85	$517,47	$10.144,39	$41.602,19
9	$10.661,85	$416,02	$10.245,83	$31.356,36
10	$10.661,85	$313,56	$10.348,29	$21.008,07
11	$10.661,85	$210,08	$10.451,77	$10.556,29
12	$10.661,85	$105,56	$10.556,29	$0,00
	$127.942,26	$7.942,26	$120.000,00	

YouTube

Una persona desea comprar un celular de gama alta que tiene un valor comercial de USD 2000. La compra se hace con su tarjeta de crédito, la cual ofrece un interés nominal de consumo del 36% anual compuesto mensual. (Sin cuota de manejo u otros costos asociados). Determine el plan de pagos si esta persona solicita que le difieran la deuda a 4 meses.

SOLUCIÓN

En el mes 0, no se ha amortizado nada la deuda, en otras palabras, se deben los $USD\ 120.000$*, pero en el mes 1. el banco cobra los intereses que son del 1% de* $USD\ 120.000$ *que corresponde a* $\$4.000$*, estos salen de la cuota, por tanto, se abona a la deuda* $USD\ 10.661{,}85 - \$4.000 = USD\ 9.461{,}85$ *quedando en* $USD\ 110{,}538.15$*; a esta deuda el banco en el mes 2, le cobra de nuevo el 1% de intereses que es USD 1.105.38 y así sucesivamente se va construyendo la tabla.*

Nótese que al final el Estado de la deuda es USD 0, que la empresa ha pagado en total USD 127.942,26, de los cuales USD 120.000 corresponde a la deuda y USD 7.942,26 corresponden a los intereses.

Ejercicios Sección 2.6. Matemáticas Financieras

Interés simple

Los siguientes problemas se resuelven usando las expresiones analíticas para el interés simple

1. Calcule el valor acumulado de un préstamo de USD 1.000 a una tasa de interés simple del 4% anual durante:
a. Un año.
b. 3 años.
c. 8 meses.

2. Un fondo de empleados le presta a uno de sus trabajadores $12,000,000 a una tasa de interés simple del 1.4% mensual. Estimar el valor de la deuda para:
a. Un año después.
b. Cinco años después.
c. Veinte años después.

3. Una persona obtiene un crédito a interés simple en una tienda de ropa. Si la tasa de interés es del 14% mensual, y tres años después la deuda asciende EUR 426, cuál fue el valor inicial de crédito.

4. Después de 8 meses de haber obtenido un crédito, al señor Juan Pérez le informan que su deuda asciende a USD 1.944. Si el crédito fue pactado con una tasa de interés del 12%. Determine el capital inicial prestado.

5. A una central de riesgos llega un informe en el cual le informan que un usuario, a quien le habrían prestado USD 600, a una tasa de interés de 4% mensual, ya tenía una deuda que ascendía a USD 744. Cuánto tiempo de mora tiene este deudor.

6. Una persona necesita hacer un crédito por €3,000, y estima que a futuro puede obtener ganancias por € 4,200. Si un banco le presta a un interés simple del 2% mensual, durante cuánto tiempo podría usar este dinero.

7. Una entidad financiera le informa a un cliente que le puede prestar 10 monedas de oro durante 30 meses, pero debe devolverle 9 monedas más, dadas estas condiciones, cuál es le interés de este crédito.

8. Un amigo le pide a otro un préstamo por COP 25,000 durante seis meses y este último accede, pero al final le dice que le debe COP 55,000. Por cuánto interés mensual se perdió esta amistad.

9. Cuantos días le tomará que una inversión de USD 1.000 con una tasa de interés del 5% anual, convertirse a USD 1.025.

10. Cuantos días –o años–, le tomará a una inversión duplicarse en un banco que ofrece un interés simple del 4% anual.

Interés Compuesto

Los siguientes problemas se resuelven asumiendo un interés compuesto. Cuando no se especifique se puede asumir que es compuesto anual

11. Encuentre el valor acumulado de un capital de US$ 1.000 con una tasa de interés del 3% anual compuesto durante cuatro años, en cada uno de los tiempos de capitalización indicados:
a. anual. b. semestral.
c. Trimestral. d. mensual

12. Encuentre el valor acumulado de un capital de US$ 250,000 con una tasa de interés del 14% anual compuesto durante tres años, en cada uno de los tiempos de capitalización indicados:
a. anual.
b. semestral
c. mensual
d. diario.

13. Obtenga la tasa efectiva de un crédito que ofrece una tasa de interés del 12% nominal

compuesto, en los periodos que se muestran a continuación:

a. Semestral
b. Trimestral
c. mensual
d. Semanal
e. Diario

14. Obtenga la tasa efectiva de un crédito que ofrece una tasa de interés del 9% nominal compuesto, en los periodos que se muestran a continuación:

a. Semestral
b. Trimestral
c. mensual
d. Semanal
e. Diario

15. Obtenga la tasa efectiva de un crédito que ofrece una tasa de interés del 36% nominal compuesto, en los periodos que se muestran a continuación:

a. Semestral
b. Trimestral
c. mensual
d. Semanal
e. Diario

16. Una persona está interesada en hacer un préstamo de libre inversión y tiene tres ofertas bancarias. El primer banco le ofrece un interés efectivo del 12% anual, el segundo banco le ofrece un interés efectivo del 6% semestral y el último banco le ofrece una tasa de interés efectivo del 1% mensual compuesto mensual. Esta persona con base en estas tasas de interés efectivo, ¿qué banco debería escoger? Justifique su respuesta.

17. La señora Pérez decide invertir US$10.000 en un banco que ofrece una tasa de interés del 6% anual compuesto mensual. Si quiere obtener una ganancia de US$5,000, cuanto tiempo debe esperar.

18. Un inversionista decide poner un capital de €15,000 en una cuenta de altísimo riesgo que rinde al 12% mensual compuesto quincenal. Al cabo de tres meses, cuánto habrá subido su capital.

19. Para le mismo problema anterior, pero suponga ahora que la inversión se capitaliza es diariamente. Al cabo de tres meses, cuánto habrá subido su capital.

20. Las cesantías obtenidas por un trabajador suman $12,000,000, y decide guardarlas en un banco, que da un interés del 8% anual compuesto mensual. Si este trabajador desea que su capital aumente a $18,000,000, cuánto tiempo debe esperar.

21. En una decisión financiera importante, el señor Ramírez quiere que una inversión de US$3,000 dólares se dupliquen en 4 años, cuál es la tasa de interés anual que garantiza este monto.

22. Suponga ahora que el señor Ramírez quiere duplicar su inversión, pero en dos años, cuál es la tasa de interés anual que garantiza este monto.

23. Una familia tiene una inversión que en cinco años le devuelve enteramente su capital más los intereses. Si esta familia quiere comparar con ese dinero una casa que actualmente vale $96,000,000 y cuyo valor crece anualmente a un ritmo del 4% compuesto anual, cual es el valor que le debería dar la inversión.

24. Para su bono pensional, Don Jaime invirtió en un fondo de ahorro un capital de $16,000,000 que brinda un interés de 10% anual compuesto trimestral. Si don Jaime tiene 50 años y se pensiona a los 65 años, a cuánto debería ascender su bono.

25. Para el problema anterior, suponga que Don Jaime quiere que su bono pensional ascienda a $90 millones. ¿Cuánto tiempo debe esperar a partir de su edad de retiro?

26. En los últimos 4 años, el Fondo Americano creció a una tasa del 10.4% anual compuesta trimestral mientras que el Fondo La Amistad creció a una tasa de 10.5% anual compuesta semestral. ¿En qué fondo de inversión usted pondría su dinero? Justifique la respuesta.

27. Juan tiene un capital que quiere poner a producir y una entidad financiera le da dos opciones de inversión a largo plazo. La primera opción es comprar un inmueble cuyo valor se triplicará en 12 años, la segunda opción, para el mismo tiempo es adquirir un CDT para el mismo tiempo de retorno, que da un interés del 10% anual compuesto diariamente. Qué opción debe escoger Juan

28. Una entidad financiera, ofrece a sus usuarios una tasa de interés del 24% efectiva anual. Obtenga las tasas de interés efectiva semestral, trimestral, mensual, semanal y diario.

29. Una entidad financiera, ofrece a sus usuarios una tasa de interés del 12% efectiva anual. Obtenga las tasas de interés efectiva semestral, trimestral, mensual, semanal y diario.

30. Un padre preocupado por la educación de sus hijos, decide ahorrar en una entidad financiera bajo el modelo de ahorro programado. La entidad le paga un interés de 6% anual compuesto mensual y el padre tiene capacidad para ahorrar $250,000 mensuales. Dadas estas condiciones, determine el monto acumulado al cabo de 18 años.

31. Para el problema anterior, el mismo padre decide hacer un esfuerzo adicional y logra ahorrar $300,000 mensuales. Bajo esta nueva condición, cuál es el monto acumulado al cabo de los 18 años.

32. Una empresa capitalizadora de ahorros, ofrece una promoción para la adquisición de vehículo nuevo que consiste en un pago único de $4000,000, mas 60 cuotas iguales de $500,000. Si la empresa brinda un interés de 3% anual compuesto mensual, estime el valor del vehículo al final del ahorro

33. Con respecto al problema anterior, esta persona decide invertir los $4000,000 en un CDT que rinde el 8% efectivo anual en un banco externo, pero la empresa capitalizadora le dice que como ya no va a dar la cuota inicial, le debe bajar el interés al 2.5%. Bajo esta nueva modalidad, cuánto alcanza a ahorrar esta persona.

34. Finalmente, en relación con los problemas anteriores, el profesor de matemáticas le recomienda a esta persona que no invierta su dinero así y que, si quiere comprar el vehículo, ahorre mejor ese dinero en CDT o acciones a largo plazo que son más seguras. Bajo esta modalidad la persona encuentra un banco que le ofrece un ahorro programado a cinco años con un interés del 8.5%. Qué monto alcanza a ahorrar. Saque sus propias conclusiones.

35. Una familia quiere comprar un apartamento que vale $80,000,000 y que tiene una cuota inicial del 10%. Si la familia logra reunir la cuota y el resto lo financia con un banco a 20 años, con una tasa de interés del 12% anual compuesto mensual, determine el valor de la cuota.

36. Con respecto al problema anterior, un segundo banco decide ofrecerle una mejor tasa de interés, bajándola al 8% anual compuesto mensual. Determine para estas nuevas condiciones, la cuota que tocaría pagar.

37. Las políticas de préstamos para un banco, estipulan que el monto máximo que le pueden prestar a una familia corresponde a una cuota que no supere el 30% del total de los ingresos brutos de la familia. En este caso una familia compuesta por dos personas que trabajan y cuyos salarios suman $2,000,000, quieren comprar una casa de $85,000,000 a 10 años. Determine el monto máximo que le puede prestar el banco si la tasa es del 9% anual compuesto mensual y el excedente o cuota inicial que debería invertir esta familia.

38. La familia de problema anterior, tiene un ahorro de $20,000.000 para la cuota inicial, sin embargo, deben aumentar el plazo para poder alcanzar a pagar la casa con el préstamo bancario. Estime el valor máximo que le puede prestar el banco para un plazo de 15 años, 20 años y 25 años.

39. Compras por tarjeta de crédito tiene uno de los intereses más altos del mercado, normalmente cercanos a techo de usura. Suponga que se quiere hacer la compra de un celular que vale $3,600, 000 con una tarjeta de crédito que tiene un interés del 3% anual compuesto mensual. Si se difiere le préstamo a 6 cuotas determine el plan de pagos.

40. Una persona compra con tarjeta de crédito un televisor que vale $3,600,000, diferido a 36 cuotas, determine el monto total pagado si adicional al préstamo que es pactado al 32% anual compuesto mensual, el usuario debe paga $20,000 de cuota mensual de manejo y un seguro de $8,000 durante el tiempo que dure el crédito.