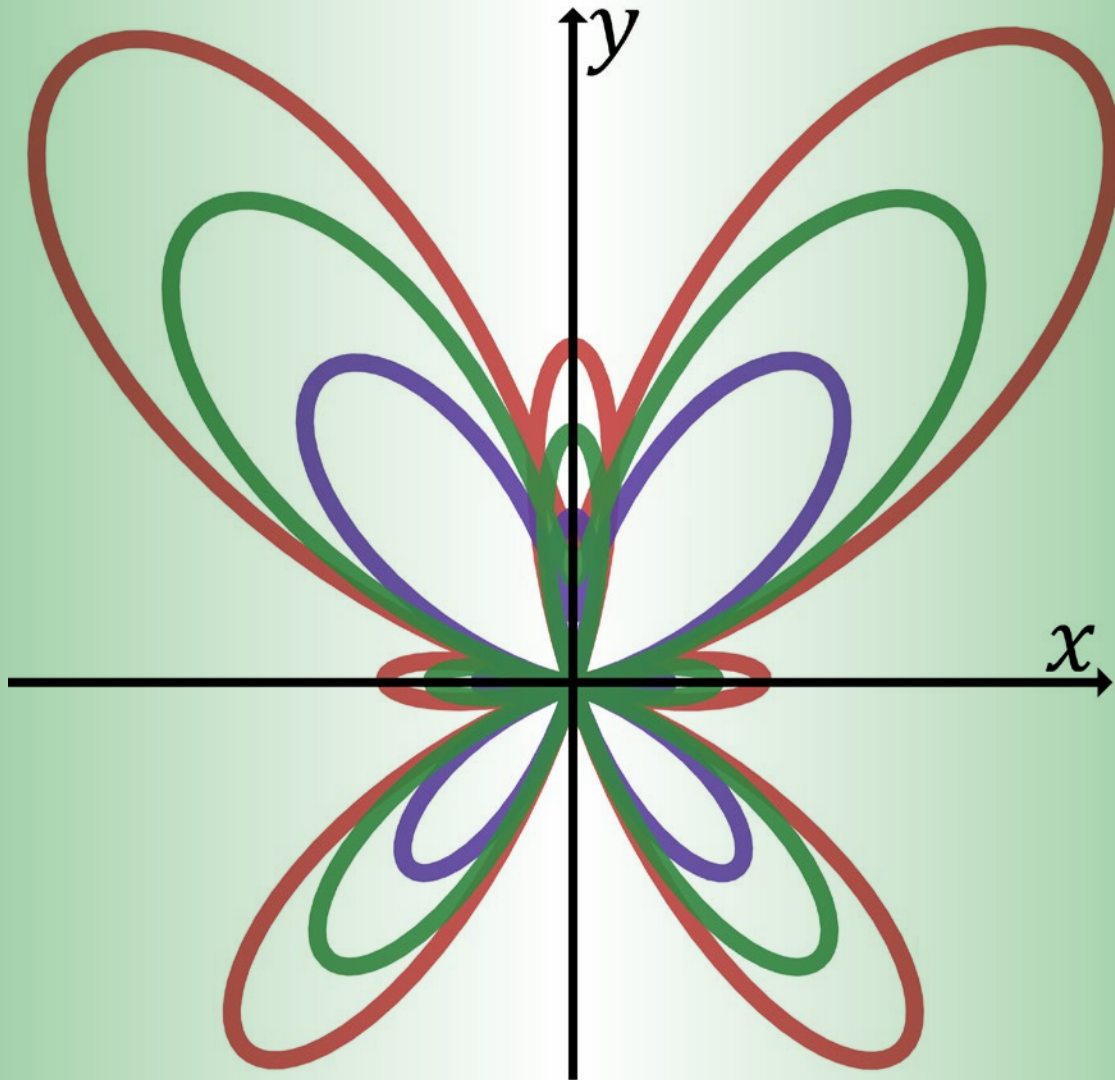


# PRE-CÁLCULO

PARA INGENIERÍAS, CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS



*Juan Carlos Henao López*  
*Euclides Murcia Londoño*



Universidad  
**CATÓLICA**  
de Pereira

Editorial

# PRE-CÁLCULO

PARA INGENIERÍAS, CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS

JUAN CARLOS HENAO LÓPEZ  
EUCLIDES MURCIA LONDOÑO



*Facultad de Ciencias Básicas  
e Ingenierías*

Pre-cálculo para ingenierías, ciencias económicas y administrativas: Murcia Londoño, Euclides; Henao López, Juan Carlos.

Autores

Euclides Murcia Londoño; Juan Carlos, Henao López,

-- 1 a. ed. -- Colombia: Pereira. 180 p.

ISBN: 978-958-8487-97-7 (Electrónico).

DOI: 10.31908/eucp.81.

1. Enseñanza de las matemáticas. 2. Cálculo 3. Pensamiento numérico. 4. Ecuaciones .  
5. Funciones.

I. Universidad Católica de Pereira.

CDD: 510 - Matemáticas

Catalogación en la publicación – Universidad Católica de Pereira.

Primera edición 2022

### **Universidad Católica de Pereira**

Rector: Pbro. Behitman Alberto Céspedes De los Ríos

Vicerrector Académico: Nelson Londoño Pineda

Directora (E) de Investigaciones e Innovación: Daniela Torres Morimitsu

### **Diagramación:**

GRÁFICAS BUDA, SAS.

Calle 15 No. 6-23 PBX: 335 72 35

Pereira – Risaralda - Colombia

Reservados todos los derechos

© Universidad Católica de Pereira, 2020

Carrera 21 No. 49-95 Pereira

Teléfono 312 40 00

[ucp@ucp.edu.co](mailto:ucp@ucp.edu.co)

[www.ucp.edu.co](http://www.ucp.edu.co)

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento de la Universidad Católica de Pereira, ni genera su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por los derechos de autor y conexos contenidos en la obra, así como por la eventual información sensible publicada en ella.

Pereira, Colombia

Diciembre de 2022

# TABLA DE CONTENIDO

	<b>INTRODUCCIÓN HISTÓRICA A LAS MATEMÁTICAS</b>	<b>6</b>
<b>1.</b>	<b>ECUACIONES E INECUACIONES</b>	<b>10</b>
<b>1.1</b>	<b>Ecuaciones lineales</b>	<b>10</b>
<b>1.2</b>	<b>Resolución de sistemas de ecuaciones lineales</b>	<b>18</b>
	Eliminación por Sustitución	18
	Eliminación por igualación	19
	Eliminación por reducción	21
	Análisis gráfico	22
<b>1.3</b>	<b>Fórmulas y relaciones algebraicas</b>	<b>30</b>
	Fórmulas	30
	Relaciones entre variables	33
<b>1.4</b>	<b>Problemas que se resuelven con ecuaciones lineales</b>	<b>40</b>
	Modelación	40
<b>1.5</b>	<b>Ecuaciones cuadráticas</b>	<b>50</b>
	Solución por factorización	50
	Solución por medio de fórmula general	53
	Problemas que se resuelven con ecuaciones de segundo grado	56
<b>1.6</b>	<b>Inecuaciones</b>	<b>60</b>
	Algebra elemental de conjuntos	61
	Inecuaciones	63
	Aplicaciones de las inecuaciones	67
<b>2</b>	<b>FUNCIONES</b>	<b>72</b>
<b>2.1</b>	<b>Introducción al concepto de funciones</b>	<b>72</b>
	Funciones pares, impares y compuestas.	76

<b>2.2</b>	<b>Función lineal</b>	<b>86</b>
	Razones de cambio	88
	Rectas paralelas y perpendiculares	89
<b>2.3</b>	<b>Funciones polinomiales y racionales</b>	<b>100</b>
	Función Cuadrática	100
	Solución de una ecuación de segundo grado	101
	Puntos extremos de una función cuadrática.	102
	Funciones polinomiales de orden superior.	104
	Ceros polinomiales	106
	Funciones racionales	107
<b>2.4</b>	<b>Funciones y ecuaciones trigonométricas</b>	<b>116</b>
	Conversión entre sistemas para medir ángulos	116
	Las Funciones trigonométricas	117
	Resolución de triángulos rectángulos usando trigonometría	118
	Teoremas Trigonométricos	121
	Identidades trigonométricas	123
	Solución de ecuaciones trigonométricas.	125
	Gráficas de las funciones trigonométricas	127
<b>2.5</b>	<b>Funciones logarítmica y exponencial</b>	<b>134</b>
	Función exponencial	134
	Función exponencial natural	135
	Función logarítmica	137
<b>2.6.</b>	<b>Matemáticas financieras</b>	<b>146</b>
	Interés simple	146
	Interés compuesto	147
	Interés compuesto continuo	150
	Tasa de interés efectiva	151
	Conversión entre tasas de interés efectiva	154
	Anualidades	155
	Amortización de préstamos	157
	Plan de amortización	158
	<b>RESPUESTA A LOS EJERCICIOS IMPARES</b>	<b>164</b>

# INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS

La matemática en todas sus categorizaciones –la aritmética, la geometría, la estadística y el cálculo– es una herramienta eminentemente cultural basada en principios lógicos, que sirve para comprender y analizar el cosmos y las relaciones que el hombre tiene con este, razón por la cual está sujeta a cambios y modificaciones en respuesta a las necesidades de cada civilización en su momento histórico y aunque en principio las matemáticas son una ciencia exacta y objetiva, su desarrollo la ha vuelto más precisa al momento de describir diversas situaciones de índole científica, tecnológica, económica y natural, por esta razón, para comprender un poco mejor lo que es el pensamiento matemático, es preciso tomar algunos elementos históricos de su desarrollo.

Existe un aspecto inherente a la condición humana y es la necesidad de comprender todo lo que lo rodea para poder así controlarlo y transformarlo eventualmente, pero la comprensión es un fenómeno de abstracción que implica asociar símbolos a situaciones, pero también es preciso asociar símbolos a cantidades y la manera como estos se relacionan es lo que constituye las bases de las operaciones lógicas y las matemáticas.

Atendiendo a la división cronológica realizada por Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), el desarrollo histórico de las matemáticas puede ubicarse en cuatro periodos diferenciados.

- ⊕ Nacimiento de las matemáticas.
- ⊕ Matemáticas elementales.
- ⊕ Matemáticas de las magnitudes variables.
- ⊕ Matemáticas contemporáneas.

Durante el periodo del nacimiento de las matemáticas aparecen los primeros vestigios de sistemas matemáticos estructurados en las civilizaciones helénicas, china y egipcia; los babilonios 4000 años antes del nacimiento de Cristo crean un sistema de numeración de base 60, que emplean ampliamente en sus construcciones, en la agricultura y en la astronomía; de la civilización egipcia por su parte, se cuenta con dos grandes papiros con elementos básicos de la matemática y la geometría que sumado con las inscripciones en piedras halladas en las tumbas, dan cuenta de un profundo dominio del sistema de numeración, que igualmente les sirve como herramienta de cálculo para sus construcciones, especialmente en el caso de las pirámides y los templos. La civilización helena (griegos) en su máximo esplendor, recogen muchos de los adelantos científicos,

## SISTEMA DE NUMERACIÓN EGIPCIO

*Los egipcios tenían un sistema de numeración que era una combinación del sistema decimal con el sistema cuneiforme.*

	1
∩	10
⊙	100
⊥	1.000
∟	10.000
🐸	100.000
👤	1.000.000

*Cada múltiplo de 10 lo representaban con un jeroglífico, y para otras cantidades utilizaban el múltiplo de 10 más cercano adicionando iconos hasta completar el número.*

## Introducción a las Matemáticas

humanísticos y tecnológicos de las civilizaciones contemporáneas a ella e igualmente de civilizaciones más antiguas, lo que les permite realizar importantes avances en la aritmética, el álgebra y la geometría; entre sus más importantes pensadores se destacan Tales de Mileto, Arquímedes y Pitágoras.

En el periodo de las matemáticas elementales, que se extiende aproximadamente desde el siglo V a.C. hasta el siglo XVI, se obtienen grandes logros en el estudio de las matemáticas constantes, la geometría analítica y el análisis infinitesimal. La civilización árabe empieza a traducir a su idioma los textos griegos, impulsando en gran medida el desarrollo científico y tecnológico por lo que son reconocidos; uno de los pensadores más representativos es Mohammed Musa Al-Khwarizmi con sus dos obras ampliamente difundidas, el Brahmagupta que es una reproducción exacta del sistema de numeración hindú, y el Hisab al-jabr wa-al-muqabala, más conocido por la palabra latina álgebra. A su vez, Europa renacentista retoma lo dejado por los musulmanes siendo Leonardo de Pisa (Fibonacci) uno de los representantes más connotados de este periodo; escribe su obra "Liber Abaci" donde expone el sistema de numeración posicional hindú, propone algunas operaciones con fracciones, crea aplicaciones a cálculos comerciales como la regla de tres simple y compuesta, la división proporcional, problemas de progresiones siendo reconocido por la famosa "sucesión de Fibonacci" y el famoso problema de los conejos. Ya en el siglo XV, época de las grandes navegaciones, la trigonometría fue separada de la astronomía, alzándose como ciencia independiente de la mano de Regiomontano, que trató de una manera sistemática todos los problemas sobre la determinación de triángulos planos y esféricos.

$$1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow \\ \rightarrow 13 \rightarrow 21 \rightarrow 35 \rightarrow \dots$$

*Figura 1.1. Serie de Fibonacci.*

Pero fue François Viète quien propone un sistema de símbolos algebraicos con el cual es posible la expresión de ecuaciones y sus propiedades mediante fórmulas generales. Para hacer más fáciles los cálculos, matemáticos como Copérnico, Kepler y Tycho Brahe construyen tablas trigonométricas, fundamentales para otros desarrollos posteriores.

El periodo de las matemáticas variables que va hasta mediados del siglo XIX, nace con las magnitudes variables en la geometría analítica propuesto por Renato Descartes, igualmente en esta época aparecen la Royal Society y la Real Academia de París, como comunidades científicas que impulsan enormemente el desarrollo científico de toda Europa, siendo dos de sus representantes más connotados Gottfried Leibniz e Isaac Newton, quienes desarrollan de forma paralela e independiente lo que se conocería con el nombre de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, sin embargo es a Newton a quien se le inmortaliza por sus aportes en la física y en la matemática gracias a su teoría de las fluxiones que es la teoría precursora del cálculo, a la teoría

---

**Introducción a las Matemáticas**

de la gravitación universal, que explica con un sustento teórico-científico el movimiento de los cuerpos, especialmente el de los planetas y su tratado de luz y óptica, donde expone la naturaleza la luz.

Posteriormente aparecen grades matemáticos como Lagrange, D'Alembert, Laplace, Carnot, Euler y Gauss, quienes, tomando los descubrimientos de Newton, desarrollan el cálculo y crean nuevas ramas como son el cálculo vectorial, teoría de probabilidades, teoría de conjuntos, el álgebra lineal, el análisis funcional, el cálculo de las variaciones, la geometría proyectiva y descriptiva, por nombrar solo algunas.



**Figura 1.2.** Evariste Galois

Imagen tomada de : <https://www.buscabiografias.com/>

El último periodo que es actual, el de las matemáticas contemporáneas, reconociéndose como representantes a Abel y Galois quienes hacen aportes sobre la resolución de ecuaciones algebraicas en radicales, introduciendo el concepto de grupo. Igualmente se hacen importantes aportes a la teoría de cuerdas, la teoría de números y a la mecánica, a la teoría de funciones y a la teoría moderna de conjuntos; además se crean los estudios de variable compleja con los que es posible modelar sistemas físicos complejos.

Como se puede ver, la matemática es una disciplina que lejos está de ser estática, de hecho es todo lo contrario, frecuentemente se define a sí misma, reevalúa sus teorías y postulados y sirve como sustento a muchas otras áreas del conocimiento como la física, la química, las ciencias sociales, permea disciplinas como la medicina y la psicología y ni que hablar de todas las ingenierías, pues es la matemática la herramienta que permite la construcción y explicación de modelos que predicen sistemas o comportamientos.

---



**Introducción a las Matemáticas**

En este sentido es que se debe asumir las matemáticas, como herramienta de aproximación al conocimiento científico, basada en principios lógicos y objetivos que han evolucionado y que desde luego seguirá evolucionando en la medida que se vayan corriendo las fronteras del saber humano.

El curso de matemáticas I de la Universidad Católica de Pereira, para estudiantes de pregrado en los programas de Ingeniería Industrial, Ingeniería en Sistemas y Telecomunicaciones, Administración de Empresas, Tecnología en Desarrollo de Software, está diseñado para que el estudiante desarrolle por sí mismo, herramientas de pensamiento complejo como el análisis, la inferencia y la síntesis al igual que el pensamiento crítico, a fin de que estos sirvan como sustento para la aplicación en otras disciplinas asociados a su saber científico.

---



VIGILADO MINEDUCACIÓN

Universidad  
**CATÓLICA**  
de Pereira

Editorial