

VII

Encuentro Internacional sobre
la Enseñanza de Ciencias
Exactas y Naturales

INVESTIGACION
EN
CIENCIAS
BÁSICAS



Energía de enlace en un punto cuántico cilíndrico con impureza en presencia de un campo magnético uniforme¹

Binding energy in an impurity cylindrical quantum dot in the presence of a uniform magnetic field

Portacio-Lamadrid, Alfonso², Rasero-Causil, Diego³ y Arias-Hernández, Jesús⁴

Resumen

Se estudia teóricamente la energía de enlace en un punto cuántico cilíndrico (CDQ), de con una impureza donadora en un campo magnético uniforme, aplicado en la dirección axial del cilindro. Los cálculos se realizaron en las aproximaciones de masa efectiva y de sistemas cuánticos de dos niveles. Usando el método variacional, se encontraron las energías de enlace y las funciones de onda de los estados $1s$ – like y $2p_z$ – like para diferentes posiciones de la impureza dentro del CQD. Se encontró que la energía de enlace es máxima en el centro del CQD y disminuye a medida que la impureza se mueve radial y/o axialmente.

Palabras clave: punto cuántico cilíndrico, campo magnético, energía de enlace.

- 1 Cálculo de la generación de segundo armónico en nanoestructuras usando una ecuación maestra en la forma de Lindblad código C07-F02-004 2022.
- 2 Universidad de los Llanos; código ORCID: 0000-0002-5495-7102. Contacto: aportacio@unillanos.edu.co.
- 3 Universidad Surcolombiana; código ORCID: 0000-0002-6583-0422. Contacto: diego.rasero@usco.edu.co.
- 4 Universidad de los Llanos; código ORCID: 0000-0002-5775-0617. Contacto: jariar@unillanos.edu.co.

Abstract

The binding energy in a cylindrical quantum dot (CDQ) of GaAs with a donor impurity in a uniform magnetic field, applied in the axial direction of the cylinder is theoretically studied. The calculations were made in the effective mass and two-level quantum system approximations. Using the variational method, the binding energies and the wave functions of the 1s-like and 2pz-like states were found for different positions of the impurity within the CQD. The binding energy was found to be maximum at the center of the CQD and decreases as the impurity moves radially and/or axially.

Keywords: cylindrical quantum dot, magnetic field, binding energy.

I. INTRODUCCIÓN

Los recientes avances en nanotecnología han permitido diseñar y producir una gran variedad de sistemas cuánticos de baja dimensionalidad [1], que han contribuido con la evolución de la nanoelectrónica y el desarrollo de tecnologías [2, 4]. Cuando se agregan átomos de impureza a nanoestructuras se cambia el número de portadores de carga en la nanoestructura, produciendo cambios en las propiedades ópticas y electrónicas. Por tal motivo, las propiedades de impurezas en nanoestructuras son objeto de estudio por diversos autores. Ribeiro y Latgé [5] realizaron un estudio sobre impurezas en QD e investigaron la energía de enlace de una impureza donadora dentro de un QD cilíndrico y un QD esférico, encontrando que para volúmenes iguales la energía de enlace no depende de la geometría del sistema cuántico nanoestructurado. También se encuentra el efecto del campo magnético sobre la energía de enlace de impurezas donadoras en hilos cuánticos [6, 8].

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

El sistema consiste de una impureza confinada en un CQD en presencia de un campo magnético \mathbf{B} orientado en la dirección axial del CQD. El Hamiltoniano \hat{H}_0 de la impureza es [7, 9]:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m^*} \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e^2}{\epsilon|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + V_{conf}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(\rho - \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}$, \mathbf{r}_0 es la posición de la impureza medida desde el centro de CQD, ϵ es la permitividad dieléctrica de la nanoestructura, m^* es la masa efectiva del electrón, $\hat{\mathbf{P}}$ es el operador momento lineal, e es la carga del electrón, c es la velocidad de la luz en el vacío, \mathbf{A} es el vector potencial del campo magnético, $V_{conf}(\mathbf{r})$ es un potencial de confinamiento finito definido como sigue:

$$V_{conf}(\mathbf{r}) = V_{conf}(\rho, \varphi, z) = V_\rho(\rho) + V_z(z), \quad (2)$$

$$V_\rho(\rho) = \begin{cases} V_0 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2, & \rho \leq R \\ V_0, & \rho > R \end{cases} \quad (3)$$

$$V_z(z) = \begin{cases} 0, & |z| \leq \frac{L}{2} \\ V_0, & |z| > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (4)$$

R y L son el radio y la longitud del cilindro, respectivamente. Usando coordenadas cilíndricas y unidades atómicas reducidas se definen las siguientes magnitudes: radio efectivo de Borh $a^* = \frac{\hbar^2 \epsilon}{m^* e^2}$ para la longitud y Rydberg $R^* = \frac{m^* e^4}{2 \hbar^2 \epsilon^2}$ para la energía. La ec. (1), ahora se puede escribir en la forma:

$$\hat{H}_0(\rho, \phi, z) = \hat{H}(\rho, \phi) + \hat{H}(z) - \frac{2}{\sqrt{(\rho-\rho_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \quad (5)$$

$$\hat{H}(\rho, \phi) \psi_1(\rho, \phi) = \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - i\gamma \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{4} \gamma^2 \rho^2 + V_\rho(\rho) \right] \psi_1(\rho, \phi) = E_1 \psi_1(\rho, \phi), \quad (5.1)$$

$$\hat{H}(z) \psi_2(z) = \left[-\frac{d^2}{dz^2} + V_z(z) \right] \psi_2(z) = E_2 \psi_2(z) \quad (5.2)$$

Las ec. (5.1) y (5.2) representan las ecuaciones de Schrödinger independientes del tiempo en las direcciones radial y axial del punto cuántico, $\gamma = \frac{e\hbar B}{2m^* cR}$, es una medida adimensional del campo magnético. La solución de la ecuación ec. (5.1) es conocida [7, 10] y está dada por:

$$\psi_1(\rho, \phi) = \begin{cases} e^{-\beta_1 R^2} {}_1F_1(a_i, 1+m, 2\beta_1 \rho^2) e^{im\phi}, & \rho \leq R \\ N_1 \left\{ \begin{aligned} & e^{(\beta_2 - \beta_1) R^2} \frac{{}_1F_1(a_i, 1+m, 2\beta_1 R^2)}{{}_1U_1(a_e, 1+m, 2\beta_2 R^2)} {}_1U_1(a_e, 1+m, 2\beta_2 \rho^2) e^{im\phi}, \rho \geq R \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (6)$$

donde, $\beta_1 = \frac{\sqrt{4V_0 + (\gamma R)^2}}{4R}$, $\beta_2 = \frac{\gamma}{4}$, $a_i = \frac{1}{2} - \frac{E_1}{8\beta_1}$, $a_e = \frac{1}{2} - \frac{(E_1 - V_0)}{8\beta_2}$, m ,

es el número cuántico magnético, N_1 es la constante de normalización. ${}_1F_1(a, b, x)$ y ${}_1U_1(a, b, x)$ son funciones hipergeométricas confluentes. La solución de la ec. (5.2) también es conocida [11] y para el estado base tiene la siguiente expresión:

$$\psi_2(z) = N_2 \begin{cases} \cos\left(k_1 \frac{L}{2}\right) e^{k_2 \left(\frac{L}{2} + z\right)}, & z < -\frac{L}{2}, \\ \cos(k_1 z), & -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \\ \cos\left(k_1 \frac{L}{2}\right) e^{k_2 \left(\frac{L}{2} - z\right)}, & z > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (7)$$

$k_1 = \sqrt{E_2}$, $k_2 = \sqrt{V_z(z) - E_2}$. El valor de la energía se determina resolviendo la ec. (8).

$$\text{Tan}\left(k_1 \frac{L}{2}\right) = \frac{k_2}{k_1}. \quad (8)$$

Para calcular la energía de la impureza en CQD para los estados 1s-like y 2Pz-like se utiliza el método variacional [12], tomando las siguientes funciones de prueba:

$$\Psi_{1s}(\rho, \phi, z) = N_{1s} \psi_1(\rho, \phi) \psi_2(z) \Gamma_{1s}(r, \lambda_{1s}), \quad (9)$$

$$\Psi_{2Pz}(\rho, \phi, z) = N_{2Pz} \psi_1(\rho, \phi) \psi_2(z) \Gamma_{2Pz}(r, \lambda_{2Pz}), \quad (10)$$

donde, $m = 0$ para $\psi_1(\rho, \phi)$, N_{1s} y N_{2Pz} para y son constantes de normalización. Las funciones $\Gamma_{1s}(r, \lambda_{1s})$ y $\Gamma_{2Pz}(r, \lambda_{2Pz})$ son orbitales hidrogenoides para los estados 1s-like y 2Pz-like, respectivamente, detallados en la ref. [13]. λ_{1s} y λ_{2Pz} son parámetros variacionales que se obtienen minimizando el valor esperado del Hamiltoniano descrito en la ec. (5) y corresponden a la energía de la impureza, esto es;

$$E_{imp}^x = \left(\frac{\langle \Psi_x(\rho, \phi, z) | \hat{H} | \Psi_x(\rho, \phi, z) \rangle}{\langle \Psi_x(\rho, \phi, z) | \Psi_x(\rho, \phi, z) \rangle} \right)_{\min(\lambda_x)} \quad (11)$$

donde, E_{imp}^x es la energía de la impureza en el CQD para el estado x .

La energía de enlace $E_{b,x}$ de una impureza hidrogenoide es la energía necesaria para mover su electrón desde el estado x de la impureza hasta el primer nivel de la sub-banda de conducción. El cálculo de la energía de enlace se realiza por medio de la aplicación de la ec. (12) [7]:

$$E_{b,x} = E_0 - E_{imp}^x, \quad (12)$$

donde, $E_0 = E_1 + E_2$, corresponde a la energía del primer nivel de la sub-banda de conducción del punto cuántico CQD de $GaAs/Ga_{1-x}Al_xAs$ con campo magnético uniforme aplicado en la dirección axial del cilindro.

Las figuras 1 y 2 muestran la energía de enlace de una impureza donadora, localizada en el centro ($\rho_0 = 0$ y $z_0 = 0$) del CQD con $R = 2 a_0$ y $L = a_0$ en los estados $1s$ -like y $2Pz$ -like, respectivamente, como una función del campo magnético uniforme. Resultados teóricos similares han sido reportados para el estado $1s$ -like en las ref. [8] en un QD de GaAs, en la ref. [10], para un hilo cuántico de $GaAs/Ga_{1-x}Al_xAs$ y en la ref. [9] para un QD esférico de GaAs. En el estado $2Pz$ -like se han realizado estudios en hilos cuánticos cilíndricos de GaAs [6].

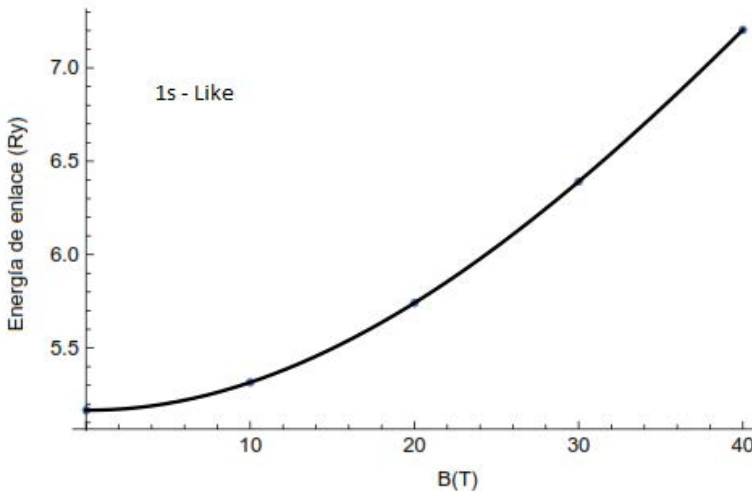


Fig. 1. Energía de enlace del estado $1s$ -like de una impureza donadora, localizada en el centro ($\rho_0 = 0$ y $z_0 = 0$) de un CQD con $R = 2 a_0$ y $L = a_0$, como una función del campo magnético uniforme

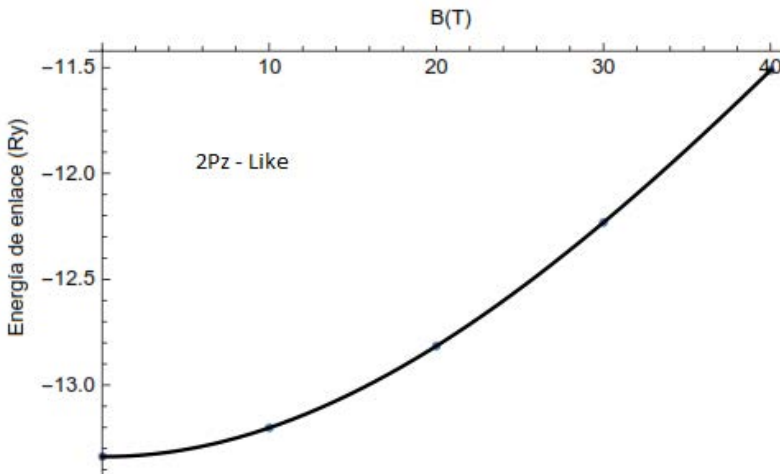


Fig. 2. Energía de enlace del estado $2Pz$ -like de una impureza donadora, localizada en el centro ($\rho_0 = 0$ y $z_0 = 0$) de un CQD con $R = 2 a_0$ y $L = a_0$, como una función del campo magnético uniforme

Las figuras 3 y 4 presentan la energía de enlace de los estados $1s$ -like y $2Pz$ -like, respectivamente, de una impureza donadora como una función de su posición axial considerando, $\rho_0 = 0$, $B = 10 T$, $R = 2 a_0$ y $L = a_0$. De acuerdo con Khordad y Bahramiyan [13], este punto máximo se relaciona con máxima densidad de probabilidad de encontrar el electrón en el estado cuántico respectivo.

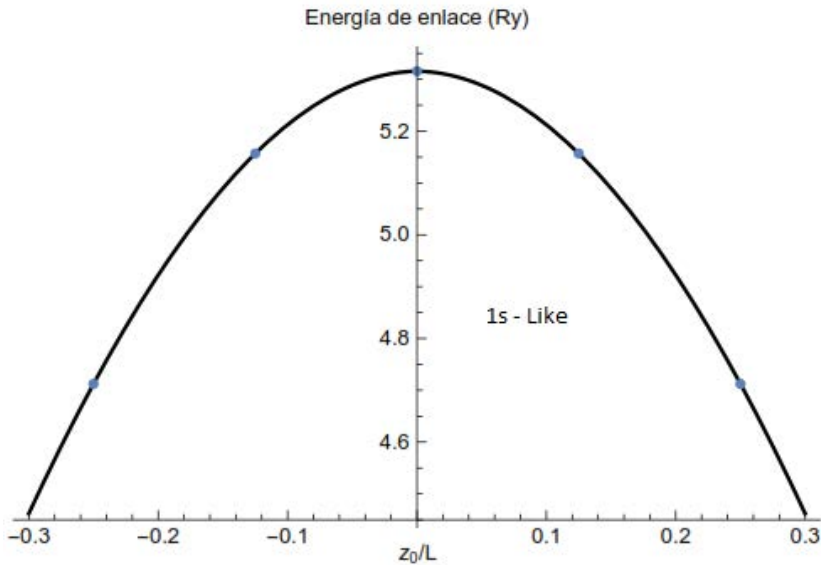


Fig. 3. Energía de enlace del estado $1s$ -like para una impureza donadora como una función de la posición axial de la impureza, $\rho_0 = 0$, $B = 10 T$, $R = 2 a_0$ y $L = a_0$

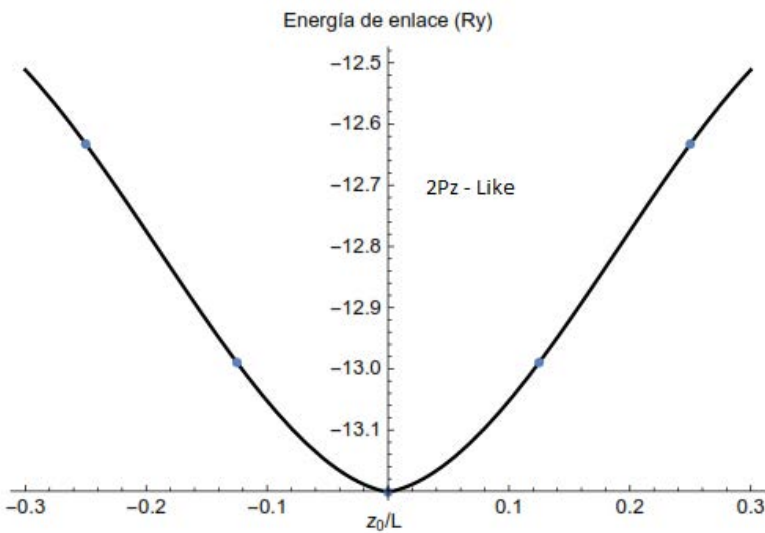


Fig. 4. Energía de enlace del estado $2Pz$ -Like para una impureza donadora como una función de la posición axial de la impureza, $\rho_0 = 0$, $B = 10 T$, $R = 2 a_0$ y $L = a_0$

El efecto de la posición radial sobre la energía de enlace de los estados $1s$ -like y $2Pz$ -like se presenta en las figuras 5 y 6, respectivamente, teniendo en cuenta que $z_0 = 0$, $B = 10 T$, $R = 2 a_0$ y $L = a_0$. Esto se debe a que las distancias de ion – electrón de la impureza aumentan cuando la posición de la impureza se aproxima a las barreras potenciales.

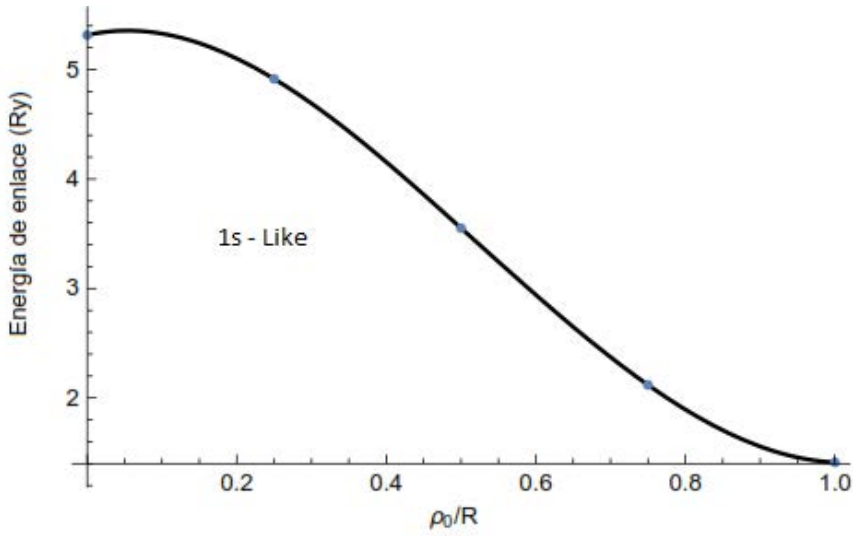


Fig. 5. Energía de enlace del estado $1s$ -like de una impureza donadora como una función de su posición en la dirección radial. $z_0 = 0$, $B = 10 T$, $R = 2 a_0$ y $L = a_0$

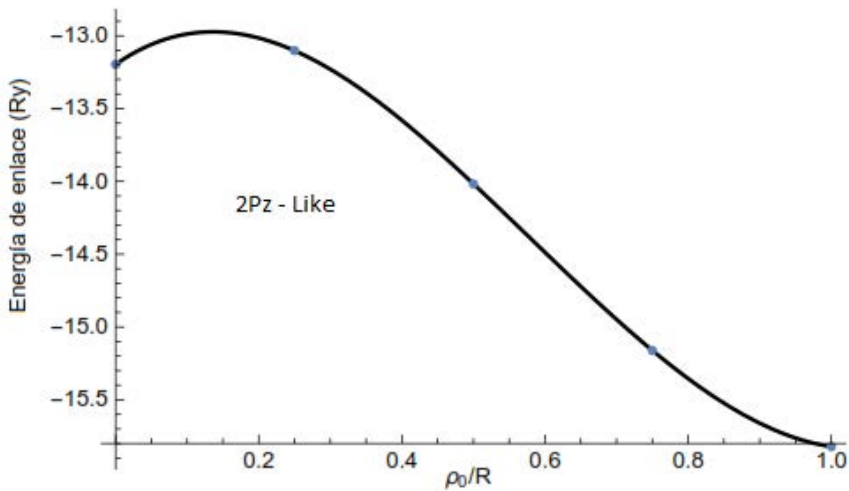


Fig. 6. Energía de enlace del estado $2Pz$ -Like de una impureza donadora como una función de la posición en la dirección radial $z_0 = 0$, $B = 10 T$, $R = 2 a_0$ y $L = a_0$

III. CONCLUSIONES

Se encontró que el incremento en la intensidad del campo magnético y el desplazamiento de la impureza hacia el centro del CQD generan un corrimiento al azul en las energías de enlace de los estados considerados.

REFERENCIAS

- [1] G. Rezaei, S. S. Kish, B. Vaseghi and S. F. Taghizadeh, “Optical rectification coefficient of a two-dimensional parabolic quantum dot: Effects of hydrogenic impurity, external fields, hydrostatic pressure and temperature”, *Physica B: Condensed Matter*, 451, pp. 1-6, 2014.
- [2] B. Vaseghi, M. Sadri, G. Rezaei and A. Gharaati, “Optical rectification and third harmonic generation of spherical quantum dots: Controlling via external factors”. *Physica B: Condensed Matter*, 457, pp. 212-217, 2015.
- [3] G. Wang, “Highly efficient third-harmonic generation from resonant intersubband transitions in core/shell spherical quantum dots”, *Optics Communications*, 355, pp. 1-5, 2015.
- [4] M. Akimoto, T. Toyoda, T. Okuno, S. Hayase and Q. Shen, “Effect of defects in TiO₂ nanotube thin film on the photovoltaic properties of quantum dot-sensitized solar cells”, *Thin Solid Films*, 590, pp. 90-97, 2015.
- [5] F. J. Ribeiro and A. Latge, “Impurities in a quantum dot: a comparative study”, *Physical Review B*, 50(7), 4913, 1994.
- [6] P. Villamil, N. Porrás-Montenegro and J. C. Granada, “Infrared transitions between hydrogenic states in cylindrical GaAs quantum-well wires under applied magnetic fields”, *Physical Review B*, 59(3), 1605, 1999.

[7] P. Villamil, “Donor in cylindrical quantum well wire under the action of an applied magnetic field”, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 42(9), pp. 2436-2440, 2010.

[8] C. Bose and C. K. Sarkar, “Binding Energy of Impurity States in Spherical GaAs–Ga_{1-x}Al_xAs Quantum Dots”, *Physica status solidi (b)*, 218(2), pp. 461-469, 2000.

[9] S. V. Branis, G. Li and K. K. Bajaj, “Hydrogenic impurities in quantum wires in the presence of a magnetic field”, *Physical Review B*, 47(3), 1316, 1993.

[10] R. M. Eisberg and R. M. Eisberg, *Fundamentos de física moderna*, 1992.

[11] C. Cohen-Tannoudji and B. Diu, F. Laloë *Quantum mechanics*, 1977.

[12] A. Latgé, N. Porrás-Montenegro and L. E. Oliveira, “Infrared transitions between hydrogenic states in cylindrical GaAs-(Ga, Al)As quantum-well wires”, *Physical Review B*, 45(16), 9420, 1992.

[13] R. Khordad, H. Bahramiyan, “Impurity position effect on optical properties of various quantum dots”. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 66, pp. 107-115, 2015.

Biografías

Autor 1: Alfonso Andrés Portacio Lamadrid

Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Sucre-Colombia; Magíster en Ciencias Físicas de la Universidad de Córdoba-Colombia; Profesional en Física de la Universidad de Córdoba-Colombia, Profesor titular de la Universidad de los Llanos-Colombia.

Áreas de investigación: óptica cuántica y sistemas cuánticos abiertos.

Autor 2: Diego Alejandro Rasero Causil

Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Sucre-Colombia; Magíster en Ciencias Físicas de la Universidad de Córdoba-Colombia; Profesional en Física de la Universidad de Córdoba-Colombia; Profesor asociado de la Universidad de los Surcolombiana-Colombia.

Áreas de investigación: sistemas cuánticos abiertos.

Autor 3: Jesús Daniel Arias Hernández

Magíster en Física de la Universidad de Rusia de la Amistad de los Pueblos; Profesional en Física la Universidad de Rusia de la Amistad de los Pueblos; Profesor titular de la Universidad de los Llanos-Colombia.

Áreas de investigación: óptica cuántica y sistemas cuánticos abiertos.

Cálculo de los modos vibracionales de una viga en voladizo con Maple y COMSOL: Metodología de confiabilidad de verificación computacional*

Computation of the vibrational modes of a cantilever beam with Maple and COMSOL: Computational verification reliability methodology

Herrera-Arroyave, Jorge Enrique, Arias Mateus, Diego Fernando y Medina Barreto, Milton Humberto³

Resumen

En este trabajo se presenta el cálculo de los modos vibracionales de una viga en cantiléver, mediante dos métodos diferentes: el método analítico, usando el software Maple, y el método numérico, usando el software COMSOL Multiphysics. El método analítico se basa en el teorema de Euler-Bernoulli para vigas en flexión. Asumiendo que la viga no está sometida a carga externa y que no tiene amortiguamiento, se puede obtener una ecuación de movimiento diferencial homogénea. La solución de esta ecuación se puede expresar en una ecuación característica de valores propios, lo que permite calcular los modos vibracionales de la viga. El método numérico se basa en el método de elementos finitos. Se construye un modelo de la viga en el software COMSOL y se aplica un análisis de frecuencia propia, para calcular los modos vibracionales. Para verificar la confiabilidad de los resultados, se comparan los obtenidos con los dos métodos. Los resultados coinciden con un error inferior al 1%, lo que indica que ambos métodos son confiables. El cálculo de los modos vibracionales de una viga en cantiléver es un problema importante en el diseño de

estructuras. El método analítico es una forma eficiente de calcular los modos vibracionales, pero puede ser inexacto en algunos casos. El método numérico es más preciso, pero requiere más tiempo de cálculo. En este trabajo se ha demostrado que el método analítico es confiable para calcular los modos vibracionales de una viga en cantiléver. El método analítico es una buena opción para calcular los modos vibracionales de una viga en cantiléver, cuando se requiere un cálculo rápido y preciso. El método numérico es una buena opción para calcular los modos vibracionales de una viga en cantiléver, cuando se requiere una precisión mayor.

Palabras clave: modos vibracionales, viga en cantiléver, Maple, COMSOL, análisis comparativo, confiabilidad de resultados, verificación.

Abstract

This paper presents the calculation of the vibrational modes of a cantilever beam by two different methods: the analytical method, using Maple software, and the numerical method, using COMSOL Multiphysics software. The analytical method is based on the Euler-Bernoulli theorem for beams in bending. Assuming that the beam is not subjected to external loading and has no damping, a homogeneous differential equation of motion can be obtained. The solution of this equation can be expressed in an eigenvalue characteristic equation, which allows the calculation of the vibrational modes of the beam. The numerical method is based on the finite element method. A model of the beam is constructed in COMSOL software, and an eigenfrequency analysis is applied to calculate the vibrational modes. To verify the reliability of the results, the results obtained with the two methods are compared. The results agree with an error of less than 1%, indicating that both methods are reliable. The calculation of the vibrational modes of a cantilever beam is an important problem in the design of structures. The analytical method is an efficient way to calculate the vibrational modes, but it can be inaccurate in some cases. The numerical method is more accurate but requires more computational time. In this work, it has been shown that the analytical method is dependable for calculating the vibrational modes of a cantilever beam. The analytical method is a good option for calculating the vibrational modes of a cantilever beam when a fast and accurate calculation is required. The numerical method is a good choice for calculating the vibrational modes of a cantilever beam when higher accuracy is required.

Keywords: vibrational modes, cantilever beam, Maple, COMSOL, comparative analysis, reliability of results, verification.

I. INTRODUCCIÓN

Una manera de generar energía limpia consiste en aprovechar la fuerza del viento para inducir vibraciones, por ejemplo, en una viga en voladizo. Este movimiento elástico se utiliza posteriormente para convertirlo en energía eléctrica, mediante algún tipo de transductor. Para diseñar un dispositivo de generación de energía con estas características, es imperativo llevar a cabo dos estudios, uno analítico y otro numérico. La congruencia de los resultados obtenidos por ambas vías es esencial para asegurar un alto nivel de confiabilidad en el diseño.

En este contexto, se presenta un ejemplo de aplicación que implica la evaluación matemática de la dinámica de una viga en voladizo, utilizando el Teorema de Euler-Bernoulli para vigas a flexión. Este enfoque analítico proporciona una ecuación característica, la cual permite determinar los valores propios y, consecuentemente, las frecuencias modales asociadas con la dinámica de la viga. Además, la solución a la ecuación diferencial de movimiento se utiliza como una herramienta física clave para visualizar el estado modal, es decir, el comportamiento de la viga en diversas frecuencias modales.

Simultáneamente, se lleva a cabo un estudio numérico mediante el método de elemento finito, que se divide en tres fases. La primera fase implica la creación del modelo geométrico y una estimación del estudio físico, la segunda fase se centra en la generación de una malla, mientras que la tercera fase consiste en definir la información de frontera, de acuerdo con los estados de referencia, posición y carga a los que estará sometido el modelo.

La comparación de los resultados obtenidos en ambas aproximaciones busca identificar posibles divergencias entre los valores, calculando un error entre ambos procesos. Es relevante destacar que el proceso analítico se desarrolló en el entorno de Maple, mientras que el numérico se llevó a cabo en COMSOL Multiphysic. Ambos métodos revelaron resultados congruentes, con un error aproximado del 1%. Esta congruencia indica

que el modelo analítico es confiable para calcular las formas modales de la viga, y que el enfoque numérico está bien fundamentado para continuar con el proceso de investigación. Finalmente, es importante señalar que este trabajo constituye un breve fragmento del desarrollo de la tesis doctoral titulada "Modelo matemático de acoplamiento aeroelástico: Flujo - Sólido - Potencia eléctrica para vibraciones inducidas por aleteo".

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

Desarrollo de modelo analítico en Maple

A continuación, se presenta el código matemático que se desarrolló en Maple para la dinámica de la viga de forma analítica:

```
restart;
with(plots);
with(VectorCalculus);
with(ArrayTools);
with(RandomTools);
with(plottools);
with(LinearAlgebra);
with(DETools);
with(Student[ODEs]);
with(RootFinding);
```

```
ED1 := diff(Y(x, t), x, x, x, x) + mu*diff(Y(x, t), t, t)/(E*I__x) = 0
Sol1 := pdsolve(ED1, HINT = Y(x)*Y(t));
c1 := mu*omega^2/(E*I__x);
```

Componente temporal

Ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, con coeficientes constantes

```
Ed1 := diff(Y(t), t, t) + c1*Y(t)*E*I__x/mu;
sol_Eq1 := dsolve(Ed1, Y(t));
```

Ecuación de vibración libre para un sistema no amortiguado, con un solo grado de libertad

Componente espacial

```
Ed2 := diff(Y(x), x, x, x, x) - c1*Y(x);
Ed2 := simplify(Ed2, {mu*omega^2/(E*I__x) = beta^4});
sol_Eq2 := dsolve(Ed2, Y(x));
sol_Eq2 := simplify(sol_Eq2, {exp(beta*x) = cosh(beta*x) + sinh(beta*x),
exp(-beta*x) = cosh(beta*x) - sinh(beta*x)});
sol_Eq2 := sort(simplify(sol_Eq2, {c__3 = A, c__4 = B, c__1 - c__2 =
C, c__1 + c__2 = D_}));
```

Hallando las constantes A, B, C y D para una viga simplemente apoyada

```
assign(sol_Eq2);
Y__x := unapply(Y(x), x);
```

Condiciones frontera para "x = 0"

```
Cond1 := Y__x(0) = 0;
D_ := -B;
Cond2 := D(Y__x)(0) = 0;
C := -A;
```

Condiciones de frontera para "x = L"

```
Cond3 := (D@@2)(Y__x)(L) = 0;
Cond3 := simplify(Cond3/(-beta^2));
Cond4 := (D@@3)(Y)(L) = 0;
Cond4 := simplify(Cond4/(-beta^3));
G, b := GenerateMatrix({Cond3, Cond4}, {A, B}, augmented = false);
B := solve(Cond3, B);
```

Se obtiene la ecuación característica al reemplazar "B", en la "Cond4" o, lo que es lo mismo, con el determinante que compone la matriz solución de las ecuaciones de las condiciones 3 y 4. La ecuación anterior sugiere que para no obtener la solución trivial "A = 1"

```
Eq3 := simplify(Determinant(G) = 0);
L := 1;
Eq3 := Eq3/2;
```

```
Raices := Analytic(Eq3, beta, re = 0 .. 10*Pi, im = 0 .. 1, digits = 6);
lists := [Raices];
beta__n := sort(lists, '<');
omega__n := seq(beta__n[n]*sqrt(E*I/(mu*L^4)), n = 1 .. 8);
plot(lhs(Eq3), beta = -4*Pi .. 10*Pi, y = -500 .. 500);
```

```
A := 1;
beta := beta__n[5];
Y__x(x);
plot(Y__x(x), x = 0 .. L, thickness = 15);
```

```
beta__n := [1.87510, 4.69409, 7.85475, 10.9956, 14.1372, 17.2788,
20.4204, 23.5619, 26.7036, 29.8452, 32.9867, 36.1283, 39.2699,
42.4115, 45.5531, 48.6947, 51.8365, 54.9780, 58.1195, 61.2610,
64.4025, 67.5440, 70.6860, 73.8275, 76.9690, 80.1105, 83.2520,
86.3940, 89.5355, 92.6770, 95.8185, 98.9600, 102.102, 105.244,
108.385, 111.526, 114.668, 117.810, 120.952, 124.093, 127.235,
130.376, 133.518, 136.659, 139.801, 142.942, 146.084, 149.226,
152.367, 155.509]
```

Desarrollo de modelo numérico COMSOL

En la Figura 1 se presenta una imagen que ilustra claramente los parámetros frontera y las características del entorno del modelo, en este caso, se trata de una viga con dimensiones de ancho, profundidad y espesor de 38 mm, 400 mm y 3 mm, respectivamente. El material utilizado es una aleación de aluminio 6061.

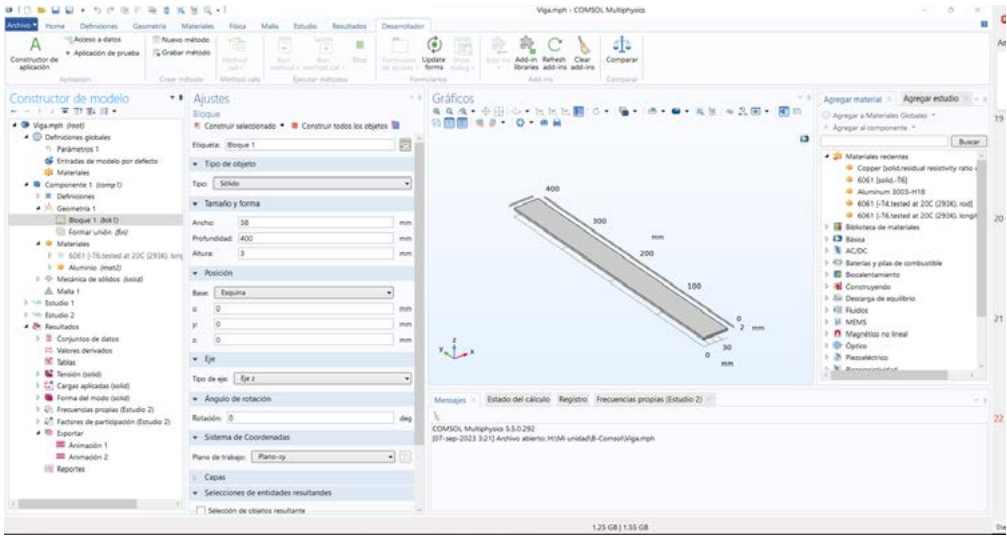


Fig. 1. Entorno COMSOL [6]

Resultados

En la Figura 2 se exhiben las cuatro primeras formas modales obtenidas, tanto en el estudio analítico como en el estudio numérico. En la columna izquierda se presentan las formas modales calculadas a partir del entorno Maple, mientras que en la columna derecha se muestran aquellas obtenidas en el entorno COMSOL.

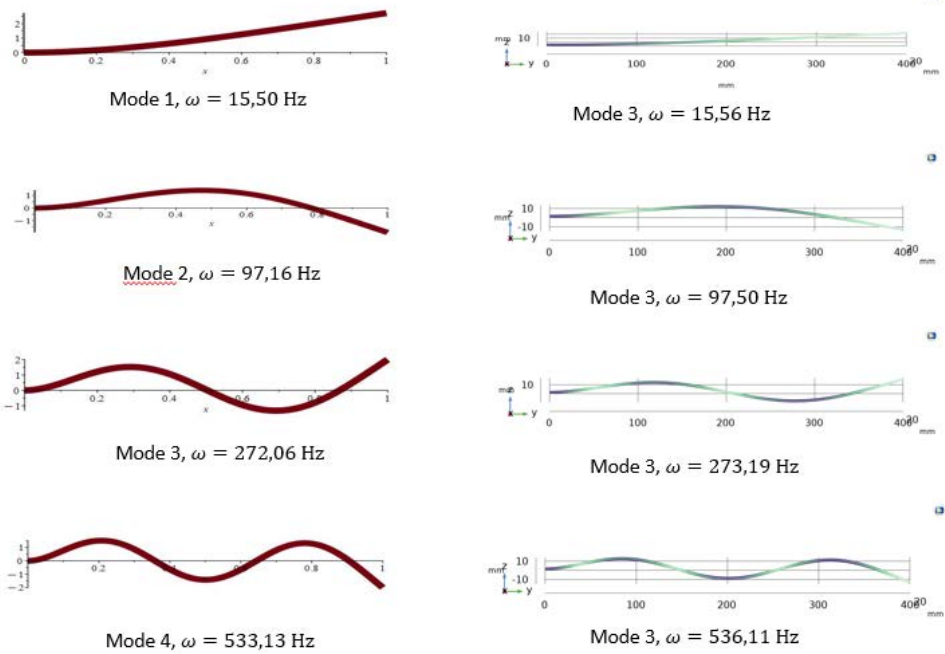


Fig. 2. Verificación de las 4 primeras formas modales entre los modelos analítico y numérico [6-7]

III. CONCLUSIONES

Es esencial considerar la metodología de verificación de confiabilidad computacional al postproceso de las ecuaciones analíticas que, en principio, modelan fenómenos físicos, pero pueden carecer de precisión en comparación con datos experimentales. En este contexto, los avances en soluciones numéricas computacionales, como COMSOL, desempeñan un papel crucial al posibilitar la verificación de los resultados, contribuyendo así al enriquecimiento de los procesos analíticos. Además, esta metodología ofrece la ventaja de garantizar la convergencia de los datos numéricos hacia soluciones reales, estableciendo un beneficio de intercambio de información entre ambas aproximaciones. Sin embargo, es fundamental destacar que la validez de la calificación del modelo solo se revelará al comparar estos resultados con soluciones experimentales concretas.

REFERENCIAS

- [1] W. L. Oberkampf and T. G. Trucano, “Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics”, *Office of Scientific and Technical Information (OSTI)*, 2002. doi: 10.2172/793406.
- [2] M. M. R. El-Hebeary, M. H. Arafa and S. M. Megahed, “Modeling and experimental verification of multi-modal vibration energy harvesting from plate structures” [Internet]. vol. 193, pp. 35-47, 2013. Disponible en DOI: 10.1016/j.sna.2013.01.006.
- [3] H. Verbraken, G. Lombaert and G. Degrande, “Verification of an empirical prediction method for railway induced vibrations by means of numerical simulations,” *J Sound Vib.* [Internet]. 330(8), pp. 1692-1703, 2011. Disponible en DOI: 10.1016/j.jsv.2010.10.026.
- [4] M. Kumar and A. S. Whittaker, “Cross-platform implementation, verification and validation of advanced mathematical models of elastomeric seismic isolation bearings,” *Eng Struct.* [Internet]. Vol. 175, no. September, pp. 926-943, 2018. Disponible en DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.08.047>
- [5] D. H. Hodges and G. A. Pierce, *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*, Cambridge University Press, 2002.
- [6] COMSOL Multiphysic 5.5. Estocolmo, Suecia, 2014. Accessed: Aug. 31, 2023. [Online]. Available: <https://www.comsol.com/>
- [7] MapleSoft, “Maple”, 2023.

Biografías

Autor 1: Jorge Enrique Herrera Arroyave

Estudiante del programa de Doctorado en Ciencias - Física de la Universidad Tecnológica de Pereira, obtuvo su candidatura a doctor en el primer semestre de año 2023. Está vinculado como profesor a la Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Católica de Pereira y a su vez tiene el cargo de director del Departamento de Ciencias Básicas desde el 2017. Obtuvo el título de Ingeniero Mecánico en la Universidad Tecnológica de Pereira, Risaralda - Colombia, en 2010; la Maestría en Ingeniería Aeronáutica de la Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, Monterrey, México, en 2015. Su tesis doctoral está relacionada con la cosecha de energía a partir de la interacción fluido-sólido de estructuras compuestas por perfiles aerodinámicos, vigas y parches piezoeléctricos.

Autor 2: Diego Fernando Arias Mateus

Doctor en Ingeniería – Ciencia y Tecnología de los Materiales, Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Es profesor vinculado a la Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Católica de Pereira. Obtuvo el título de pregrado en Química en la Universidad Nacional de Colombia-sede Manizales, 1993. Maestría en Física en la Universidad Nacional de Colombia-sede Manizales, 2004. Su pasión en la investigación se centra en la caracterización de materiales de películas delgadas, cosecha de energía térmica y los nanomateriales.

Autor 3: Milton Humberto Medina Barreto

Doctor en Ciencias – Física, Universidad del Valle. Es profesor vinculado al Departamento de Física de la Universidad Tecnológica de Pereira. Pregrado en Física de la Universidad del Valle y magíster en Ciencias - Física de la Universidad del Valle. Su interés en la investigación se centra en la Producción de Materiales Semiconductores Magnéticos

por medio de molienda mecánica (ZnO), Deposición Química de Vapor de recubrimientos piezoeléctricos para sistemas de cosecha de energía por vibraciones y modelamiento mediante elemento finito, modelamiento con elemento finito de absorción electromagnética en el cerebro por fuentes diversas (móviles, transformadores, líneas de transmisión, etc.), implementación de técnicas no invasivas (termografía, tomografía, cámara hiperespectral) para detección de anomalías mamarias, determinación de madurez y presencia de plagas en el aguacate Hass, mediante técnicas no invasivas, uso de la termografía para detección de síndrome de ojo seco, contaminación electromagnética a alta y baja frecuencia, calibración de cámaras termográficas.

Microcontroladores y aprendizaje mínimo para el futuro inteligente*

Microcontrollers and Minimal Learning for the Smart Future

Largo, Dabiana, Serrano, Juan Pablo

Resumen

“Microcontroladores y aprendizaje mínimo para el futuro inteligente” marca un hito en la convergencia entre tecnología e inteligencia artificial. El proyecto exhibe una audaz implementación de una Red Neuronal en el pequeño Arduino Uno, respaldado por sensores ultrasónicos HC-SR04 y el algoritmo PSO. Esta aproximación no solo revoluciona la detección en tiempo real y clasificación de objetos, sino que también sienta las bases del "Tiny Machine Learning", una disciplina que fusiona la potencia de la IA con los recursos limitados de los microcontroladores. Esta sinergia traza un camino hacia un mundo conectado, inteligente y lleno de posibilidades, mientras dota a los dispositivos de baja potencia con inteligencia artificial. Con resultados impresionantes, esta investigación pionera redefine cómo los microcontroladores pueden impulsar soluciones autónomas y abre nuevas perspectivas en el Internet de las Cosas. El proyecto encapsula la promesa de un futuro donde la tecnología y el aprendizaje automático se entrelazan para impulsar la innovación en un mundo cambiante.

Palabras clave: Tiny Machine Learning, microcontroladores, inteligencia artificial, red neuronal.

Abstract

“Microcontrollers and Minimal Learning for the Smart Future” marks a milestone in the convergence between technology and artificial intelligence. The project showcases a bold implementation of a Neural Network on the tiny Arduino one, supported by HC-SR04 ultrasonic sensors and the PSO algorithm. This approach not only revolutionizes real-time detection and classification of objects, but also lays the foundation for "Tiny Machine Learning", a discipline that fuses the power of AI with the limited resources of microcontrollers. This synergy charts a path towards a smart, connected world full of possibilities, while endowing low-power devices with artificial intelligence. With impressive results, this pioneering research redefines how microcontrollers can power autonomous solutions and opens up new perspectives on the Internet of Things. The project encapsulates the promise of a future where technology and machine learning intertwine to drive innovation in a changing world.

Keywords: Tiny Machine Learning, microcontrollers, artificial intelligence, neural networks.

I. INTRODUCCIÓN

El Internet de las Cosas (IoT) ha sido un paradigma tecnológico que ha mejorado y creado nuevos servicios para los usuarios. La capacidad del IoT para comunicar cosas con cosas, cosas con personas y cosas con la nube ha hecho posible adoptar esta tecnología, tanto en residencias como en procesos industriales. Sin embargo, se ha visto el surgimiento de nuevos enfoques tecnológicos en el que se relaciona al Internet de las Cosas con algoritmos de Aprendizaje Máquina. Este nuevo enfoque se le ha denominado cómputo en el borde.

Recientemente, el combinar algoritmos de machine learning con el paradigma tecnológico del IoT ha promovido el surgimiento de una nueva área de desarrollo llamada Tiny Machine Learning (TinyML) y cuyo objetivo es el desarrollar modelos de procesamiento de datos optimizados para que puedan implementarse en un microcontrolador o sistemas embebidos. Esto permite tomar decisiones en tiempo real de manera autónoma, sin necesidad de enviar los datos a la nube para su procesamiento.

En este proyecto de investigación se presenta la implementación de un modelo de red neuronal tipo perceptrón, el cual en general es desarrollado en dos etapas: etapa *offline* y etapa *online*. Para la etapa *offline* se estima el modelo y se entrena en una computadora convencional, cuyo modelo obtenido es implementado en una tarjeta Arduino Uno para el procesamiento de los datos de entrada. Los datos de entrada provienen de dos sensores ultrasónicos. Las distancias que son obtenidas por los sensores ultrasónicos son procesadas en tiempo real con el modelo neuronal y la salida del modelo es empleada para activar y desactivar un led.

Las variables que se miden en la presente investigación son los recursos computacionales que se tienen con la tarjeta Arduino Uno, tales como el tiempo de procesamiento, respuesta y la memoria. Los resultados y contribución de este trabajo son el estudio de viabilidad y el poder de procesamiento que se tiene con las tarjetas de bajo costo Arduino Uno, para la implementación de algoritmos inteligentes en microcontroladores.

Este problema nos permitirá explorar las capacidades de TinyML y las redes neuronales en el contexto del cómputo en el borde, así como abordar desafíos relacionados con el diseño eficiente de modelos y el manejo de recursos limitados. El resultado será un sistema capaz de reconocer, empleando la clasificación binaria de diferentes distancias en tiempo real, brindando una experiencia interactiva y autónoma para los usuarios, a través del uso de sensores y actuadores.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

Este estudio se fundamenta en la implementación y evaluación de dos enfoques de inteligencia artificial: redes neuronales artificiales y computación evolutiva. La combinación de estos enfoques, especialmente en el entrenamiento de redes neuronales, resulta altamente ventajosa. Aunque las redes neuronales han sido tradicionalmente entrenadas mediante métodos de descenso de gradiente, este estudio adopta una alternativa innovadora: los algoritmos de búsqueda estocástica.

El modelo de red neuronal implementado es del tipo Perceptrón. Su entrenamiento, como se observa en la Figura 1, se realiza a través del algoritmo de Particle Swarm Optimization (PSO), basado en el modelado del comportamiento de un conjunto de individuos. La población evoluciona iterativamente, con los individuos más aptos (evaluados por la función de costo), influyendo en la búsqueda de soluciones más óptimas. La función de costo, tanto para la red como para PSO, es la función de mínimos cuadrados.

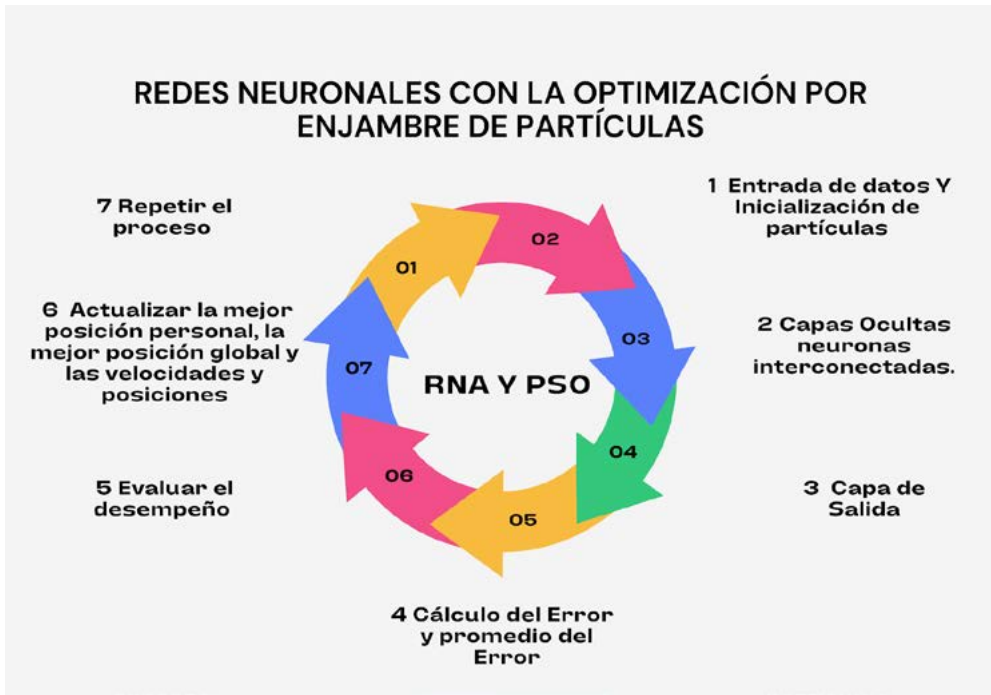


Fig. 1 RNA y PSO [10]

La implementación de los modelos se efectuó en Python. Además, se diseñó un circuito, como se observa en la Figura 2, el cual es específico para la ejecución de las redes neuronales en un microcontrolador de bajo costo, como el Arduino Uno.

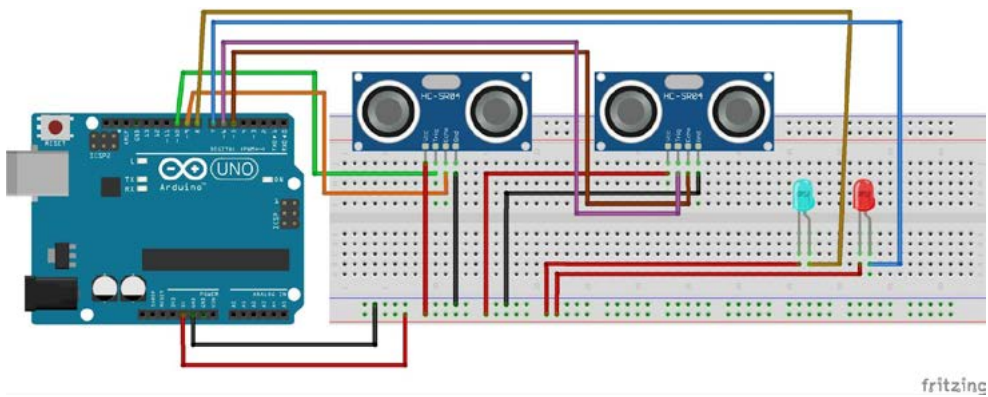


Figura 2 Implementación del circuito [9]

En la fase de entrenamiento, PSO ajustó los parámetros de la red neuronal. Cada partícula en el enjambre representaba un conjunto de valores correspondientes a pesos y sesgos de la red. El proceso iterativo exploraba el espacio de búsqueda para minimizar la función de error, que cuantifica la discrepancia entre las predicciones de la red y los valores reales de entrenamiento. Cada partícula actualizaba su posición y velocidad en función del desempeño y de la información sobre las mejores posiciones locales y globales encontradas. Este proceso concluía cuando se obtenían los pesos óptimos y se alcanzaba el límite de iteraciones predefinido, en un computador convencional, marcando el fin de la etapa *offline*.

Aplicación práctica y análisis

Una aplicación concreta de estas redes neuronales es la clasificación binaria de distancias, utilizando sensores ultrasónicos HC-SR04 y un Arduino Uno. Esta solución ofrece una detección efectiva de objetos cercanos y lejanos. El circuito captura datos de los sensores, que miden distancias y se transforman en números binarios (0 para lejanía y 1 para proximidad). La red ejecuta una clasificación binaria mediante una compuerta OR. Si detecta al menos un objeto cercano (valor "1" en al menos un sensor), un led se activa. En contraste, si ambos sensores indican lejanía (valor "0"), se enciende otro led, concluyendo la etapa *online* con una red que opera en tiempo real y aprendió correctamente.

El análisis y validación de los resultados confirman la efectividad del enfoque. La convergencia de PSO demuestra su capacidad para optimizar la red neuronal. La implementación en un microcontrolador Arduino Uno destaca la viabilidad en entornos con recursos limitados. La clasificación de distancias proporciona una solución práctica y confiable para detección de proximidad.

Comparado con métodos tradicionales, este enfoque se adapta mejor a restricciones de recursos sin sacrificar precisión. La incorporación de PSO mejora la eficiencia y rendimiento del proceso de entrenamiento.

Estos resultados validan la hipótesis y refuerzan la contribución a la convergencia entre IoT y Aprendizaje Automático. Comparaciones con trabajos previos, como los referenciados [1], [2], [3], apoyan la innovación y relevancia de esta metodología.

III. CONCLUSIONES

La aplicación de Tiny Machine Learning en microcontroladores ofrece mejoras significativas en la autonomía y la privacidad de los sistemas de Internet de las Cosas (IoT). Al llevar el procesamiento y la toma de decisiones al borde de la red, se reduce la necesidad de comunicación con la nube, lo que resulta en una mayor eficiencia energética. Además, realizar inferencias directamente en el microcontrolador preserva la privacidad de los datos, al evitar su transmisión a través de la red.

Sin embargo, es importante destacar que la implementación de redes neuronales en microcontroladores presenta desafíos particulares. Se deben considerar las limitaciones de memoria y capacidad de cálculo de estos dispositivos, lo cual requiere una cuidadosa optimización de los modelos. Técnicas como la cuantización de pesos y la reducción de la arquitectura son necesarias para adaptar los modelos a los recursos limitados disponibles.

La implementación de Tiny Machine Learning en microcontroladores ofrece un gran potencial para aplicaciones en tiempo real y toma de decisiones autónomas. Estos sistemas pueden realizar inferencias y tomar decisiones rápidas y eficientes sin depender de la comunicación con servidores externos. Esto abre nuevas oportunidades en áreas como la detección de objetos, el monitoreo de salud y la seguridad.

En conclusión, la implementación de Tiny Machine Learning en microcontroladores de bajo costo ha demostrado ser una técnica prometedora en el campo del cómputo en el borde. Esta técnica ofrece oportunidades para el desarrollo de sistemas eficientes, autónomos y seguros en el contexto del Internet de las Cosas y otras aplicaciones basadas en microcontroladores.

REFERENCIAS

- [1] H. F. Lopes, R. da S. Torres, and L. C. Oliveira, "TinyML: An Approach to Tiny Machine Learning", in *Proceedings of the 2019 IEEE 32nd International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)*, Seoul, Korea (South), 2019.
- [2] A. J. González-García, *et al.*, "Design and evaluation of a tinyML-based classification system for real-time sound event detection", *Neurocomputing*, vol. 456, pp. 14-22, 2021.
- [3] A. F. Cruz, *et al.*, "Particle Swarm Optimization - A Survey", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 23(1), pp. 174-195, 2019.
- [4] A. J. González-García, A. C. Martínez-Rodríguez and P. Carrión, "An Intelligent System for UAV Autonomous Landing through Bio-Inspired Visual-Based Relative Navigation and Fuzzy Logic," *Electronics*, vol. 9, no. 7, pp. 1046, 2020, pp. 7-17.
- [5] Y. LeCun, Y. Bengio and G. Hinton, "Deep learning", *Nature*, 521(7553), pp. 436-444, 2015.
- [6] Shishika, *et al.*, "Design and Implementation of Deep Learning Model for Pothole Detection", in *International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*, Bangalore, India, 2018, pp. 868-872.
- [7] Z. A. Arias, "Etapas, requerimientos y recomendaciones para implementación de modelos de machine learning en sistemas embebidos," Universidad de los Andes, Bogota, Colombia, 2022, pp. 5-20.
- [8] E. Sido, "Dispositivos neuromórficos en TinyML," *Revista Digital Electrónica Organizalo*, 2022, desde la ciudad de España.

[9] Figura 2. Implementación del circuito de detección de proximidad con Arduino Uno y sensores ultrasónicos HC-SR04. Elaboración propia

[10] Figura 1. RNA PSO funcionamiento y entramiento de la red neuronal en el algoritmo evolutivo. Elaboración propia.

Biografías

Autor 1: Dahiana Largo Suarez

Estudiante de Ingeniería en Sistemas y Telecomunicaciones en la Universidad Católica de Pereira.

Forma parte del semillero de investigación de Industria 4.0, donde he desarrollado un interés apasionado por las tecnologías emergentes. Poseo un título técnico en Sistemas Informáticos y Telecomunicaciones del Politécnico de Occidente, así como otro título técnico en Agroindustria Alimentaria del SENA, además realicé una estancia de verano en el ITESI, México, como parte del programa del verano de investigación Delfín. Mi compromiso con la educación y la innovación me ha impulsado a explorar la convergencia de las tecnologías de la información y la transformación industrial, contribuyendo al desarrollo de soluciones inteligentes para los desafíos actuales y futuros.

Áreas de investigación: industria 4.0.

Autor 2: Juan Pablo Serrano Rubio

El Dr. Juan Pablo Serrano Rubio es profesor en la Maestría en Tecnologías de la Información del Tecnológico Nacional de México/ITS de Irapuato.

Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel 1 y cuenta con el reconocimiento PRODEP. Sus investigaciones abarcan inteligencia artificial, visión de computador, robótica, procesamiento de imágenes

médicas, y dispositivos IoT en Industria 4.0. Obtuvo su doctorado en el CIMAT y realizó una estancia posdoctoral en la Universidad de Exeter, Reino Unido. Actualmente cuenta con publicaciones en revistas de alto impacto y congresos internacionales, así como el registro de propiedad intelectual con INDAUTOR e IMPI.

Áreas de investigación: Industria 4.0.

Degradación de contaminantes en aguas residuales domésticas mediante reacciones Fenton en el departamento del Quindío*

Degradation of pollutants in domestic wastewater by Fenton reactions in the department of Quindío

*Hurtado-Ossa, Daniela, Rodríguez-Espinosa, Jhon Alexander,
Pineda-Reyes, Henry*

Resumen

Las aguas residuales domésticas son una de las principales fuentes de contaminación de los recursos hídricos, contienen altos porcentajes de productos farmacéuticos, productos para el cuidado personal, detergentes, pesticidas, entre otros[1]. Las reacciones Fenton son una opción prometedora a la degradación de contaminantes por la generación de radicales hidroxilos. En este trabajo se evaluó la eficiencia de las reacciones Fenton, como procesos de oxidación avanzada en la degradación de los contaminantes presentes en las aguas residuales domésticas de la Universidad del Quindío. Se realizó análisis estadístico por medio de un diseño experimental de tipo Box-Benkhen, utilizando el programa estadístico STATGRAPHICS Centurion XV para determinar los parámetros óptimos que permiten alcanzar las más altas remociones mediante la reducción de DBO y/o DBO₅/DQO. Se ejecutó un análisis de superficie de respuesta para determinar cómo influyen los factores: concentración de sulfato ferroso, concentración de peróxido de hidrógeno y tiempo de agitación con respecto a la variable respuesta, en este caso el porcentaje de remoción. El valor máximo alcanzado en la remoción de DBO₅ fue del 64,03%, y los valores óptimos de los factores fueron 300 mg/L en concentración de sulfato ferroso, 40 mg/L concentración de peróxido de hidrógeno y 30

minutos como tiempo de agitación. Al evaluar la relación DBO_5/DQO antes y después del tratamiento Fenton se obtuvo que valores entre 300-450 mg/L de sulfato ferroso, 40 mg/L de peróxido de hidrógeno y 30 minutos como tiempo de agitación, se obtienen relaciones DBO_5/DQO de 0,34 y 0,37.

Palabras clave: contaminates, degradación, Fenton, DBO_5/DQO .

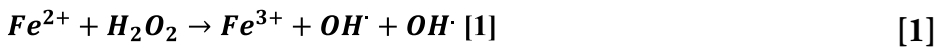
Abstract

Domestic wastewater is one of the main sources of contamination of water resources, it contains high percentages of pharmaceuticals, personal care products, detergents, pesticides, among others [1] Fenton reactions are a promising alternative for the degradation of pollutants through the generation of hydroxyl radicals. In this work, the efficiency of Fenton reactions as advanced oxidation processes in the degradation of pollutants present in domestic wastewater from the University of Quindío was evaluated. The statistical analysis was carried out using a Box-Benken type experimental design using the STATGRAPHICS CENTURION XV statistical program to determine the optimal parameters that allow achieving the greatest removals by reducing BOD and/or BOD₅/COD. A response surface analysis was performed to determine how the factors influence: ferrous sulfate concentration, hydrogen peroxide concentration and agitation time with respect to the response variable, in this case the removal percentage. The maximum value reached in the removal of BOD₅ was 64.03%, and the optimal values of the factors were 300 mg/L in ferrous sulfate concentration, 40 mg/L in hydrogen peroxide concentration and 30 minutes as stirring time. response surface to determine how the factors influence: ferrous sulfate concentration, hydrogen peroxide concentration and agitation time with respect to the response variable as removal percentage. The maximum value reached in the removal of BOD₅ was 64.03%, and the optimal values of the factors were 300 mg/L in ferrous sulfate concentration, 40 mg/L in hydrogen peroxide concentration and 30 minutes as stirring time. When evaluating the DBO₅/COD ratio before and after the Fenton treatment, it was obtained that values between 300-450 mg/L of ferrous sulfate, 40 mg/L of hydrogen peroxide and 30 minutes as stirring time, BOD₅/COD ratios are obtained of 0.34 and 0.37.

Keywords: contaminants, degradation, Fenton, DBO₅/DQO.

I. INTRODUCCIÓN

Las aguas residuales domésticas son una mezcla de contaminantes de tipo orgánico, inorgánico y microbiano [2], su tratamiento previo incluye técnicas convencionales que no eliminan dichos contaminantes. Dentro de las tecnologías requeridas y empleadas para la degradación de contaminantes se encuentran los procesos de oxidación avanzada (POAs). Entre los POAs más utilizados se encuentran los procesos basados en reacciones de Fenton, fundamentado en la producción de radicales hidroxilo ($\text{OH}\cdot$) y FeO_2^+ , al hacer reaccionar el H_2O_2 con Fe^{2+} (ecuación 1) [3]. Se lleva a cabo en condiciones ácidas, a temperatura ambiente y a presión normal.



En Colombia [4] realizaron un estudio donde evaluaron el proceso Fenton en el tratamiento de aguas residuales provenientes de una industria de café soluble, también [5] evaluaron la capacidad del proceso Fenton para oxidar y degradar el color y la materia orgánica contenida en las aguas residuales generadas en la etapa de teñido del cuero de una curtiduría industrial.

El objetivo de este trabajo es proponer una alternativa viable, implementando procesos de oxidación avanzada como reacciones Fenton para la degradación de contaminantes presentes en aguas residuales domésticas de la Universidad del Quindío.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

La metodología utilizada se basó en el estudio de [4].

Para iniciar, se midió el pH, DQO y DBO de la muestra inicial. En un recipiente se agregaron 200 mL de agua residual a tratar, se ajustó el pH entre 2,8 utilizando una solución de H_2SO_4 1N, posteriormente se llevó a temperatura ambiente controlada (22°C). Para realizar el proceso Fenton se agregó peróxido de hidrógeno (H_2O_2) al 50% p/v y luego sulfato ferroso

heptahidratado ($\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$) de forma sólida (pureza: 99%), se llevó a agitación constante a 300 RPM a diferentes tiempos, por último, se hizo una filtración simple por gravedad, para retirar los lodos generados en el proceso.

Se realizó un diseño experimental de tipo Box-Behnken (DBB) utilizando el software estadístico STATGRAPHICS Centurion XV, con el fin de determinar la significancia de los factores durante el proceso Fenton.

Para cada uno de los diseños experimentales realizados se hizo un muestreo compuesto durante 4 horas. Por lo tanto, cada muestra recolectada se encontraba en condiciones diferentes.

Después de realizar los diseños experimentales, se obtienen remociones del 64,05% en DBO_5 a concentraciones entre 300-450 mg/L de sulfato ferroso, 30-40 mg/L de peróxido de hidrógeno y con un tiempo óptimo de 30 minutos, así mismo, las relaciones DBO_5/DQO se encontraron entre 0,34 y 0,37 a las mismas condiciones descritas anteriormente.

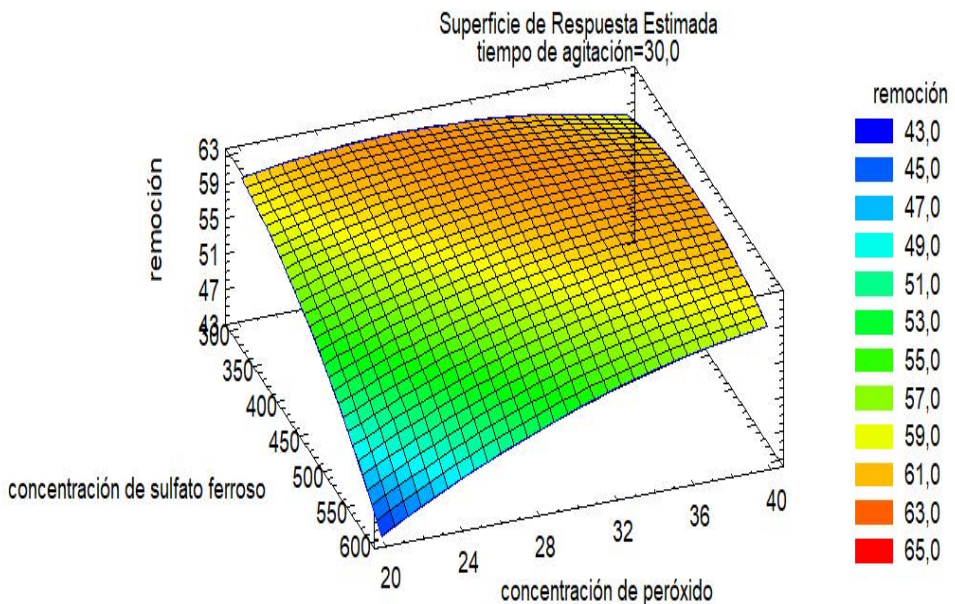


Fig.1. Gráfica de superficie de respuesta $[\text{H}_2\text{O}_2]$ vs $[\text{FeSO}_4]$

[5] realizaron un estudio con la misma metodología descrita y como resultado obtuvieron porcentajes de remoción entre el 80 y el 85%. Cabe resaltar que cada tipo de agua residual presenta diferentes parámetros, por lo tanto, la variación de estos parámetros va a influir en el porcentaje de remoción después de realizar el tratamiento con Fenton.

Al comparar las relaciones DBO_5/DQO con los criterios de biodegradabilidad[6], se concluye que el agua residual tratada no necesita tratamiento físico-químico o biológico para mejorar su biodegradabilidad. A futuro, se espera comparar con aguas residuales de otras dependencias de la Universidad del Quindío.

III. CONCLUSIONES

Según los resultados obtenidos, el tratamiento con reacciones Fenton para lograr la degradación de contaminantes presentes en aguas residuales es una alternativa viable para implementar como parte del proceso en una PTAR, cabe resaltar que el tipo de agua cumplía con los parámetros establecidos por la legislación colombiana (Resolución 0631 de 2015), pero que siguen siendo una fuente de contaminación para los recursos hídricos.

REFERENCIAS

- [1] B. Rajasekhar, U. Venkateshwaran, N. Durairaj, G. Divyapriya, I. M. Nambi and A. Joseph, “Comprehensive treatment of urban wastewaters using electrochemical advanced oxidation process”, *J. Environ Manage.* [Internet]. Vol. 266, 2020. Disponible en DOI: 10.1016/j.jenvman.2020.110469.
- [2] N. Klammerth, S. Malato, A. Agüera and A. Fernández-Alba, “Photo-Fenton and modified photo-Fenton at neutral pH for the treatment of emerging contaminants in wastewater treatment plant effluents: A

comparison”, *Water Res.* [Internet]. 47(2), pp. 833-840, 2013. Disponible en DOI: 10.1016/j.watres.2012.11.008.

[3] N. Azbar, T. Yonar and K. Kestioglu, “Comparison of various advanced oxidation processes and chemical treatment methods for COD and color removal from a polyester and acetate fiber dyeing effluent”, *Chemosphere.* [Internet]. 55(1), pp. 35-43, 2004. Disponible en DOI: 10.1016/j.chemosphere.2003.10.046.

[4] H. N. Ibarra-Taquez, I. Dobrosz-Gómez and M. Á. Gómez, “Multi-objective optimization of the Fenton process for the treatment of soluble coffee wastewater”, *Informacion Tecnológica.* [Internet]. 29(5), pp. 111-121, 2018. Disponible en DOI: 10.4067/S0718-07642018000500111.

[5] C. A. Gómez, M.-Á. Gómez-García and I. Dobrosz-Gómez, “Analysis of the Capacity of the Fenton Process for the Treatment of Polluted Wastewater from the Leather Dyeing Industry”, *The Scientific World Journal.* [Internet]. vol. 2023, pp. 1-21, 2023. Disponible en DOI: 10.1155/2023/4724606.

[6] A. Nelly Ardila Arias, J. Reyes Calle, E. Arriola Villaseñor and J. Alfredo Hernández, “Remoción fotocatalítica de DQO, DBO 5 y COT de efluentes de la industria farmacéutica”, 1900.

Biografías

Autor 1: Daniela Hurtado Ossa

Estudiante de décimo semestre de Química en la Universidad del Quindío.

Áreas de investigación: biotecnología aplicada, remediación ambiental y desarrollo sostenible.

Autor 2: Jhon Alexander Rodríguez Espinosa

Magíster en Química de la Universidad del Quindío; Actualmente es el director del Programa de Química en la Universidad del Quindío en Armenia.

Áreas de investigación: electroquímica aplicada, remediación ambiental, biotecnología y toxicología.

Autor 3: Henry Reyes Pineda

Doctor en Tecnologías de Membranas Electroquímicas en la Universidad Politécnica de Valencia; magíster en estudios avanzados: suficiencia investigativa en la Universidad politécnica de Valencia; actualmente es docente investigador del Programa de Zootecnia en la Universidad del Quindío.

Áreas de investigación: medio ambiente, ingeniería electroquímica y medio ambiente, electroquímica y matemáticas aplicadas.

Ajustes a un diseño didáctico sobre función lineal para incluir a estudiantes con discapacidad auditiva*

Adjustments to a didactic design on linear function to include students with hearing disabilities

Murallas-Jaramillo, Oscar

Resumen

La educación inclusiva es fundamental para lograr una educación de calidad, equitativa y accesible para todos. La inclusión de personas con discapacidad auditiva en el aula, especialmente en el contexto de las matemáticas, representa una oportunidad para eliminar desigualdades y garantizar oportunidades para todos. Es importante que se fomente la creatividad y la innovación en el aprendizaje de la matemática y que se realicen ajustes o adaptaciones para atender las necesidades de todos los estudiantes en el aula. El objetivo del presente trabajo es ajustar un diseño didáctico sobre función lineal para estudiantes con discapacidad auditiva.

Palabras clave: educación inclusiva, discapacidad auditiva, adaptaciones, función lineal, diseño didáctico.

Abstract

Inclusive education is essential to achieve quality, equitable and accessible education for all. The inclusion of people with hearing disabilities in the classroom, especially in the context of mathematics, represents an opportunity to eliminate inequalities and guarantee opportunities for all. It is important that creativity and innovation in learning mathematics be encouraged, and that adjustments or adaptations be made to meet the needs of all students in the classroom. The objective of the work is to adjust a didactic design on linear function for students with hearing disabilities.

Keywords: inclusive education, hearing disability, adaptations, linear function, didactic design.

I. INTRODUCCIÓN

En un aula de matemáticas se debe proporcionar a todos los estudiantes accesibilidad en las oportunidades e igualdad de condiciones. La inclusión de personas con discapacidad auditiva también es una oportunidad para reflexionar sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje actual. Por tal motivo, el Ministerio de Educación Nacional [3], en su Decreto 1421, expone elementos como el Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) y el Plan Individual de Ajustes Razonables (PIAR) para atender las necesidades en el aula.

La Declaración Universal de los Derechos Humanos, de la Unesco [6], y la Constitución Política de Colombia de 1991, establecen el derecho a la educación para todas las personas. Sin embargo, históricamente, las personas con discapacidad auditiva han enfrentado barreras y desigualdades en el acceso a la educación y la vida social, lo que ha afectado su desarrollo académico y personal.

En los últimos años, ha habido un creciente reconocimiento de la importancia de la educación inclusiva, como una herramienta para lograr una educación equitativa y accesible para todos, en donde sea posible la inclusión en la clase de matemáticas, como lo menciona Parada [4]. Organizaciones como la Unesco han enfatizado la necesidad de eliminar todas las barreras que impiden el acceso a la educación y trabajar en el diseño de planes de estudio, pedagogía y enseñanza que respondan a la diversidad de los estudiantes.

De todos los componentes anteriormente mencionados, surge el siguiente objetivo: ajustar un diseño didáctico sobre función lineal para estudiantes con discapacidad auditiva. El cual fue construido con tres niveles de profundidad diferentes y está en el marco de un proyecto de desarrollo curricular que busca atender la diversidad en clase de matemáticas.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

En la sección de metodología y resultados de esta investigación, se presentan los antecedentes relacionados con el ajuste a un diseño didáctico sobre función lineal para incluir a estudiantes con discapacidad auditiva, organizados en cuatro categorías.

En la primera categoría se aborda la discapacidad auditiva en la atención a la diversidad, mencionando normas y leyes internacionales y nacionales que garantizan el derecho a una educación inclusiva y de calidad para las personas sordas.

En la segunda categoría se analiza la problemática en la enseñanza y aprendizaje de la función lineal, destacando dificultades como la falta de conexión entre la situación problema y la vida real, la abstracción de conceptos y la interpretación de gráficos.

En la tercera categoría se aborda la enseñanza de la función lineal para personas con Necesidades Educativas Especiales, destacando la importancia de adaptar pedagógicamente los recursos visuales y manipulativos, para que los estudiantes puedan experimentar los conceptos de manera concreta.

Finalmente, en la cuarta categoría, se aborda la enseñanza de la función lineal para personas con discapacidad auditiva, destacando el uso de herramientas visuales y la composición de los textos con lengua de señas, para lograr que los estudiantes encuentren la relación del concepto con la imagen.

III. CONCLUSIONES

Realizado el análisis exhaustivo del diseño propuesto por Plata [5], se ha determinado que es necesario realizar un planteamiento del ajuste didáctico en un futuro semestre. Para ello, se han tenido en cuenta tanto la bibliografía como los recursos disponibles, lo que permitirá implementar una estrategia efectiva y adaptada a las necesidades de los estudiantes. Este

proceso de ajuste didáctico contribuirá a mejorar la calidad de la enseñanza y a garantizar una formación óptima para los estudiantes.

REFERENCIAS

[1] C. Alba, P. Sánchez & A. Zubillaga, *Pautas sobre el Diseño Universal de Aprendizaje 2.0* (versión traducida al español). [Internet], 2013. Recuperado de https://educadua.es/doc/dua/dua_pautas_2_0.pdf

[2] Humanos, D. (1948). Declaración Universal de los Derechos humanos. *La Convención Internacional de los Derechos del Niño. Naciones Unidas. Manhattan, Ciudad de Nueva York, Nueva York, Estados Unidos. Declaración sobre la Protección de todas las personas contra la tortura.*

[3] Ministerio de Educación Nacional, *Por el cual reglamenta en el marco de la educación inclusiva, atención educativa a la población con discapacidad*, 29 de agosto de 2017. [Decreto 1421].

[4] S. E. Parada, (2022). Educadores matemáticos que reflexionan sobre la atención a la diversidad en el aula, en *Conferencia presentada en el Foro EMAD 2022*. [En línea]. Transmitida el 15 de noviembre. <https://www.youtube.com/watch?v=mhGg9HbeSro>

[5] C. F. Plata, *Diseño para el estudio de funciones lineales con estudiantes de undécimo grado: Atendiendo la diversidad del aula*, tesis de Licenciatura en Matemáticas, Escuela de matemáticas, Facultad de ciencias Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, 2022.

[6] Unesco, *Informe de seguimiento de la Educación para Todos en el mundo. La educación para todos 2000-2015: logros y desafíos*, París: Unesco, 2015.

Biografías

Autor 1: Oscar Mauricio Murallas Jaramillo

Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad Industrial de Santander. Presidente de la Asociación de Exalumnos de la Escuela Normal Superior de Bucaramanga. Canciller de la Corte de Honor Nacional de la Asociación Colombiana de Escultismo.

Áreas de investigación: atención a la diversidad en clase de matemática.