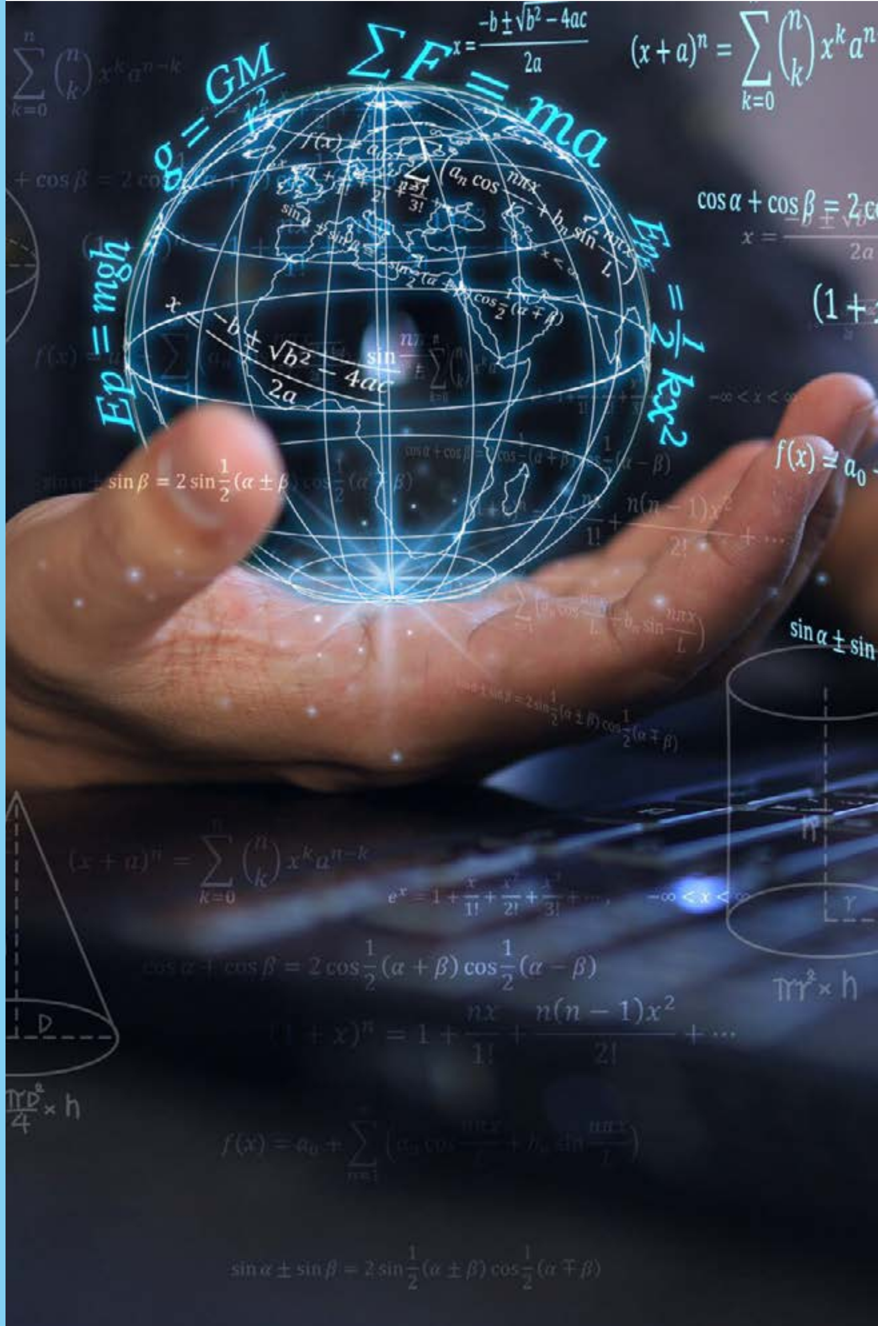
VII

Encuentro Internacional sobre la Enseñanza de Ciencias Exactas y Naturales



ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Estrategias de enseñanza en geometría y su relación con el aprendizaje significativo de Ausubel en colegios oficiales de Dosquebradas[1]

Teaching strategies in geometry and their relationship with Ausubel's significant learning in official schools of Dosquebradas

Marquez-Vera, Jose Alirio[2]

Resumen

Se muestran las relaciones entre las percepciones de maestros y estudiantes de básica secundaria en los colegios oficiales de Dosquebradas, frente a la aplicación de estrategias de enseñanza y aprendizaje significativo en geometría según Ausubel. El estudio es cuantitativo, transversal, no experimental con alcance descriptivo correlacional. Se realizó en básica secundaria (6,7,8,9) en las IE oficiales. Se encuestaron 30 maestros de geometría y 356 estudiantes del nivel mencionado.

La postura de los maestros se obtuvo del instrumento EEDAS en geometría. Para los estudiantes se aplicó la escala de aprendizaje significativo de Ausubel en geometría EASIG, validados por pilotaje y expertos. El análisis de la información se hizo mediante tablas de frecuencias, semáforos, correlaciones, análisis factorial y escalamiento multidimensional PROXCAL en SPSS. Respecto de los maestros de geometría, se puede decir que estos tienden a aplicar unas estrategias de enseñanza más que otras, lo que denota que hay faltantes en la ejecución de ciertas estrategias

1 El artículo es el resultado de la tesis doctoral realizada con la Universidad Cuauhtémoc EAD, Plantel Aguascalientes de México, I semestre del 2023.

2 Secretaría de Educación Dosquebradas; https://orcid.org/0009-0002-0173-1449. Contacto: aliriomarquezv@gmail.com

para alcanzar mejores aprendizajes como la integración de las TIC en el proceso formativo, tomar en cuenta el contexto, la opinión y gustos de los alumnos, entre otras. Los datos de los estudiantes permitieron determinar que no hay un aprendizaje significativo de la geometría en básica secundaria, pues no hay condiciones favorables que permitan alcanzar los saberes del currículo como la intensidad horaria inadecuada, escaso uso de software de geometría, etc. Por esto, se deben realizar esfuerzos conjuntos entre los miembros de la comunidad educativa para lograr mejores aprendizajes y por ende mejorar resultados académicos.

Palabras clave: enseñanza secundaria, aprendizaje significativo, geometría, mejoramiento académico, escalamiento multidimensional.

Abstract

The relationships between the perceptions of teachers and secondary school students in the official schools of Dosquebradas regarding the application of teaching strategies and meaningful learning in geometry according to Ausubel are shown. The study is quantitative, cross-sectional, non-experimental with a correlational descriptive scope. It was carried out in basic secondary (6,7,8,9) in the official IE. 30 geometry teachers and 356 students of the mentioned level were surveyed.

The teachers' posture was obtained from the EEDAS instrument in geometry. For the students, the Ausubel significant learning scale in EASIG geometry was applied, validated by pilots and experts. The analysis of the information was done using frequency tables, traffic lights, correlations, factor analysis and PROXCAL multidimensional scaling in SPSS. Regarding geometry teachers, it can be said that they tend to apply some teaching strategies more than others, which indicates that there are gaps in the execution of certain strategies to achieve better learning, such as the integration of ICT in the training process, taking into account the context and the opinion and tastes of the students among others. The data of the students allowed us to determine that there is no significant learning of geometry in secondary school, since there are no favorable conditions that allow reaching the knowledge of the curriculum, such as inadequate hourly intensity, little use of geometry software, etc. For this reason, joint efforts must be made among the members of the educational community to achieve better learning and, therefore, improve academic results.

Keywords: Secondary education, significant learning, geometry, academic improvement, multidimensional scaling.

I. INTRODUCCIÓN

A nivel internacional, según Glaeser [1], la educación matemática tiene dificultades y estamos viviendo la crisis de la educación geométrica, porqué el continuo reformismo de los planes de estudio ha generado notables impactos en la enseñanza y aprendizaje de la misma [2], afectando incluso el aprendizaje de los contenidos básicos que deberían ser impartidos en básica secundaria según los estándares básicos de competencias de matemáticas MEN [3].

Este estudio contribuye obteniendo el estado actual de la geometría en básica secundaria en las IE oficiales de Dosquebradas, visualizando sus problemáticas, grado de implementación y aportando una herramienta para la medición de su aprendizaje significativo (EASIG), basado en los instrumentos utilizados por Pabón [4].

El objetivo principal era determinar la relación entre las estrategias de enseñanza en geometría, que favorecen su aprendizaje significativo según la teoría de Ausubel en estudiantes de básica secundaria de las IE oficiales de Dosquebradas.

II. DESARROLLO

El estudio es de tipo cuantitativo, transversal, no experimental, con alcance descriptivo correlacional. Se usaron 2 instrumentos con escala Likert (5 opciones) para obtener la información: las **estrategias de enseñanza docente para aprendizajes significativos EEDAS** (50 reactivos) obtuvo las percepciones sobre las estrategias que usan 30 maestros de geometría, el segundo la **escala de aprendizaje significativo de Ausubel en Geometría EASIG** (30 reactivos) obtuvo las percepciones de 356 alumnos sobre el aprendizaje significativo de la geometría según Ausubel, ambos instrumentos fueron validados por expertos y pilotados obteniendo un alfa de Cronbach de 0,934 y 0,846 respectivamente.

La información se analizó con SPSS.v26 utilizando: a) Tablas de frecuencias, b) Semáforos de aplicación, c) Análisis factoriales, d) Correlaciones y e) Escalamiento multidimensional.

a) Las tablas de frecuencias permitieron analizar, uno a uno, los reactivos que se utilizaron para medir las percepciones tanto de maestros como de estudiantes, donde se pudo encontrar que los maestros de geometría usan más ciertas estrategias, los estudiantes manifestaron que les gusta la geometría, pero la intensidad es baja y no tienen en cuenta sus intereses, entre otros.

b) Los semáforos con rangos muestran los condensados de cada ítem teniendo en cuenta la sumatoria de las opciones con mayor frecuencia (4 y 5), si están en una baja (0-50%=Rojo), media (51-70% =Amarillo) o buena aplicación (71-100%=Verde) (ver Tabla 1 y 2).

TABLA I - SEMÁFORO ÍTEMS EEDAS

ÍTEMS - EEDAS	Buena	Media	Baja
1. Al inicio de una nueva temática de geometría pido a los estudiantes que se hagan una idea previa del contenido observando el contexto, fotografías o aspectos cotidianos.		53,3%	
2. Utilizo los momentos de máxima atención (principio de la clase), para retroalimentar los conceptos geométricos más importantes.	86,7%		
3. Al inicio de la clase de geometría utilizo: Computador, tableta, celular o similares para captar mejor la atención de los estudiantes.			26,7%
4. Durante las explicaciones en clase de geometría hago uso de un tono de voz alto para activar la atención de los estudiantes.		50%	

5. Cuando inicio un tema nuevo de geometría dialogo sobre la relación entre éste y otras áreas o elementos del entorno para contextualizar el saber.	90%	
6. Cuando inicio un nuevo período escolar o temática informo a los estudiantes qué estrategias se van a emplear en geometría.	73,3%	
7. Antes de comenzar un tema nuevo de geometría realizo la planeación de los objetivos y metas que se pretenden conseguir.	90%	
8. Al introducir un tema geométrico, pregunto sobre el interés que le genera a los estudiantes y las expectativas que tienen sobre él.		43,3%
9. Planteo retos iniciales de geometría a los estudiantes y animo a que los resuelvan.		36,6%
10. Al iniciar una explicación hago un pequeño resumen para dar a conocer la información de la nueva temática de geometría.	93,3%	
11. En algunos espacios de geometría enseño a los estudiantes cómo identificar los elementos más importantes en las tareas y actividades propuestas.	76,6%	
12. Incentivo el empleo de colores, líneas diferentes, recuadros para diferenciar los conceptos principales de los conceptos secundarios en los textos de geometría.	80%	
13. Empleo en geometría la enseñanza multi-sensorial (música, imágenes o fotografías, material manipulativo, videos, películas, presentaciones).		40%
14. Uso algún software como GeoGebra, Cabri, CloudLabs u otros para enseñar tópicos geométricos.		6,7%

15. Solicito a los estudiantes que expresen con sus palabras los conceptos geométricos dados para determinar la comprensión del tema.		60%	
16. Explico cómo identificar elementos claves de geometría que permiten recordar mejor la temática.	76,6%		
17. Al finalizar cada tema de geometría realizo un repaso de los conceptos importantes vistos y sus generalidades.	83,3%		
18. Solicito a los alumnos que escriban, dibujen o representen la idea principal al desarrollar un tema geométrico.			46,7%
19. Empleo analogías o metáforas en las explicaciones de geometría que permiten un mejor acercamiento del conocimiento al estudiante.	73,4%		
20. Solicito a los estudiantes que planifiquen una o más soluciones a problemas geométricos con su respectivo método.		66,6%	
21. La frecuencia con que enseño temas de geometría al mes a mis estudiantes es:			33,3%
22. Organizo la clase de geometría de tal forma que contenga espacios de teoría, espacios de reflexión, trabajo individual y/o colectivo.	83,4%		
23. Promuevo la realización de resúmenes, mapas conceptuales, esquemas, figuras o diagramas de los temas de geometría vistos o previamente consultados.			40%
24. Utilizo material didáctico (tangram, juegos, origami y otros) para enseñar geometría.			36,6%

25. En las explicaciones de algún tema geométrico empleo gráficos, tablas.	73,3%		
26. Sugiero para la presentación de tareas y actividades en geometría el uso de normas como: Orden, trazos rectos, buena presentación, etc.	96,7%		
27. Promuevo el uso de medios tecnológicos como tabletas, celular, o computador para resolver los ejercicios de geometría en un programa especializado.			20%
28. Sugiero a los estudiantes que antes de contestar las preguntas de geometría construyan un pequeño guion mental donde tengan todos los elementos solicitados.			26,7%
29. Brindo pautas para la solución de problemas, tareas o actividades de geometría.	90%		
30. Durante la planeación de la clase de geometría distribuyo el tiempo de acuerdo con el nivel de dificultad del tema y el volumen de los contenidos.	96,7%		
31. Permito que los estudiantes indiquen la relación que encuentran entre la temática nueva y los conocimientos previos de geometría.	83,3%		
32. Muestro aplicaciones de las temáticas geométricas vistas en clase con elementos de la vida diaria.	86,6%		
33. Durante el desarrollo de la clase de geometría solicito que realicen deducciones o saquen conclusiones a partir de la información dada.		66,7%	

34. Pido que busquen aplicaciones sobre el tema visto en geometría y se debata en clase.	43,3%
35. Durante el desarrollo anual de las temáticas geométricas relaciono la temática actual con las vistas anteriormente.	83,3%
36. Durante los espacios de explicaciones en las clases realizo preguntas que generan la consolidación de conceptos geométricos.	86,7%
37. Promuevo la reflexión sobre los resultados obtenidos en el proceso evaluativo de la geometría y la búsqueda de estrategias que permitan alcanzar las metas.	83,4%
38. Impulso la búsqueda de soluciones propias de una situación problémica en geometría.	76,6%
39. Durante el proceso evaluativo en geometría parto de los conceptos básicos aprendidos al comienzo del tema o curso para retroalimentar la nueva información.	93,4%
40. Durante el desarrollo de las temáticas de geometría hago relaciones entre las nuevas temáticas y las vistas anteriormente.	90%
41. Promuevo el estudio grupal para compartir ideas y motivar el aprendizaje.	86,6%
42. Cuando un estudiante en un examen de geometría se "bloquea", lo motivo a usar otras estrategias como la asociación de ideas, dibujos, o imágenes mentales.	70%

43. Apoyo a los estudiantes en clase de geometría para que sean conscientes de sus fortalezas y oportunidades de mejora.	90%
44. Promuevo el estudio autónomo de la geometría.	70%
45. Ayudo a que los estudiantes empleen estrategias que les permitan entender más asertivamente las temáticas de geometría.	86,6%
46. Apoyo a los estudiantes hacia el alcance de metas personales dentro de la clase de geometría.	83,3%
47. Oriento el proceso de aprendizaje de los estudiantes y los ayudo a establecer pautas para alcanzar las metas propuestas en geometría.	86,7%
48. Oriento la enseñanza de la geometría centrado en los gustos del estudiante y las necesidades del contexto.	53,3%
49. Reconozco el proceso de aprendizaje geométrico de los estudiantes por encima de las calificaciones.	83,3%
50. Reconozco el esfuerzo por aprender de los estudiantes en geometría y se los comunico tanto a ellos como a sus acudientes.	86,6%

TABLA II - SEMÁFORO ÍTEMS EASIG

ÍTEMS-EASIG	Buena	Media	Baja
2. Cuando el profesor enseña un tema nuevo de geometría en clase, sientes que es sencillo aprenderlo.			49,1%
7. Crees que la geometría es más fácil de comprender que otras asignaturas.			30,9%
18. El profesor dialoga con tus padres y les informa sobre tus notas de geometría.			44,7%
28. Me motiva el ambiente en clase de geometría por ser agradable y respetuoso.		67,8%	
29. Pienso que el estudio de la geometría es importante para la vida.		69,1%	
30. Creo que soy un estudiante ordenado y responsable en clase de geometría.	75,8%		
4. Con qué frecuencia sientes que estás atento a la clase de geometría que realiza tu profesor.	78,7%		
5. Sientes que, al estudiar en grupo aprendes mejor los temas de geometría.		59%	

6. Los aprendizajes previos de geometría me facilitan el aprendizaje de nuevos temas.		60,1%	
13. El profesor realiza la clase de geometría según tu gusto y forma de aprender.			21%
15. Tus padres te ayudan a resolver las tareas de geometría que deja el profesor.			20,5%
20. Al profesor de geometría le gusta que todos se lleven bien en clase.	90,5%		
12. El profesor te evalúa mediante un examen en cada clase de geometría.			27,3%
14. Sientes que las tareas de geometría dejadas por el profesor para tu casa, te ayudan a aprender más.		52,2%	
24. En geometría desarrollo todas las actividades propuestas.	78,9%		
25. En clase realizo proyectos o construcciones que me permiten comprender cómo la geometría es importante para el desarrollo de mi entorno.		51,4%	
26. Cuando presento pruebas externas (Saber, Avancemos, Instruimos u otras) recuerdo con facilidad los temas de geometría enseñados en clase.		50,5%	

27. Le explico a mis compañeros los temas vistos de geometría cuando ellos no comprenden.		55,4%	
9. Tú profesor vuelve a explicar con paciencia y buena actitud lo que no entiendes de geometría.	80,3%		
10. El profesor explica con ayuda de imágenes, videos, programas de computador u otros, los temas de geometría para tu mejor comprensión.			40,2%
11. El profesor te comunica con claridad los objetivos de la clase de geometría.	76,4%		
16. Participas en todas las clases de geometría.			49,7%
19. El profesor dialoga contigo sobre lo que te sucede en casa o en clase de geometría.			26,4%
23. Comunicas con facilidad tus ideas y opiniones sobre los temas de geometría.			40,2%
1. Las veces al mes que el profesor de matemática o geometría te enseña temas como figuras planas, perímetros, áreas, volúmenes, puntos, tipos de líneas, ángulos, mediciones, patrones y/o problemas geométricos, entre otros. Es:			45,2%
3. El profesor me incentiva continuamente para entender y aprender mejor los temas de geometría.		64,9%	

8. El uso de las fichas (fotocopias), lecturas del tema que te da el profesor, te ayuda a comprender mejor la clase de geometría.	64,9%
17. Las clases que realiza el profesor mediante juegos como origami u otros te ayudan a entender mejor los temas de geometría.	55,4%
21.El profesor de geometría te brinda o solicita material didáctico (regla, compás, tangram, plastilina, etc) para desarrollar los ejercicios.	63,7%
22. En clase usas computador, tableta o celular para aprender geometría con programas especializados como: GeoGebra, AutoCAD, Cabri, Cloud labs u otros.	7,6%

c) No fue posible realizar un análisis factorial para los datos de las EEDAS, debido a que el número de reactivos fue mayor a los datos. Para los datos de EASIG, el análisis factorial arrojó un modelo matemático con 8 componentes que explican el 52,1% de la varianza (Figura 1).

Varianza total explicada

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de cargas al cuadrado de la rotación		
	Total	% de varianza	% acumulado	Total	% de varianza	% acumulado
1	6,451	21,504	21,504	3,199	10,662	10,662
2	1,750	5,833	27,337	2,197	7,323	17,985
3	1,490	4,968	32,304	2,124	7,080	25,065
4	1,379	4,595	36,900	2,075	6,916	31,981
5	1,217	4,056	40,956	1,779	5,929	37,910
6	1,175	3,916	44,872	1,458	4,860	42,770
7	1,131	3,772	48,643	1,414	4,712	47,482
8	1,040	3,467	52,111	1,388	4,628	52,111
9	,987	3,291	55,401			

Fig. 1. Varianza total EEDAS modificado

d) Las correlaciones entre las dimensiones de cada instrumento mostraron correlaciones positivas, lo cual permite decir que al aumentar la aplicación de unas dimensiones aumentan las otras, mejorando la enseñanza y aprendizaje de la geometría en básica secundaria (Figura 2 y 3).

Correlaciones

		C_Previos	A_R_Contenido	Previos_Nueva_Info	Motivacion_Apren
C_Previos	Correlación de Pearson	1	,803**	,819**	,762**
	Sig. (bilateral)		,000	,000	,000
	N	30	30	30	30
A_R_Contenido	Correlación de Pearson	,803**	1	,767**	,747**
	Sig. (bilateral)	,000		,000	,000
	N	30	30	30	30
Previos_Nueva_Info	Correlación de Pearson	,819**	,767**	1	,813**
	Sig. (bilateral)	,000	,000		,000
	N	30	30	30	30
Motivacion_Apren	Correlación de Pearson	,762**	,747**	,813**	1
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,000	
	N	30	30	30	30

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

Fig. 2. Correlación de Pearson – EEDAS

Nota. EEDAS=Correlación alta y positiva.

Correlaciones no paramétricas

Correlaciones

			Caracterización	Condiciones	Asimilacion	Lenguaje	Facilitacion
Rho de Spearman	Caracterización	Coeficiente de correlación	1,000	,447**	,591**	,529**	,528**
		Sig. (bilateral)	.	,000	,000	,000	,000
		N	356	356	356	356	356
	Condiciones	Coeficiente de correlación	,447**	1,000	,485**	,478**	,457**
		Sig. (bilateral)	,000	.	,000	,000	,000
		N	356	356	356	356	356
	Asimilacion	Coeficiente de correlación	,591**	,485**	1,000	,528**	,503**
		Sig. (bilateral)	,000	,000	.	,000	,000
		N	356	356	356	356	356
	Lenguaje	Coeficiente de correlación	,529**	,478**	,528**	1,000	,481**
		Sig. (bilateral)	,000	,000	,000	.	,000
		N	356	356	356	356	356
	Facilitacion	Coeficiente de correlación	,528**	,457**	,503**	,481**	1,000
		Sig. (bilateral)	,000	,000	,000	,000	.
		N	356	356	356	356	356

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (bilateral).

Fig. 3. Correlación de Spearman - EASIG

Nota. EASIG= Correlación moderada y positiva.

e) Como no fue posible correlacionar las EEDAS con los datos de EASIG por la diferencia entre muestras, se realizó el escalamiento multidimensional PROXCAL para obtener un mapeo de las opiniones de maestros y estudiantes, considerando los datos de los 80 reactivos (Figura 4).

Resumen de procesamiento de casos

Casos		80
Orígenes		1
Objetos		80
Proximidades	Total de proximidades	3160[a]
	Proximidades perdidas	0
	Proximidades activas[b]	3160

a. Suma de todas las proximidades estrictamente inferior-triangular.

b. Las proximidades activas incluyen todas las proximidades no perdidas.

Bondad de ajuste

Medidas de estrés y de ajuste

Estrés bruto normalizado	,03188
Estrés-I	,17855[a]
Estrés-II	,31671[a]
S-Estrés	,04585[b]
Dispersión contada para (D.A.F.)	,96812
Coeficiente de congruencia de Tucker	,98393

PROXSCAL minimiza el estrés bruto normalizado.

a. Factor de escalamiento óptimo = 1,033.

b. Factor de escalamiento óptimo = 1,002.

Fig. 4. Factores del escalamiento multidimensional

El "Estrés bruto normalizado" arroja pertinencia del modelo para el análisis de las variables, ya que este es cercano a cero, lo que se confirma con el coeficiente de congruencia de Tucker y el D.A.F. (Dispersión contada) próximos a uno, lo que hace óptimo el modelo [5].

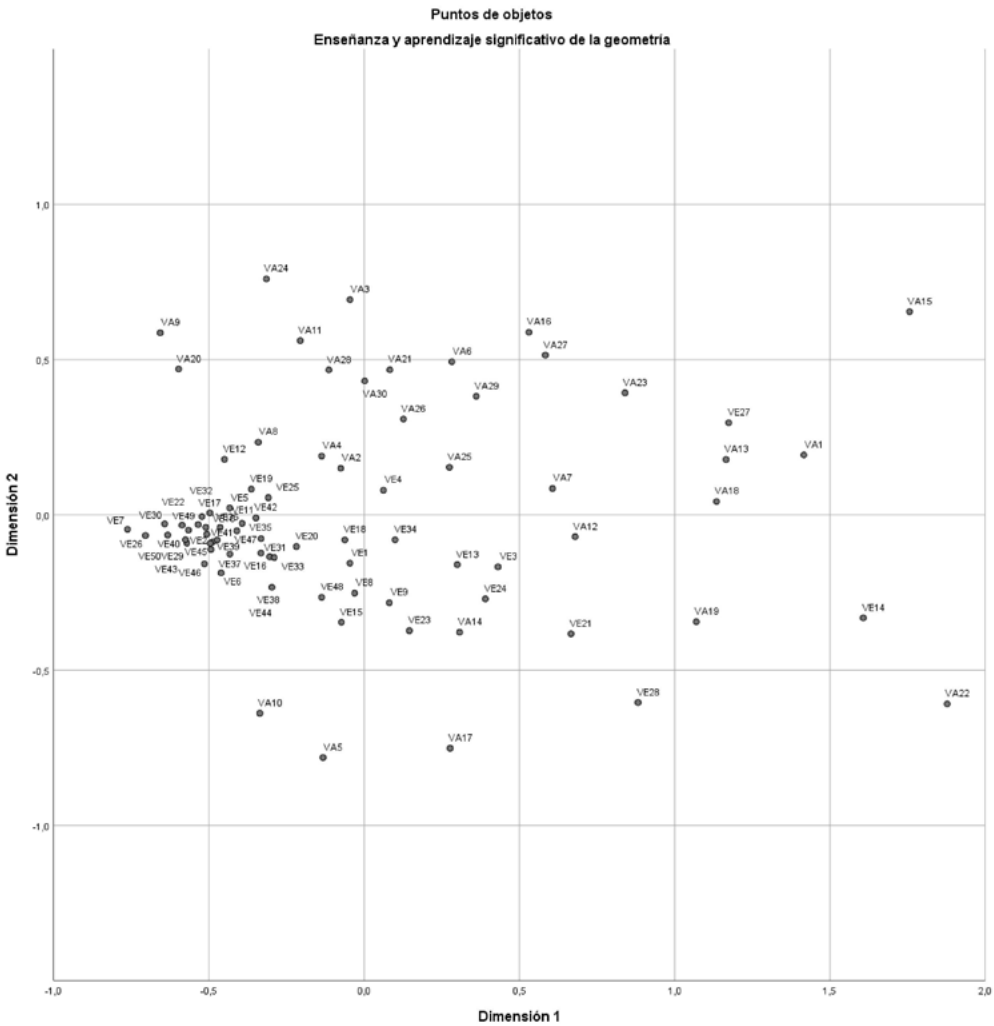


Fig. 5. Mapeo de las proximidades entre los datos de variables

La Figura 5 muestra buenas puntuaciones en las variables de enseñanza (VE) cerca de la coordenada (-0.5, 0.0), lo que indica que tienen una buena implementación, las variables alejadas de este punto en cualquier dirección indican otra calificación, por ejemplo, las variables de aprendizaje (VA) muy alejadas como la VA22, VA14 y la VE14, indican bajas percepciones.

III. CONCLUSIONES

La geometría escolar necesita cambios estructurales ayudada por la comunidad: por parte de la Secretaría de Educación dotar los colegios con elementos idóneos para su enseñanza PC, libros, material didáctico, entre otros. De los rectores trabajar en un cambio curricular donde se mejore la intensidad horaria y se contextualicen los temas a desarrollar. De los maestros mejorar las estrategias poco usadas, teniendo en cuenta las opiniones de los alumnos y su contexto, considerando las dimensiones del aprendizaje significativo de Ausubel en las planeaciones, enseñando la teoría con aplicaciones prácticas, proporcionando a los estudiantes ejemplos concretos, problemas desafiantes y actividades interactivas que fomenten la exploración y el razonamiento geométrico; y de los padres y alumnos el compromiso requerido para su formación.

REFERENCIAS

[1] G. Glaeser, "La crisis de la enseñanza de la geometría", *Revista Integración*. vol. 7, n.° 2, 1989, pp. 77-94.

[2] O. León, "Cien años de reformas y un problema actual en la enseñanza de la geometría", en *Investigaciones en Educación Geométrica*; L. Camargo (Ed.), Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2012, pp. 30-40.

[3] Ministerio de Educación Nacional [MEN], *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*, Bogotá: MEN, 2006.

[4] L. Pabón, *Estrategias de enseñanza rural y su correlación con el aprendizaje significativo. Institución Educativa Alfonso López Pumarejo*, Tesis Ph. D., Universidad Cuauhtémoc EAD, Aguascalientes, 2020.

[5] S. De la Fuente, *Escalamiento multidimensional*, Madrid: Universidad Autónoma de Madrid, s.f. https://www.estadistica.net/ECONOMETRIA/REDUCIR-DIMENSION/ESCALAMIENTO/Escalamiento.pdf

BIOGRAFÍAS

Autor 1: José Alirio Márquez Vera

PhD(c) en ciencias de la educación Universidad Cuauhtémoc EAD plantel Aguascalientes; Magíster en enseñanza de la matemática Universidad Tecnológica de Pereira; Ingeniero Mecánico Universidad Tecnológica de Pereira; Maestro de matemática en secundaria y universidad, en la ciudad de Dosquebradas.

Áreas de investigación: Educación matemática, ingeniería.

Un ejemplo de *tarea con sentido* para la formación de profesores de matemáticas alrededor de la generalización algebraica[1]

An example of *task with sense* for the education of mathematics teachers around algebraic generalization

Mora-Mendieta, Lyda Constanza[2],
Rendón-Mayorga, César Guillermo[3] y Morales-Rozo, Natalia[4]

Resumen:

Se presenta un ejemplo de *tarea con sentido* para la formación inicial de profesores de matemáticas. La tarea más global, de la que se expone aquí una parte, ha sido implementada en distintos semestres de los programas de licenciatura en matemáticas y licenciatura en educación básica primaria, de la Universidad Pedagógica Nacional. Tiene como propósito que los futuros profesores identifiquen acciones/intervenciones del profesor de matemáticas que median el proceso de generalización y que puedan utilizar en sus futuras prácticas profesionales, observando de

1 Este documento corresponde a un avance parcial de la investigación "DMA-629-23. Tareas con sentido para profesores que enseñarán matemáticas, un ejemplo desde la Didáctica de la Aritmética y el Álgebra", financiada por el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, D.C.-Colombia).

2 Universidad Pedagógica Nacional; ORCID 0000-0002-5317-2397. Contacto: lmendieta@pedagogica.edu.co.

3 Universidad Pedagógica Nacional; ORCID 0000-0001-9765-493X. Contacto: cgrendonm@pedagogica.edu.co.

4 Universidad Pedagógica Nacional; ORCID 0000-0002-8559-0470. Contacto: nmoralesr@pedagogica.edu.co.

forma sistemática un video de una clase de matemáticas, alrededor del objeto matemático escolar: números impares. Con ese documento se busca la puesta en práctica de tareas como esta, en programas de formación de profesores de matemáticas, desarrollando competencias profesionales del educador matemático.

Palabras clave: formación del profesor de matemáticas, tareas con sentido, mirar de manera profesional, generalización, álgebra temprana.

Abstract

This document presents an example of a *task with sense* for the education of mathematics teachers. The global task, of which only a part is exposed here, has been implemented in programs in mathematics and undergraduate in primary or secondary education of the Universidad Pedagógica Nacional. Its aim is that future teachers to identify the actions of the mathematics teacher in the generalization process and they can use it in their future professional practice, through the systematic observation of a video of a math class around odd numbers. This document seeks to implement tasks like this in math teacher programs for developing of professional skills of the mathematics educator.

Keywords: education of mathematics teacher, task with sense, noticing, generalization, early algebra.

1) INTRODUCCIÓN

Guacaneme y Mora [1], con la intención de precisar los objetos de estudio del campo de la Educación del Profesor de Matemáticas [EPM] y distanciarse de los de la Educación Matemática [EM], proponen un modelo en el cual establecen cuatro líneas de investigación del campo; una de ellas, en la que se ubica este documento, es la formación de los profesores de matemáticas. Esta línea corresponde a lo que Dolores, *et al.* [2] relacionarían con aquello que tiene como objeto la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y el objetivo de propiciar el aprendizaje de las matemáticas. Para que este se desarrolle en los niños y jóvenes, es necesario crear escenarios y estrategias de enseñanza en la formación de profesores, que impliquen el dominio del saber matemático y de conocimientos acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, los cuales no son tan naturales, como suele creerse.

En este marco, han surgido distintas estrategias o dispositivos de enseñanza que buscan vincular la teoría con la práctica del profesor de matemáticas, entre estos: los estudios de caso, las videograbaciones, entrevistas clínicas, situaciones de microenseñanza, etc. [3] para desarrollar competencias profesionales en los profesores de matemáticas, particularmente la que se ha denominado "mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de las matemáticas" [4], usualmente conocida como "noticing" [5].

Tomando como referente la competencia docente "mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza", se ha venido desarrollando un proyecto de investigación en la Universidad Pedagógica Nacional [UPN], por parte del grupo *Research on Mathematics Teacher Education* [RE-MATE], alrededor de la sistematización de tareas para la enseñanza y el aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra, con el fin de proveer tareas para la formación de profesores de matemáticas que den sentido a su formación. Así, se ha conceptualizado el constructo "tarea con sentido para la formación de profesores de matemáticas" (en adelante *tarea con sentido*), sobre el cual se han reformulado algunas de las tareas que otrora han sido utilizadas en programas de la UPN.

2) DESARROLLO DEL DOCUMENTO

Para la constitución de lo que entendemos por *tarea con sentido* y la selección de tareas en este contexto, la ruta metodológica seguida se resume en:

1) Selección de tareas que los autores del proyecto han desarrollado antes.
2) Identificación de características comunes entre las tareas.
3) Revisión documental en relación con tareas para la formación de profesores.
4) Construcción colectiva del objeto *tarea con sentido*.
5) Reformulación de las tareas inicialmente seleccionadas a partir de la conceptualización construida.

Para precisar lo que aquí se desarrolla, *grosso modo*, entendemos *tarea con sentido* como una demanda estructurada, mediante la cual el formador brinda oportunidades de aprendizaje a los futuros profesores de matemáticas, con un contenido (matemático o didáctico) y un propósito de aprendizaje, involucrando situaciones vinculadas a la práctica o futura práctica profesional y guiada por resultados de la investigación en EM; para promover el desarrollo de conocimientos, competencias y destrezas necesarias en el futuro profesor de matemáticas.

Para el desarrollo de *tareas con sentido*, decidimos seguir la metodología propuesta por Aké y López-Mojica [6], esta es:

Fig. 1. Metodología desarrollo tareas profesionales.

Nota: L.P. Aké y J. M. López-Mojica, "Naturaleza de las tareas profesionales en la formación de profesores de matemáticas", *Páginas de Educación*, vol. 13, n.° 1, pp. 58-81, 2020.

A partir de lo anterior, se propone una tarea, núcleo de este documento, cuyo contexto se describe a continuación: videograbación de una clase con estudiantes de 6 a 11 años, buscando simular un aula multigrado (planeada por los profesores Mora, Salazar y Molina, en 2012) en desarrollo del proyecto "Todos a Aprender" del Ministerio de Educación Nacional colombiano, en convenio con la UPN, grabada en el Instituto Pedagógico Nacional.

Fig. 2. Estudiantes de primaria experimentando la generalización.

Nota: CINNDET UPN. Experiencia: Generalización en primaria.

La situación que se propone en la clase del video es:

"*Con palitos de paleta representar un triángulo, de tal manera que solo se utilice un palito para cada lado del triángulo. A partir de este, formar un nuevo triángulo tal que este comparta un lado con el triángulo anterior. Después, hacer un nuevo triángulo con las condiciones anteriores y otros dos*".

Luego se plantean preguntas que los estudiantes deben resolver primero de manera individual y luego por equipos, entre ellas tenemos:

- ¿Cuántos palitos de paleta necesitamos para construir 22 triángulos con las condiciones dadas (compartir un lado con el primer triángulo)?
- Escribir la explicación de la forma como se determinó la cantidad de palitos de paleta necesarios para construir 22 triángulos con las condiciones dadas.

Lo primero que deben hacer los maestros en formación profesional inicial, es resolver la situación, luego ver el video y responder a estas dos inquietudes (tanto individualmente como en grupo):

1. ¿Hay evidencia(s) del proceso de generalización? ¿Cuál(es)?
2. ¿Cuáles acciones de la profesora contribuyen a que los estudiantes desarrollen la tarea/actividad propuesta?

Seguidamente, los maestros en formación inicial leen dos documentos: [7] y [8].

Después, se desarrolla la fase de reajuste. Finalmente, lo que se pretende institucionalizar es que:

- La clase evidencia el proceso de generalización porque: se consideran números como variables; se establecen relaciones de tipo funcional (entre el número de triángulos y el número de palitos); se buscan y establecen patrones y se explicitan relaciones funcionales como:

"*Para encontrar la cantidad de palitos usados para construir cierta cantidad de triángulos, con las condiciones dadas, se:*

a. *Suma dos a la cantidad de palitos utilizados en la construcción del triángulo anterior".*
b. *Multiplica el número de triángulos por dos y se le suma uno".*
c. *Resta uno a la cantidad de triángulos, se multiplica por 2 y se le suma tres".*
d. *"Para construir una cantidad de triángulos múltiplo de cinco, la cantidad de palitos necesarios termina en uno".*

- Las acciones de la profesora, que contribuyen al desarrollo del proceso de generalización, son: evita ser declarativa, es el estudiante quien establece las relaciones de tipo funcional; promueve el uso de material concreto, ilustra patrones explícitos para relacionar patrón-posición; aumenta gradualmente el valor de la posición, reafirma, cuestiona y contrapregunta.

Fig. 3. Profesora contribuyendo al desarrollo del proceso de generalización.

Nota: CINNDET UPN. Experiencia: Generalización en primaria.

CONCLUSIONES

El diseño de tareas para la formación de profesores de matemáticas va más allá de considerar un conjunto de preguntas que puedan resultar interesantes a juicio del formador de profesores de matemáticas; es importante que estas tengan dos soportes básicos, para que sean *tareas con sentido*: la relación con la práctica o futura práctica profesional del profesor y la relación clara con elementos propios de la investigación en Educación Matemática, que vinculen los objetos matemáticos que enseñarán para profundizar en estos, tanto en lo concerniente al dominio teórico como en lo que se refiere a la enseñanza y el aprendizaje de estos.

Son varias las estrategias didácticas que se encuentran en la literatura para promover la competencia "mirar profesionalmente la práctica de enseñar matemáticas" (*noticing*), entre ellas, el estudio de clase (más óptimo para la formación en ejercicio que, para la formación inicial, a juicio de algunos), la revisión de protocolos, el análisis de entrevistas clínicas, la realización de problemas matemáticos de distintas formas, las situaciones de microenseñanza, entre otras [4].

Es fundamental que todo lo anterior sea reconocido por el formador de profesores de matemáticas, para que su práctica profesional esté situada, actualizada y sea pertinente para su ejercicio docente.

REFERENCIAS

[1] É. Guacaneme y L. Mora. "La Educación del Profesor de Matemáticas: ¿Una tendencia investigativa en Educación Matemática?" en *Coloquio nacional sobre Problemas y Tendencias de Investigación en Educación Matemática*, Bogotá, 2014, pp. 1-9.

[2] C., Dolores, G. González, M. del Rosario, J.A. Hernández y L. Sosa Guerrero, *Matemática educativa: La formación de profesores*, México D.F.: Ediciones Díaz de Santos, 2014.

[3] M. García, "La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación", *Educación Matemática*, vol, 17, n.° 2, pp. 153-166, 2005.

[4] S. Llinares, "Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes", *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, n.° 18, pp. 30-43, 2019.

[5] L. López, "Noticing: Una revisión bibliográfica sobre los orígenes y perspectivas actuales". *RECHIEM. Revista Chilena de Educación Matemática*, vol. 13, n.° 3, pp. 79-92, 2021.

[6] L.P. Aké y J. M. López-Mojica, "Naturaleza de las tareas profesionales en la formación de profesores de matemáticas", *Páginas de Educación*, vol. 13, n.° 1, pp. 58-81, 2020.

[7] A. Fripp, "¿Álgebra en la escuela primaria uruguaya?" en *Actas del 2° Congreso Uruguayo de Educación Matemática*, Montevideo, 2010, pp. 70-74.

[8] D. Hidalgo-Moncada y M.C. Cañadas, "Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria", *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, vol. 14, n.° 3, pp. 204-225, 2020.

BIOGRAFÍAS

Autor 1: Lyda Constanza Mora Mendieta

Experta en Diagnóstico y Educación de Alumnos con Alta Capacidad, de la Universidad Nacional de Educación a Distancia de España; Magíster en Docencia de la Matemática y Licenciada en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional.

Áreas de investigación: Formación de profesores de matemáticas, Talento Matemático, Didáctica de la Aritmética y el Álgebra y Álgebra temprana.

Autor 2: César Guillermo Rendón Mayorga

Especialista en Estadística, de la Universidad Nacional de Colombia; Magíster en Docencia de la Matemática y Licenciado en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. Actualmente, profesor ocasional de tiempo completo de la Universidad Pedagógica Nacional, en la ciudad de Bogotá.

Áreas de investigación: Formación de profesores de matemáticas y Didáctica de las Matemáticas.

Autor 3: Natalia Morales Rozo

Magíster en Docencia de la Matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional; Licenciada en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional; Profesora del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en la ciudad de Bogotá.

Áreas de investigación: Didáctica de las Matemáticas, Formación profesional inicial de profesores de matemáticas y Filosofía e Historia de las Matemáticas

Análisis de errores en estudiantes de grado once cuando resuelven problemas con números racionales

Analysis of errors in eleventh grade students when solving problems with rational number

***Arias-Aristizábal, Cristian Mauricio*[1], *Uzuriaga-López, Vivian Libeth*[2] *y Sánchez-Bedoya, Héctor Gerardo*[3]**

Resumen

Los números racionales son de gran importancia en nuestra sociedad, dada la cantidad de información que se maneja en la vida cotidiana en términos de porcentajes, probabilidades, razones, fracciones, entre otros [9]. Según los resultados de las pruebas Saber, en la Institución Educativa Nazario Restrepo de Viterbo-Caldas, Colombia, en el año 2021, solo el 25% de los estudiantes obtuvieron un puntaje superior o igual a 60% en la prueba de matemáticas [10]. Incluso, a pesar de que durante la educación básica los estudiantes deben enfrentar procedimientos matemáticos que involucran números racionales, se encontró que no comprenden o no pueden aplicar una teoría a situaciones de contexto. Es por ello que la investigación tuvo como propósito analizar algunos de los errores que cometen los estudiantes de grado 11 de la IE Nazario Restrepo cuando resuelven problemas con números racionales. El estudio se abordó bajo

1 Universidad Tecnológica de Pereira; https://orcid.org/0009-0006-4271-4943. Contacto: cmarias@utp.edu.co.
2 Universidad Tecnológica de Pereira; https://orcid.org/0000-0002-4451-8923. Contacto: vuzuriaga@utp.edu.co.
3 Universidad Tecnológica de Pereira; https://orcid.org/0009-0009-1917-3191. Contacto: hgsanche@utp.edu.co.

un enfoque cualitativo, al intentar comprender los errores en la formación matemática de los estudiantes. La información fue recogida mediante un cuestionario con cinco problemas, aplicado a 17 estudiantes, y entrevista focalizada según errores identificados a partir del instrumento de valoración adaptado de Musyadad y Martadiputra [4]: Indicadores para la clasificación de errores según la teoría de Newman. Se encontró que los errores de transformación y codificación fueron los de mayor frecuencia, con porcentajes de 26,59% y 22,84% respectivamente, identificando un uso incorrecto de la información y procedimientos matemáticos inadecuados; mientras que los errores de comprensión fueron los de mejor porcentaje, representados en un 10,11%.

Palabras clave: resolución de problemas, error matemático, número racional.

Abstract

Rational numbers are of relevant importance in our society, given the large amount of information that is handled in everyday life in terms of percentages, probabilities, reasons, fractions, among others [9]. According to the results in the Saber tests, the Nazario Restrepo Educational Institution of Viterbo-Caldas, Colombia, in the year 2021, only 25% of the students obtained a score greater than or equal to 60% in the mathematics test [10]. Even though during basic education students have to face mathematical procedures that involve rational numbers, it was found that they do not understand or cannot apply a theory to context situations. That is why the purpose of the research is to analyze some of the errors that 11th grade students of IE Nazario Restrepo make when they solve problems with rational numbers. The study was approached under a qualitative approach, trying to understand the errors in the mathematical training of students. The information was collected through a questionnaire with five problems, applied to 17 students, and a focused interview according to errors identified from the assessment instrument adapted from Musyadad and Martadiputra [4]: Indicators for the classification of errors according to Newman's theory. It was found that the transformation and coding errors were the most frequent with percentages of 26,59% and 22,84% respectively, identifying incorrect use of information and inadequate mathematical procedures; while comprehension errors were the ones with the best percentage represented at 10,11%.

Keywords: problem solving, mathematical error, rational number.

I. INTRODUCCIÓN

La presente investigación analiza las dificultades en estudiantes de educación media al resolver problemas con números racionales, puesto que se ha identificado en la Institución Nazario Restrepo de Viterbo – Caldas, dada la complejidad, operaciones y relaciones, que los estudiantes cometen errores en la interpretación y uso de esta temática, lo que se traduce en bajos rendimientos en los resultados de pruebas internas y externas. El marco teórico se sustentó según estudios realizados por Rosado [1], Del Puerto, *et al.* [2], Rico [3], Musyadad y Martaduputra [4], Silva [5] y Newman [6], entre otros. De acuerdo a los planteamientos antes descritos, se estableció como objetivo de la investigación analizar algunos de los errores que cometen los estudiantes de grado 11, de la IE Nazario Restrepo, cuando resuelven problemas con números racionales, identificando los tipos de errores según la clasificación de Newman, por lo que se sugiere un recurso para pensar sobre el quehacer de las matemáticas y poder mejorar su comprensión.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

El estudio se enmarca en un enfoque cualitativo, al intentar comprender los errores en la formación matemática de los estudiantes en la modelación y solución de problemas con números racionales. La recolección de la información se realizó mediante un cuestionario de cinco preguntas aplicado a un grupo de 17 estudiantes, quienes debían resolver problemas de contexto utilizando números racionales. La prueba fue diseñada para dos horas de clase.

Las respuestas de los estudiantes se analizaron a partir del instrumento de valoración adaptado de Musyadad y Martaduputra [4]: Indicadores para la clasificación de errores según la teoría de Newman. Se citaron los estudiantes que en la prueba tuvieran algún tipo de error y, a través de una entrevista semiestructurada registrada en videograbaciones, se buscó comprender de mejor manera lo realizado por el estudiante.

Una vez identificados los errores, se calculó el cociente entre el número de errores cometidos por cada tipo de error y el total de errores, para cada una de las preguntas del cuestionario, los resultados se presentan en su representación porcentual, como se muestra en la Tabla I.

Tabla I- Porcentajes de error según clasificación de Newman

Clasificación de errores de Newman	Porcentaje de error
Lectura	20,23%
Comprensión	10,11%
Transformación	26,59%
Habilidad de proceso	20,23%
Codificación	22,84%

En relación a los resultados obtenidos, se pudo determinar que las etapas de transformación (26,59%) y codificación (22,84%), son las de mayor porcentaje de error y el menor porcentaje corresponde a los errores de comprensión (10,11%). Lo anterior corrobora los resultados obtenidos por Abdullah [7] en su investigación, quien encontró que el 20,92% de los errores se producen en las etapas de lectura y comprensión, mientras que el 79,08% involucran las etapas de transformación, habilidades de proceso y codificación; al igual que el estudio realizado por Musyadad y Martadiputra [4], donde se determinó que los errores cometidos fueron: 8,3% de lectura, 13,3% de comprensión, 30% de transformación, 18,3% de habilidad de proceso y 21,7% de codificación.

De acuerdo a lo anterior, se logró establecer que a los estudiantes se les dificulta en mayor medida la escogencia de un método de solución adecuado y el procesamiento de datos, cuando resuelven problemas de contexto que involucran números racionales, en cambio la lectura y comprensión del problema lo resuelven con mayor facilidad.

Se seleccionaron las preguntas con los errores más frecuentes según la clasificación de Newman, los resultados se muestran en la Tabla II.

Tabla II- Resultados de errores obtenidos con mayor frecuencia

Clasificación Newman	Numero pregunta	Porcentaje de error
Lectura	No. 1	39,53%
Comprensión	No. 5	18,84%
Transformación	No. 1	32,65%
Habilidad de proceso	No. 3	27.78%
Codificación	No. 3	25,93%

A partir de la Tabla II, se analizaron los dos porcentajes de error más altos.

En la Pregunta 1, cuyo propósito era evaluar el concepto de fracción como medida y como razón para expresar la relación y proporción entre dos cantidades, se identificó que presentó mayoritariamente errores de lectura y transformación. Los errores de lectura se debieron a que los estudiantes no extrajeron del texto la información correcta para dar solución al problema y solo indicaron generalidades, lo que conduce a errores de proceso, como lo presenta Rosado [1] en sus estudios, al identificar un estudiante que confunde cuatro onzas con cuatro onceavos. Respecto a los errores de transformación, se encontró que los estudiantes al momento de dar respuesta a la pregunta no propusieron los procedimientos matemáticos adecuados, haciendo uso incorrecto de la información, y formulando procesos no especificados o incoherentes. Según el propósito de la pregunta, los estudiantes no identificaron la proporcionalidad entre dos cantidades como método de solución para establecer relaciones de equivalencia, desconociendo el concepto de fracción como un factor determinante para resolver el ejercicio. En los procedimientos antes descritos, se pudo verificar que los estudiantes no tienen claridad sobre cuál de las cuatro operaciones básicas (+, -, x, ÷) deben emplear y los datos correctos a utilizar [4], en sus planteamientos matemáticos que permiten dar solución a los problemas; lo cual guarda relación con los hallazgos en estudios realizados por Rohmah [8], en cuyos resultados se encontró que los estudiantes no identifican adecuadamente la información del texto, no saben cómo transformar el problema a un procedimiento matemático, no comprenden la situación problema con claridad y presentan conocimientos deficientes de conceptos matemáticos.

III. CONCLUSIONES

Dando cumplimiento a los objetivos planteados, se identificó que, a pesar de ser los números racionales una temática tratada de manera amplia en los contenidos curriculares de básica primaria y básica secundaria, los estudiantes continúan presentando dificultades en la interpretación y procesamiento de la información al resolver problemas con este tipo de números. También se encontraron falencias en conocimientos previos, incoherencias al adoptar una estrategia de cálculo en la solución de los ejercicios, errores en el procesamiento de datos y falta de experiencia en la resolución de problemas.

La metodología aplicada en la presente investigación constituye una herramienta relevante en la práctica docente para identificar y mejorar las estrategias de enseñanza, al permitir identificar la manera como piensa el estudiante y los errores que comete, a partir de lo cual se encontró que las mayores dificultades se producen cuando se debe hacer un análisis proporcional con la información del problema, al no encontrar la manera correcta de procesar la información, aplicando en cambio metodologías inadecuadas en la solución de los ejercicios.

REFERENCIAS

[1] T. A. Rosado, "Operaciones básicas de números racionales aplicados en el planteamiento y resolución de problemas de ciencias en los grados sexto y séptimo de la Institución Educativa Virgen del Carmen". *Maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales*. Universidad Nacional de Colombia. 2018.

[2] S. M. Del Puerto, C. L. Minnaard, S.A. Seminara, "Análisis de errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas". *Revista iberoamericana de educación*, vol 38(4), pp. 1-12, 2004.

[3] L. Rico, "Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas" en *Educación matemática*, J. Kilpatrik, P. Gómez, y L. Rico, ed., Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, pp. 69-108.

[4] M. A. Musyadad, B. A. Martadiputra, "Error type analysis based on Newman's theory in solving mathematical communication ability of junior high school students on the material of polyhedron". *Journal of Physics: Conference Series*, vol.1806, pp. 1-6, 2021.

[5] A. J. Silva, "Propuesta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de los números racionales en el grado 601 del colegio Miguel Antonio Caro I.E.D J.M. a través de la teoría de las situaciones didácticas". *Maestría en ciencias de la educación*. Universidad Libre. 2017.

[6] N. A. Newman, "An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks". *Victorian Institute of Educational Research Bulletin*, vol. 39, pp. 31-43, 1977.

[7] A. H. Abdullah, N. L. Z. Abidin, M. Ali, "Analysis of Students' Errors in Solving Higher Order Thinking Skills (HOTS) Problems for the Topic of Fraction". *Asian Social Science*, vol 11, n.° 21, pp. 133-142, 2015.

[8] M. Rohmah, S. Sutiarso, "Analysis problem solving in mathematical using theory Newman" *EURASIA J. Math. Sci. Technol. Educ.*, vol 14(2), pp. 671–681, 2018.

[9] G. Obando, "La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo". *Revista EMA*, vol. 8, n.° 2, pp. 157-182, 2003.

[10] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. *Resultados saber 11 – 2021*. 20 de noviembre de 2021. Disponible en http://www2.icfesinteractivo.gov.co

Biografías

Autor 1: Cristian Mauricio Arias Aristizábal

Magíster en Enseñanza de la Matemática, de la Universidad Tecnológica de Pereira; Ingeniero Químico, de la Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales; Docente de Matemáticas, en el municipio de Viterbo.

Áreas de investigación: Educación Matemática.

Autor 2: Vivian Libeth Uzuriaga López

Doctora en Ciencias Pedagógicas del Instituto Latinoamericano y Caribeño, de la Habana-Cuba; Magíster en Matemáticas de la Universidad del Valle; Especialista en Matemática Computacional y Licenciada en Matemáticas, de la Universidad del Cauca. Profesora titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira.

Áreas de investigación: Didáctica de la Matemática, Álgebra.

Autor 3: Héctor Gerardo Sánchez Bedoya

Doctor en Educación, de la Universidad Norbert Wiener del Perú; Magíster en Comunicación Educativa, de la Universidad Tecnológica de Pereira; Especialista en Computación para la Docencia, de la Universidad Antonio Nariño; Licenciado en Matemática y Física, de la Universidad Tecnológica de Pereira. Docente catedrático de la Universidad Tecnológica de Pereira. Docente de tiempo completo de la Institución Educativa INEM Felipe Pérez de Pereira.

Áreas de investigación: Didáctica de la Matemática y Uso pedagógico de las TIC.

Transformación curricular mediante proyectos transversales para la enseñanza de las matemáticas en la básica primaria[1]

Curricular transformation through transversal projects for the teaching of mathematics in elementary school

Ballesteros-Palmett, Eudys Esther[2], Mejía-Aristizábal, Luz Stella[3] y Jaramillo-López, Carlos Mario[4]

Resumen

Este documento muestra algunos avances de investigación en el marco de un estudio doctoral en el que se propone una transformación curricular, mediante proyectos transversales para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria, donde se plantea que en la actualidad existe la necesidad de ajustar y transformar el currículo escolar para adaptarse a las demandas laborales, los avances científicos y tecnológicos, las situaciones de contingencia, los bajos índices de motivación y desempeño educativo y los diversos entornos escolares. Además, se destaca la necesidad de la formación docente y la interdisciplinariedad en el currículo. Así mismo, se considera que las matemáticas pueden convertirse en un eje transversalizador de proyectos interdisciplinares que promuevan el desarrollo de competencias del siglo XXI, como el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la

1 Doctorado en Educación. Universidad de Antioquia – Colombia. Facultad de Educación. Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia - EDUMATH (UdeA-Eafit).

2 Universidad de Antioquia; https://orcid.org/0009-0000-0104-0731.
Contacto: eudys.ballesteros@udea.edu.co.

3 Universidad de Antioquia; https://orcid.org/0000-0002-5222-0297.
Contacto: luz.mejia@udea.edu.co.

4 Universidad de Antioquia https://orcid.org/0000-0002-3937-5032.
Contacto: carlos.jaramillo1@udea.edu.co.

competencia digital, brindando a los estudiantes la oportunidad de aplicar conceptos y habilidades matemáticas en contextos reales, promoviendo a su vez un aprendizaje significativo. La metodología propuesta para el estudio es cualitativa, utilizando un enfoque de estudio de casos, donde se pretende contar con la participación de maestros de educación primaria de una institución pública de Medellín y utilizar técnicas de recolección de datos como la observación participante, entrevistas semiestructuradas, grupos de discusión y análisis de documentos; que serán sistematizados y analizados con el software Atlas.ti. Se esperan resultados que demuestren los beneficios de los proyectos transversales en la transformación curricular, proporcionando pautas y recomendaciones para su integración en el currículo, identificando desafíos y obstáculos en su implementación.

Palabras clave: proyectos transversales, transformación curricular, competencias siglo XXI, enseñanza de las matemáticas, formación de docentes.

Abstract

This document shows some research advances in the framework of a doctoral study in which a curricular transformation is proposed through transversal projects for the teaching of mathematics in primary education, where it is stated that there is currently a need to adjust and transform the school curriculum to adapt to labor demands, scientific and technological advances, contingency situations, low levels of motivation and educational performance, and various school environments. In addition, the need for teacher training and interdisciplinarity in the curriculum is highlighted. Likewise, it is considered that mathematics can become a transversal axis of interdisciplinary projects that promote the development of 21st century skills, such as critical thinking, problem solving and digital competence, giving students the opportunity to apply mathematical concepts and skills in real contexts and in turn promoting meaningful learning. The methodology proposed for the study is qualitative, using a case study approach, where it is intended to have the participation of primary school teachers from a public institution in Medellín and use data collection techniques such as participant observation, semi-structured interviews, discussion groups and document analysis; that will be systematized and analyzed with the Atlas.ti software. Results are expected that demonstrate the benefits of transversal projects in curricular transformation, providing guidelines and recommendations for their integration into the curriculum, identifying challenges and obstacles in their implementation.

Keywords: transversal projects, curricular transformation, 21st century skills, mathematics teaching, teacher training.

I. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, en Colombia y en otros países, se ha suscitado un creciente debate en torno a la necesidad de ajustar y transformar el currículo educativo. Diversos factores, como las demandas laborales, los entornos escolares de los estudiantes, los avances científicos y tecnológicos, las situaciones de contingencia ocasionadas por la pandemia del Covid-19 y los bajos índices de motivación y desempeño académico, han determinado la urgencia de replantear el enfoque y contenido de la educación.

La adaptación del currículo a las demandas laborales actuales, se ha convertido en un imperativo para garantizar que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para enfrentar los desafíos del mundo laboral en constante cambio [1]. Asimismo, la integración de avances científicos y tecnológicos en el currículo, busca preparar a los estudiantes para un futuro cada vez más digitalizado [2].

La pandemia del Covid-19 ha dejado en evidencia la necesidad de ajustar el currículo para hacer frente a situaciones de contingencia y desafíos educativos sin precedentes. La Organización Mundial de la Salud ha resaltado la importancia de adaptarse a los cambios y brindar una educación resiliente y efectiva.

Además, se ha observado una preocupante disminución en la motivación y el rendimiento académico de los estudiantes en los diferentes niveles educativos [3] y [4]. Estos hallazgos destacan la importancia de realizar cambios en el currículo para fomentar un aprendizaje significativo y relevante, que despierte el interés y promueva un mejor rendimiento académico en los estudiantes.

En respuesta a estos desafíos, la ciudad de Medellín ha sido pionera en la transformación educativa al convertirse en el Distrito Especial de Ciencia, Tecnología e Innovación [5]. Como parte de esta transformación, se está llevando a cabo el programa de Transformación Curricular, que implica revisar los planes de estudio y reevaluar el currículo para satisfacer las necesidades del entorno y promover el desarrollo de las habilidades y competencias del siglo XXI.

Sin embargo, en el proceso de transformación curricular, se han evidenciado desafíos y dificultades. Entre ellos, se destaca la falta de formación de los maestros para identificar los elementos conceptuales necesarios para una verdadera transformación. Es fundamental brindar a los docentes las herramientas y recursos necesarios para implementar estrategias pedagógicas que fomenten el desarrollo de las competencias siglo XXI [6] y [7].

En este contexto, la transversalización de áreas, en particular las matemáticas, ha surgido como una opción para potenciar la interdisciplinariedad y promover un aprendizaje significativo. La interconexión de saberes y el desarrollo de habilidades cognitivas esenciales se logran al integrar las matemáticas de manera significativa en proyectos interdisciplinares [8].

En este sentido, esta propuesta investigativa tiene como objetivo analizar cómo lograr una transformación curricular mediante proyectos transversales para la enseñanza de las matemáticas en la educación básica primaria. Se busca comprender cómo esta transformación mejora la enseñanza de las matemáticas y facilita el desarrollo de competencias clave para el siglo XXI en los estudiantes.

La importancia de este estudio radica en la necesidad de fortalecer el currículo y promover un aprendizaje integral y enriquecido, acorde con las demandas de la sociedad actual y la diversidad de los entornos escolares. Asimismo, se busca proporcionar pautas y recomendaciones para que los docentes puedan implementar proyectos transversales de manera efectiva a partir de formaciones para ellos, potenciando así el desarrollo de las competencias siglo XXI en sus estudiantes [9].

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

Esta propuesta de investigación está enmarcada dentro de un enfoque cualitativo, centrado en comprender en profundidad fenómenos sociales relacionados con la enseñanza de las matemáticas en la educación básica primaria; donde se utilizará un estudio de casos para examinar detalladamente una situación particular en su contexto real.

Se seleccionarán maestros de la básica primaria de una institución pública en Medellín, cuya participación será voluntaria y se enfocará en la construcción colectiva de proyectos transversales. Estos proyectos se articularán con programas de formación ofrecidos por el Ministerio de Educación Nacional, la Secretaría de Educación de Medellín y por la misma Institución Educativa, y se espera que a partir de ellos mejore la enseñanza de las matemáticas.

Para recopilar información, se emplearán diversas técnicas cualitativas, como observación participante, entrevistas en profundidad, entrevistas semiestructuradas, grupos de discusión y análisis de documentos. Se garantizará la confidencialidad y el consentimiento informado de los participantes, así como una actitud reflexiva y abierta durante todo el estudio. El análisis de los resultados se realizará a través del software Atlas.ti.

El objetivo de esta propuesta investigativa es identificar estrategias efectivas de enseñanza de matemáticas a través de proyectos transversales, establecer pautas para su integración en el currículo, analizar percepciones y experiencias de los docentes, identificar desafíos y obstáculos, entre otros aspectos.

Se espera que los resultados demuestren los beneficios de los proyectos transversales en la enseñanza de las matemáticas, contribuyendo al mejoramiento de las prácticas docentes y al desarrollo de competencias del siglo XXI en los estudiantes de educación básica primaria.

III. CONCLUSIONES

Partiendo de que esta es aún una propuesta investigativa que inicia su desarrollo, a partir de la revisión de la literatura y que por ahora solo se tiene una proyección de lo que se espera lograr con ella, se puede decir que los proyectos transversales pueden ser una estrategia efectiva para mejorar la enseñanza de las matemáticas y promover el desarrollo de competencias del siglo XXI en los estudiantes. Así como pueden contribuir a la transformación curricular, integrando contenidos y contextualizando el aprendizaje en el área de matemáticas.

La participación activa y voluntaria de los maestros en la investigación sería una muestra de su interés en mejorar su práctica docente y fortalecer sus habilidades en la enseñanza de las matemáticas. Por ello, la formación docente en el área de matemáticas es un factor relevante para el nivel de competencias matemáticas de los estudiantes, lo que hace que se convierta en una necesidad en el modelo de educación actual.

En este sentido, la investigación arrojará pautas y recomendaciones valiosas para la inclusión exitosa de proyectos transversales en el currículo de matemáticas, en la educación básica primaria, y los resultados obtenidos pueden tener implicaciones importantes para la toma de decisiones en políticas educativas y para el diseño de programas de formación docente, enfocados en la enseñanza de las matemáticas.

En general, la propuesta de investigación promete proporcionar conocimientos significativos sobre cómo mejorar la enseñanza de las matemáticas en la educación básica primaria, a través de proyectos transversales, beneficiando tanto a los docentes como a los estudiantes en su proceso de aprendizaje. Las conclusiones obtenidas a partir de los resultados finales podrían ser utilizadas para mejorar las prácticas educativas y enriquecer el campo de la educación matemática.

REFERENCIAS

[1] J. Smith, "Adaptación curricular y demandas laborales", *Revista de Educación y Trabajo*. 15(2), pp. 45-62, 2020.

[2] M. García, "Avances científicos y tecnológicos en el currículo: una perspectiva actualizada", *Revista de Investigación Educativa*, 37(2), pp.89-106, 2022.

[3] L. Pérez, "Bajos índices de motivación y desempeño en los niveles educativos", *Revista de Investigación en Educación*, 25(1), pp. 67-84, 2018.

[4] R. González, *et al.*, "Motivación y rendimiento académico: un análisis comparativo en diferentes niveles educativos", *Revista Latinoamericana de Psicología Educativa*, 40(2), pp. 267-284, 2022.

[5] Congreso de Colombia, (2023, enero 12), Ley 2286. [En línea]. Disponible:https://dapre.presidencia.gov.co/normativa/normativa/LEY%202286%20DEL%2012%20DE%20ENERO%20DE%202023.pdf.

[6] R. González, "Formación docente para la implementación de competencias del siglo XXI", *Revista de Formación Docente*, 10(2), pp. 78-94, 2021.

[7] M. García, "Herramientas y recursos para la implementación de estrategias pedagógicas centradas en las competencias del siglo XXI" en *Revista de Innovación Educativa*, 17(1), pp. 112-128, 2020.

[8] C. Ramírez, "La transversalización de áreas en la enseñanza: Conexiones y aplicaciones en contextos reales", *Revista de Educación Interdisciplinaria*, 18(3), pp. 89-104, 2022.

[9] J. López, S. Rodríguez & E. Martínez, "Interdisciplinariedad en la educación: Promoviendo habilidades para el siglo XXI", *Revista de Investigación Educativa,* 30(2), pp. 215-230, 2023.

Biografías

Autor 1: Eudys Esther Ballesteros Palmett

Actualmente estudiante de Doctorado en Educación de la Universidad de Antioquia; Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia; Licenciada en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia; Coordinadora Académica de la Institución Educativa Miraflores, Medellín; Integrante del grupo de investigación de Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit).

Áreas de investigación: educación matemática.

Autor 2: Luz Stella Mejía Aristizábal

Doctora en Educación de la Universidad de Antioquia; Magister en educación; Especialista en Enseñanza de la física; Licenciada en Matemáticas y Física de la misma universidad; Maestra de la Facultad de Educación de la Universidad Antioquia y de la Institución Educativa Centro Formativo de Antioquia; Integrante del Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit), y Perspectivas de investigación en Educación en Ciencias PiEnCias.

Áreas de investigación: formación de maestros, evaluación educativa y de aprendizaje, currículo e inserción profesional docente.

Autor 3: Carlos Mario Jaramillo López

Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad Politécnica de Valencia, España: Profesor del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Antioquia; Líder del grupo Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit) y del grupo Ciencias Básicas Aplicadas Tecnológico de Antioquia.

Áreas de investigación: educación matemática.

Enseñanza y aprendizaje de curvas en coordenadas polares con profesores en formación desde el análisis didáctico[1]

Teaching and Learning of curves in polar coordinates with teachers in training from the didactic analysis

Gutiérrez Zuluaga, Heiller[2], Aldana Bermúdez, Eliecer[3]

Resumen

Este proyecto de investigación pretende aportar a la reflexión académica acerca de cómo los profesores de matemáticas en formación planean y organizan la enseñanza y tiene como objetivo generar el desarrollo de conocimientos matemáticos sobre curvas en coordenadas polares en ellos, mediante el análisis didáctico, un tema no muy trabajado en dicho contexto, en lo relacionado con el pensamiento espacial y geométrico, en el cual poco se han dado a conocer los significados que las coordenadas polares tienen en las acciones y en las actividades humanas. Para ello, se utiliza la teoría del análisis didáctico [1] que corresponde a un marco teórico y metodológico, que busca dar un significado a los conceptos matemáticos y se fundamenta en cuatro fases: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación [2]. Este estudio es de tipo cualitativo e interpretativo para comprender los fenómenos educativos

1 Este artículo es producto de proyecto de tesis doctoral del candidato a doctor Heiller Gutierrez Zuluaga, estudiante del doctorado en Ciencias de la Educación, Rudecolombia CADE Universidad del Quindío.

2 Universidad del Quindío; código ORCID: 0000-0003-2057-5859.
Contacto: hgutierrez@uniquindio.edu.co.

3 Universidad del Quindío; código ORCID: 0000-0003-1691-2699.
Contacto: eliecerab@uniquindio.edu.co.

que ocurren en un contexto, se trata de interpretar y explicar la forma como los estudiantes llegan a la comprensión y construcción conceptual [3]. Está basada en una perspectiva histórico-hermenéutica, debido a que es un enfoque interpretativo en las Ciencias de la Educación que busca la comprensión global del fenómeno [4]. Como método, se empleará la investigación-acción con los estudiantes de primer año de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Quindío, registrados por primera vez en el espacio académico de Geometría Analítica.

Palabras clave: análisis didáctico, curvas en coordenadas polares, profesores en formación.

Abstract

This research project aims to contribute to the academic reflection of some elements about how mathematics teachers in training plan and organize teaching and aims to generate the development of mathematical knowledge about curves in polar coordinates in mathematics teachers in training, through Didactic Analysis, a subject that has not been worked on in this context, in relation to spatial and geometric thinking in which little has been made known about the meanings that polar coordinates have in human actions and activities. For this, the didactic analysis theory is use [1], which corresponds to a theoretical and methodological framework that seeks to give meaning to mathematical concepts and is based on four phases: content analysis, cognitive analysis, instruction analysis and performance analysis [2]. This study is of a qualitative and interpretative type to understand the educational phenomena that occur in a context, it is about interpreting and explaining the way in which students come to understanding and conceptual construction [3]. It is based on a historical-hermeneutic perspective, since it is an interpretive approach in Educational Sciences that seeks a global understanding of the phenomenon [4]. As a method, Action-Research will be used with the first-year students of the Mathematics Degree of the University of Quindío, registered for the first time in the academic space of Analytical Geometry.

Keywords: didactic analysis, curves in polar coordinates, teachers in training.

I. INTRODUCCIÓN

La experiencia como docentes de matemáticas, específicamente de los espacios académicos de Geometría Analítica, nos han permitido identificar diversas dificultades que presentan los estudiantes, posiblemente debido a la instrucción previa recibida, las cuales afectan el proceso de comprensión de las curvas en coordenadas polares: una de ellas es la carencia de articulación entre los registros algebraicos y geométricos. Así mismo, los estudiantes demuestran dificultad cuando se ven enfrentados al uso de teoremas y definiciones rigurosas, pues buscan memorizar fórmulas y mecanizar procedimientos sin analizar el concepto [4]

Además, los estudiantes tienen concepciones erróneas de curvas en coordenadas polares, como lo referencia Fernández "es que no asumen las secciones cónicas como lugares geométricos, no le dan sentido y significado" [5, p.24]. Las razones anteriores hacen que a los estudiantes se les dificulte comprender las curvas en coordenadas polares como lugares geométricos, igualmente cometen errores al vincular sus elementos desde la representación algebraica a la representación gráfica y viceversa, además presentan confusión al convertir una ecuación general a su respectiva ecuación canónica y viceversa, y en algunos casos no identifican estos objetos matemáticos al presentarles una ecuación de segundo grado.

De acuerdo con las anteriores dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las curvas en coordenadas polares, se deben buscar estrategias que mejoren este proceso y faciliten al estudiante la comprensión de los conceptos. Con base en las consideraciones expuestas anteriormente, se precisa el siguiente interrogante, eje principal del problema al cual se busca dar respuesta con la propuesta de investigación: **¿Cómo generar conocimientos matemáticos sobre curvas en coordenadas polares de profesores de matemáticas en formación en contexto de universidad?**

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

Esta investigación es de tipo cualitativa e interpretativa, para comprender los fenómenos educativos que ocurren en un contexto, se trata de interpretar y explicar la forma como los estudiantes llegan a la comprensión y construcción conceptual. En palabras de Bisquerra [3, p. 309] es "un método de investigación de gran relevancia para el desarrollo de las ciencias humanas y sociales que implica un proceso de indagación caracterizado por el examen sistemático y en profundidad de casos de un fenómeno, entendidos estos como entidades sociales o entidades educativas únicas". De acuerdo con los objetivos planteados para esta propuesta de investigación, está basada en una perspectiva histórico-hermenéutica, debido a que es un enfoque interpretativo en las Ciencias de la Educación que busca la comprensión global del fenómeno [6], el objeto matemático son las curvas en coordenadas polares. Para ello, se utilizará el método de la investigación–acción [7], porque se trata de un plan para ejecutar, una acción o intervención de los investigadores, una observación orientada a la recogida y análisis de datos, y una reflexión final de los resultados obtenidos. Dicho estudió se hará con los estudiantes de primer año de carrera, registrados por primera vez el espacio académico de Geometría Analítica. Este estudio se realizará en la ciudad de Armenia, en la Universidad del Quindío, Facultad de Ciencias de la Educación, con un grupo de 20 profesores en formación, aproximadamente, que cursan segundo semestre de programa de Licenciatura en Matemáticas, por tanto, se espera que tengan los conceptos previos en coordenadas polares, adquiridos en su formación en básica primaria y secundaria del sistema educativo colombiano, los cuales les permitan la comprensión de algunas situaciones problema y apliquen las propiedades geométricas. El proceso de investigación se desarrollará mediante las cuatro fases de acuerdo con la propuesta de Gómez [8]: el análisis didáctico comienza con una revisión histórica y epistemológica de los conceptos centrales implicados en el tema de las curvas en coordenadas polares. Continúa con el análisis de contenido matemático escolar correspondiente, que se complementa con una síntesis que selecciona y organiza los conceptos y procedimientos relevantes que articularn el tema de curvas en coordenadas polares. Prosigue con un análisis cognitivo centrado en el aprendizaje de tales contenidos, que genera una síntesis sobre expectativas de aprendizaje establecidas, según dichos criterios, y que sirve para organizar los aprendizajes. Avanza con el análisis de instrucción que, a su vez, produce una nueva síntesis que se expresa en el diseño de las unidades didácticas. Finalmente, el análisis de actuación sobre la evaluación de la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos desarrollados en la etapa anterior, que da paso a una síntesis evaluadora del proceso. A continuación, se describen las actividades a desarrollar en cada una de las fases:

Tabla I: Actividades a desarrollar en cada una de las fases del Análisis Didáctico

Fases	Actividades
1. Análisis de contenido	Identificar, organizar y clasificar los significados del concepto matemático en estudio, a partir de las dimensiones: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.
2. Análisis cognitivo	Establecer las habilidades y competencias que desarrollan los estudiantes para profesores, haciendo una descripción del dominio de las nociones y conceptos al inicio y al final del proceso.
3. Análisis de instrucción	Diseñar, analizar y seleccionar las tareas que constituirán las actividades de enseñanza-aprendizaje, teniendo en cuenta los análisis de contenido y cognitivo.
4. Análisis de actuación	Determinar las capacidades que los estudiantes han desarrollado y las dificultades que se pueden haber manifestado.

Fuente: Elaboración propia

III. CONCLUSIONES

La puesta en marcha de esta investigación advierte como posibles resultados: desde la planificación y organización de la enseñanza, se formará a los profesores y se dará un aporte a la fenomenología de las curvas en coordenadas polares, como objeto matemático del conocimiento y, en lo que tiene que ver con el aprendizaje, responder a la pregunta de para qué me sirven estos conceptos matemáticos. Además, se configura en un aporte a políticas actuales y a los resultados de aprendizaje.

REFERENCIAS

[1] J. González y J. Gallardo, *Análisis didáctico curricular: un procedimiento para fundamentar y completar el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas.* Málaga: Universidad de Málaga, 2007.

[2] P. Gómez, "Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas", *Revista EMA*, 7(3), pp. 251-293, 2002.

[3] R. Bisquerra y M. Sabariego, "El Proceso de Investigación", en *Metodología de la Investigación Educativa*; R. Bisquerra (Coord.), 2ª ed., Madrid: La Muralla, 2009, pp. 89-125.

[4] Sosa, L., Tuyub, I., & Aparicio, E. (2014). Diagnóstico en estudiantes de nuevo ingreso a nivel superior: competencias y dificultades matemáticas.

[5] E. Fernández, (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando cabri geometre II plus*, tesis de maestría, Universidad del Valle, Valle del Cauca, Colombia, 2011. Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3901/4/CB-0450269.pdf

[6] R. M. Cifuentes-Gil y R. María, *Diseño de proyectos de investigación cualitativa*. Buenos Aires: Noveduc libros, 2011.

[7] A. Latorre, *La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa*, España: GRAÓ, 2009.

[8] P. Gómez, (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*, tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada, España, 2007

Biografías

Autor 1: Heiller Gutiérrez Zuluaga

Candidato a doctor en Ciencias de la Educación, Rudecolombia CADE Universidad del Quindío; Profesor Tiempo Completo de planta, Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Quindío; Magíster en Educación, de la Universidad Católica de Manizales; Licenciado en Matemáticas y Computación de la Universidad del Quindío.

Áreas de investigación: educación matemática.

Autor 2: Eliécer Aldana Bermúdez

Doctor en Educación Matemática, Universidad de Salamanca (España), Profesor Tiempo Completo de Planta, Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Quindío; Integrante Grupo de Investigación GEMAUQ; Licenciado en Matemáticas y Computación de la Universidad del Quindío.

Áreas de investigación: educación matemática.

Niveles de razonamiento covariacional, en estudiantes de undécimo grado, evidenciados mediante situaciones con interés simple[1]

Levels of covariational reasoning in eleventh-grade students evidenced through situations involving simple interest

Gutiérrez Villamizar Laura[2], Díaz Rincón Carlos[3], Rey Gómez Jaiver[4], Parada Rico Sandra[5]

Resumen

La educación matemática busca acercar el conocimiento matemático a la vida cotidiana, por ejemplo, con el uso de fenómenos económicos y financieros. Ahora bien, en undécimo grado hay un especial énfasis en el pensamiento covariacional, el cual puede potenciarse a través de situaciones como la del interés simple. Esto permitirá a los estudiantes aplicar conceptos financieros en situaciones cotidianas y tomar decisiones financieras personales y familiares. Sin embargo, los estudiantes de undécimo pueden enfrentar dificultades para transferir los conceptos aprendidos en el aula a situaciones reales, posiblemente porque no se establece una conexión entre

---

1 Esta investigación hace parte del Trabajo de investigación de Maestría denominado *"Reflexiones de profesores sobre el uso de fenómenos económicos y financieros para promover actividad matemática en el aula"*.

2 Universidad Industrial de Santander, 0009-0009-9220-6789.
Contacto: lauragutierrezvillamizar@gmail.com

3 Universidad Industrial de Santander, 0009-0007-7020-4032.
Contacto: carlosivand.2001@gmail.com

4 Universidad Industrial de Santander, 0000-0003-0109-7361.
Contacto: jaiverdavidrey@hotmail.com

5 Universidad Industrial de Santander, 0000-0001-5468-0943.
Contacto: sanevepa@uis.edu.co

la teoría y la práctica, y la falta de ejemplos y ejercicios relacionados con la vida cotidiana. Por todo lo antes dicho, esta investigación tiene como objetivo determinar los niveles de razonamiento covariacional que alcanzan los estudiantes de undécimo grado al resolver situaciones relacionadas con el interés simple.

Palabras clave: razonamiento covariacional, interés simple, acción mental.

Abstract

Mathematics education seeks to bring mathematical knowledge closer to everyday life, for example, with the use of economic and financial phenomena. Now, in eleventh grade there is a special emphasis on covariational thinking, which can be enhanced through situations such as simple interest. This will allow students to apply financial concepts in everyday situations and make personal and family financial decisions. However, eleventh grade students may face difficulties in transferring the concepts learned in the classroom to real situations, possibly because there is no connection between theory and practice, and the lack of examples and exercises related to everyday life. For all the above, this research aims to determine the levels of covariational reasoning achieved by eleventh grade students when solving situations related to simple interest.

Key words: covariational reasoning, simple interest, mental action.

I. INTRODUCCIÓN

La educación matemática busca acercar el conocimiento a la vida cotidiana. Desde la secundaria, se busca enseñar a los estudiantes conceptos de matemática financiera, como el interés simple, para que puedan aplicarlos en situaciones cotidianas y tomar decisiones financieras informadas.

Sin embargo, algunos estudiantes de undécimo grado enfrentan dificultades para transferir esos conceptos financieros del aula a situaciones del mundo real. Esto puede deberse a la falta de conexión entre la teoría académica y la aplicación práctica, ya que carecen de ejemplos y ejercicios que muestren cómo usar conceptos financieros en situaciones cotidianas.

Por lo tanto, el objetivo de esta investigación fue analizar el nivel de razonamiento covariacional en estudiantes de undécimo grado, al resolver problemas que involucran interés simple. El razonamiento covariacional se refiere a la capacidad de comprender cómo dos variables están relacionadas y cómo varían juntas, permitiendo aplicar este conocimiento matemático en la vida real.

II. DESARROLLO

El marco de esta investigación es guiado por la definición de razonamiento covariacional que esta dado como, "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (p.124) [1].

Este marco acoge las expresiones procesos de pensamiento pseudoanalíticos y comportamientos pseudoanalíticos, las cuales, según Carlson y sus colaboradores, fueron introducidas por Vinner [4] y se asocian en su orden con "procesos de pensamiento y comportamientos que ocurren sin comprensión y los comportamientos pseudoanalíticos son producidos por procesos de pensamiento pseudoanalíticos" [1, p. 125].

TABLA I - Acciones mentales del marco conceptual

Acción mental	Descripción de la acción mental
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios de otra.
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.

El marco conceptual para la covariación contiene cinco niveles distintos de desarrollo. Decimos que se da una habilidad de razonamiento covariacional cuando alguien ha alcanzado un nivel de desarrollo al logra mantener las acciones mentales asociadas con el nivel y, a su vez, las acciones mentales relacionadas con todos los niveles que están por debajo de ese nivel.

TABLA II - Marco conceptual para los niveles de la covariación

Nivel del razonamiento covariacional	Descripción
N1. Coordinación	Las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
N2. Dirección	Las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y Am2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.
N3. Coordinación cuantitativa	Las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2, y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
N4. Razón promedio	Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. a razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2, AM3 y AM4 son sustentadas por N4.
N5. Razón instantánea	Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Para dar respuesta a la pregunta problematizadora, se emplearon distintas fases donde, basados en la teoría de niveles de razonamiento covariacional de Carlson, se quiere identificar dichos niveles en el taller planteado por el docente y proceder a realizar el rediseño necesario del mismo para alcanzar todos los niveles de razonamiento. Cabe aclarar, que los pilotajes y el rediseño del material se realizaron conjuntamente, es decir, entre el sujeto 1 y el sujeto 2.

El taller utilizado para realizar este experimento fue tomado de un trabajo de tesis de maestría [6].

“Don Pedro, el papá de la familia Gutiérrez, necesita conseguir \$10.000.000 para iniciar un negocio. Él los piensa pagar en dos años. Entre las posibilidades para obtenerlos ha contemplado ir donde el prestamista del barrio, quien no pide ni un solo papel y presta el dinero de inmediato a una tasa de interés simple de 6% mensual. Por sugerencia de su hijo, Don Pedro también consultó en un banco y allí le ofrecieron un crédito a dos años con un interés simple del 26% anual. El señor Gutiérrez deberá tener en cuenta que, mensualmente, debe asumir varias obligaciones, por ejemplo, el pago de servicios públicos (\$150.000), el pago de un crédito de consumo (\$90.000), el gasto en mercado (\$250.000), el pago de transporte (\$100.000), un ahorro (\$60.000), y que sus ingresos mensuales son de \$1.500.000. Para respaldar su deuda, Don Pedro tiene una casa avaluada en \$70.000.000 y un carro por valor de \$15.000.000. Además, cuenta con un excelente historial crediticio, pues nunca ha estado reportado ante una central de riesgo.

a) ¿Cuánto tendría que pagar en cada caso? Justifica tu respuesta.
b) ¿A qué lugar debería acudir Don Pedro por un préstamo? Justifica tu respuesta.
c) ¿Qué debemos analizar antes de endeudarnos? ¿Por qué? ¿Podrías calcular la capacidad de endeudamiento que tienes que puede tener un familiar?

Después de haber realizado el rediseñado, se procede a aplicar el taller con 32 estudiantes que están cursando undécimo grado en la Institución Educativa Las Américas de Bucaramanga, se les explicó el concepto básico de interés simple para que, con esta definición, lograran dar una solución más detallada al taller. Posteriormente, se pidió a los estudiantes que respondieran todas las preguntas.

El problema incitaba a los alumnos a realizar una identificación de las variables tiempo y monto total, y a su vez que estas tenían una relación con el interés simple respecto al tiempo, para así poder conocer el monto final a pagar, además de esto, cada alumno debía identificar la razón de cambio que se generaba en el monto final cuando el tiempo aumentaba o disminuía, para así lograr llegar a la modelación de una función lineal que representara el problema. La actividad inició con una breve explicación sobre los conceptos de interés simple, donde se generaron algunas dudas que fueron resueltas antes de iniciar el taller, después de esta introducción se entregó el taller dándoles una (1) hora para resolverlo. Cada estudiante lo resolvió individualmente y cuando tuvieron preguntas alzaron la mano y se les despejó la duda. Después de que todos los estudiantes entregaron los talleres, se procedió a resolverlo, explicándoles detenidamente cada uno de los ítems, el taller fue resuelto de tal manera que se lograra identificar los niveles de covariación que propone Carlson.

Se analizó cada resultado de los estudiantes, logrando identificar en cada uno las acciones mentales y comportamientos que tuvieron en sus respuestas, para así describir en qué nivel de razonamiento covariacional se encontraban.

La categorización que se utilizó para analizar a los estudiantes es presentada en la siguiente tabla, la cual fue diseñada a partir de las tablas 1 y 2.

TABLA III - Descripción de todos los niveles

N1. Nivel de coordinación	**AM1**
Acción mental de coordinar el monto total, con el cambio del interés simple con respecto al tiempo.	Se observa los ejes y somos conscientes y se reconoce que a medida que el tiempo cambia, también cambia el monto total.
N2. Nivel de dirección	**AM2**
Acción mental de coordinar el cambio del monto total mientras se consideran cambios en el tiempo.	Se observa que a medida que el tiempo aumenta en una tasa de interés fija, el monto total también aumenta.
N3. Nivel de coordinación cuantitativa	**AM3**
Acción mental de coordinar la cantidad de cambio del monto total con la cantidad de cambio del tiempo mientras se imaginan cambios en el tiempo.	Se observa incrementos y disminuciones en el cambio del monto inicial cuando se consideran incrementos o disminuciones en el tiempo.
N4. Nivel de razón promedio	**AM4**
Acción mental de coordinar la razón de cambio promedio de monto total con respecto al tiempo para valores iguales de tiempo.	Se observa la razón de cambio del monto total con respecto a la tasa de interés mientras se consideran valores iguales de tiempo. Se empieza a construir la representación gráfica de la función.
N5. Nivel de razón instantáneo	**AM5**
Acción mental de coordinar la razón de cambio (tasa de interés) instantánea del monto total con los cambios en el tiempo.	Se observa la construcción de una gráfica lineal, en donde se evidencia la naturaleza cambiante de la razón, mientras se imagina el cambio continuo del tiempo.

III. CONCLUSIONES

Se identificó en qué nivel se encontraba cada estudiante, se tabularon los datos para calcular los porcentajes obtenidos en cada categoría, obteniendo que el 10% de los estudiantes no respondieron, por lo tanto, no se podían analizar, el 9% de los alumnos obtuvo un nivel 1 (N.1), en el cual solo lograron identificar la acción mental de coordinar el monto total, con el cambio del interés simple con respecto al tiempo, pero no lograban observar que a medida que el tiempo aumenta en una tasa de interés fija, el monto total también aumenta; también hubo un 9% de alumnos en el nivel 2 (N.2), en donde lograron la acción mental de coordinar el cambio del monto total mientras se consideraban cambios en el tiempo, pero no lograron observar incrementos y disminuciones en el cambio del monto inicial cuando se consideran incrementos o disminuciones en el tiempo, por último, en el nivel 3 (N.3) tenemos un 72% del total de los estudiantes, los cuales lograron observar la acción mental de coordinar la cantidad de cambio del monto total con la cantidad de cambio del tiempo, mientras se imaginaban cambios en el tiempo, pero no lograron alcanzar los otros niveles porque no consiguieron identificar y observar la razón de cambio del monto total con respecto a la tasa de interés, mientras se consideran valores iguales de tiempo, así que no lograron el nivel 4 (N.4), por lo tanto, de los 32 alumnos que presentaron la prueba ninguno logró un nivel 4 (N.4) o nivel 5 (N.5).

Finalmente, se obtiene como conclusión que los estudiantes que participaron en esta investigación presentaron resultados muy parejos en las respuestas, ya que un 72% obtuvo un nivel 3 de razonamiento covariacional, en este sentido, el nivel de covariación para el grado undécimo de la Institución Educativa las Américas está en un nivel 3 (N.3), estos resultados nos dan a entender que los estudiantes tuvieron la mayor dificultad al interpretar la razón de cambio del monto total con respecto a la tasa de interés, mientras se consideran valores iguales de tiempo, lo cual no permitió que lograran alcanzaran un mayor nivel.

Los resultados revelan notables deficiencias en el razonamiento y la identificación de variables para encontrar la tasa de cambio. Al enfrentarse a un problema real que requería el uso de matemáticas financieras para encontrar una solución, los estudiantes encontraron dificultades. Esto evidencia su falta de conocimiento y habilidad para relacionar temas financieros con la resolución de problemas del mundo real, mediante funciones.

REFERENCIAS

[1] M. Carlson, S. Jacobs, E. Coe, S. Larsen & E. Hsu, "Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos", *Revista EMA,* 8(2), pp. 121-156, 2003.

[2] A. Latorre Beltrán, D. Rincón Igea y J. Arnal Agustín, *Bases metodológicas de la investigación educativa*, Barcelona: Ediciones Experiencia, 2005.

[3] M. A. Martínez-Miraval & M. L. García-Rodríguez, "Razonamiento covariacional de estudiantes universitarios en un acercamiento al concepto de integral definida mediante sumas de Riemann", *Formación Universitaria*, 15(4), pp. 105-118, 2022. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062022000400105

[4] S. Vinner, "The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning", *Educational Studies in Mathematics*, 34, pp. 97-129, 1997.

[5] P. W. Thompson, (1994). "Students, functions, and the undergraduate curriculum", en *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1: *Issues in Mathematics Education*, E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. J. Kaput (Eds.), Providence: American Mathematical Society pp. 21- 44, 1994.

[6] J. Alfonso, *Actividad Matemática posibilitada mediante el estudio de fenómenos financieros en una población vulnerable*, tesis de maestría, Escuela de Matematicas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, (en desarrollo).

Biografías

Autor 1: Laura Gutiérrez Villamizar

Estudiante de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

Autor 2: Carlos Iván Díaz Rincón

Estudiante de pregrado de Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad Industrial de Santander.

Autor 3: Jaiver David Rey Gómez

Técnico en Contabilidad y Finanzas; Licenciado en Matemáticas por la Universidad Industrial de Santander (Colombia). Matemático en formación y candidato a Magíster en Educación Matemática por la misma universidad.

Áreas de investigación: Economía y Finanzas en la Educación Matemática, formación de profesores e historia y epistemología de las matemáticas.

Autor 4: Sandra Evely Parada Rico

Doctora en Ciencias, en la Especialidad de Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional CINVESTAV (México). Profesora titular de la Universidad Industrial de Santander (Colombia).

Áreas de investigación: Didáctica del Cálculo, Economía y Finanzas en la Educación Matemática, atención a la diversidad y formación de profesores.

Errores y dificultades presentadas en el aprendizaje del concepto de permutación y combinación en un aula de contexto urbano

Errors and difficulties presented in learning the concept of permutation and combination in an urban context classroom

Rojas-Montoya, Juan Pablo [1]***, Aldana-Bermúdez, Eliécer*** [2]
y Montiel-Buriticá, Linda Poleth [3]

Resumen

Este estudio tiene como objetivo presentar los errores y las dificultades encontradas en la literatura, y validados en la práctica del aula de clase en la Institución Educativa Instituto Tebaida, sobre el aprendizaje del concepto de permutación y combinación en grado noveno, para así, posteriormente, brindar estrategias que permitan mitigar y desarrollar pensamiento formal y razonamiento combinatorio. Para ello, se utiliza una metodología cualitativa y un análisis estadístico, por medio del diagrama de Pareto, para identificar dichas dificultades y errores con mayor claridad. De lo anterior, se tienen como resultado algunas funciones semióticas y conflictos semióticos generados, lo cual conlleva a la necesidad de diseñar actividades con más profundidad en relación a la génesis del objeto matemático.

Palabras clave: combinación, permutación, funciones semióticas, errores, dificultades.

1 Universidad del Quindío; 0000-0002-0755-0684. Contacto: jprojasm@uqvirtual.edu.co.
2 Universidad del Quindío; 0000-0003-1691-2699. Contacto: eliecerab@uniquindio.edu.co.
3 Universidad del Quindío; 0000-0002-1654-7284. Contacto: lpmontiel@uniquindio.edu.co.
Grupo de Investigación en Educación Matemática (GEMAUQ)

Abstract

This study aims to show the errors, difficulties found in the literature and validated in classroom practice at the Instituto Tebaida Educational Institution regarding the learning of the concept of permutation and combination in ninth grade, in order to subsequently provide strategies to mitigate and develop formal thinking and combinatorial reasoning. For this purpose, a qualitative methodology is used, and a statistical analysis by means of the Pareto diagram, to identify such difficulties and errors more clearly. As a result of the above, some semiotic functions and semiotic conflicts generated from the previous study are obtained, which leads to design activities with more depth in relation to the genesis of the mathematical object.

Keywords: combination, permutation, semiotic functions, errors, difficulties.

I. INTRODUCCIÓN

Según investigaciones realizadas tanto por antropólogos como por historiadores, la combinatoria ha sido un interés del ser humano desde hace mucho tiempo, y nace frente a la necesidad de saber la forma de seleccionar o elegir parejas de un determinado conjunto de elementos. Todas las posibilidades son calculadas a través de la enumeración. Diferentes culturas y distintas dudas permitieron la exploración de esto, prueba de ello se tiene en los griegos que iniciaron el estudio de la permutación como acto de reordenar los elementos de un conjunto, años más tarde astrónomos europeos usaron la regla de Pingala, enunciando la forma de hacer una combinación, es decir, de seleccionar, organizar y contar elementos de un conjunto.

También es importante resaltar que durante el siglo XXII en el mundo árabe el tema de la combinatoria era tratado desde dos puntos de vista, según Edwars [3], el primero es el de la Lingüística, donde miraban el análisis combinatorio como un medio para resolver un problema práctico; el segundo era el de los algebristas, quienes por medio de sus estudios sobre ecuaciones y el problema de extracción de raíces, encontraban en el análisis combinatorio una herramienta técnica para resolver sus problemas teóricos.

Por otro lado, la investigación cualitativa de Cano y Zapata [2] realiza un rastreo de las dificultades que presentan los estudiantes de los conceptos estadísticos concernientes a los temas propuestos en las pruebas SABER, como son los conceptos de permutación y combinación. Estos autores muestran que después de analizar los resultados proporcionados por los 74 estudiantes que hicieron parte de su estudio, la mitad de ellos presentan dificultades, inadecuada lectura de los enunciados y mala interpretación de los mismos, además de tener vacíos conceptuales, lo que hace evidente que en ocasiones el currículo y los estándares en las instituciones no están ajustados de acuerdo con lo que miden las pruebas SABER.

Así mismo, la investigación de [5] muestra que uno de los problemas más comunes que presentaron los estudiantes es que se confunden con el orden y la repetición, no saben cuándo respetar el orden en los problemas, además hacen un uso indebido de elementos como tablas o listados. Del mismo modo, Aldana, Gutiérrez y Grisales [1] indican que los estudiantes de noveno grado suelen tener problemas al leer y entender los enunciados de los problemas matemáticos, lo que resulta en la necesidad constante de proporcionarles instrucciones previas antes de abordar su resolución.

Por estas razones, la investigación es interesante porque se centra en cómo, a partir de la identificación de errores y dificultades, se logra un fortalecimiento en la enseñanza y en el aprendizaje de la combinatoria y la permutación, y trata también de hacer énfasis en el razonamiento probabilístico, para así dotar al docente en ejercicio de herramientas conceptuales, para un mejor desarrollo de sus clases.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

Esta propuesta está enmarcada en un diseño metodológico de corte cualitativo, el cual pretende mostrar una aproximación de la investigación a la realidad, de manera que se puedan ver los estudios de las situaciones partiendo del contexto en donde se desarrollan. Por otra parte, el paradigma que se usó en la investigación es de tipo histórico-hermenéutico, puesto que este modelo busca que el estudiante observe y articule la dimensión epistemológica, contextual y cultural del objeto matemático; es de tener en cuenta que este paradigma es interdisciplinario, es decir, que consta de varios métodos y, al estar de la mano con la hermenéutica, su propósito es descubrir los significados de las cosas e interpretar las técnicas y filosofía de los diseños cualitativos.

Es así como, teniendo en cuenta los factores anteriormente mencionados, se enuncian las fases que se desarrollaron en la investigación:

1) Diseño de la prueba diagnóstica.
2) Implementación en el aula de clases de la prueba diagnóstica.

3) Análisis estadístico, por medio del diagrama de Pareto, [Sales, 2013] [6] de los errores y dificultades encontradas en la prueba diagnóstica.
4) Identificación de las funciones semióticas y los conflictos semióticos para el diseño de tareas.
5) Elaboración de tareas matemáticas.

Algunos de los resultados obtenidos se exponen a continuación de forma sintetizada:

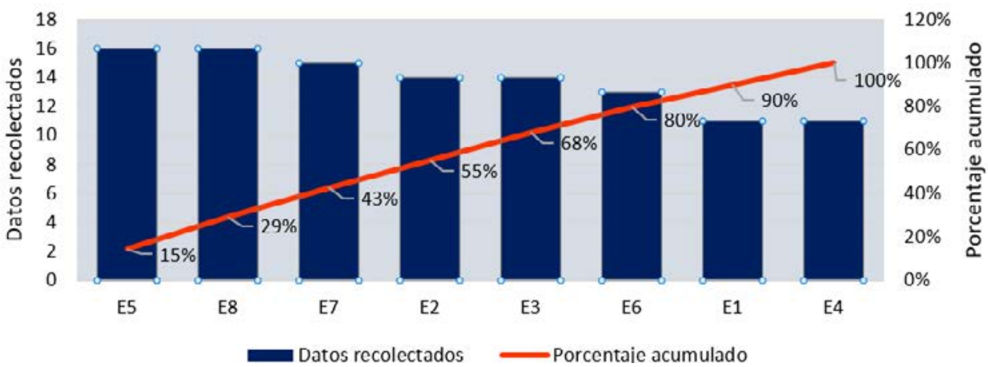


Fig. 1. Diagrama de Pareto de los Errores cometidos por los estudiantes con respecto al objeto matemático

Nota: adaptación del trabajo de investigación [4]

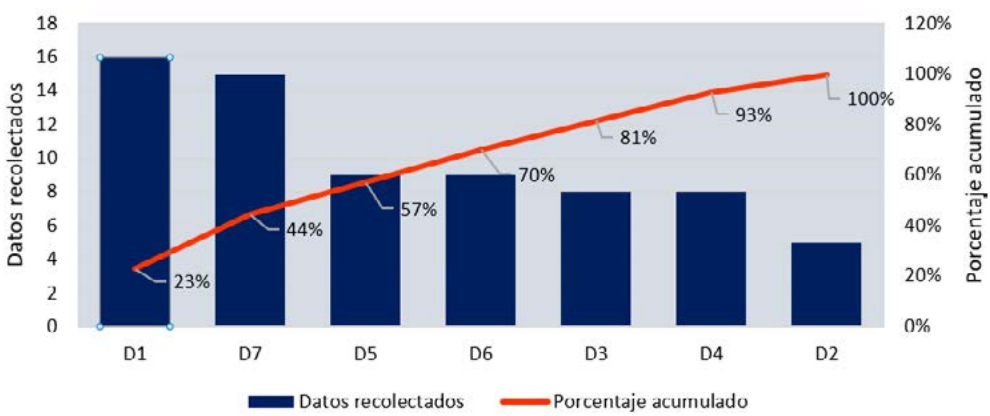


Fig. 2. Diagrama de Pareto de las dificultades encontradas en los estudiantes con respecto al objeto matemático

Nota: adaptación del trabajo de investigación [4]

A partir de las representaciones gráficas del diagrama de Pareto, se encontró que:

1. Los errores de mayor porcentaje mostrados en el diagrama fueron los E5 y E8, ya que abarcan la totalidad del conjunto de datos, lo que podría indicar que son extremadamente influyentes o dominantes en el problema que se está analizando, en cuanto a la descripción de dichos errores, el primer error (E5) se enfoca en que los estudiantes no consideran, al resolver la situación, lo referente al orden de los objetos, el cual es esencial en los criterios de permutación y combinación, puesto que, como lo manifiesta [Villanueva, 2015:32] [5] los problemas de conteo "requieren de un análisis cuidadoso de su estructura", debido a que le brinda al estudiante elementos básicos en las propiedades del esquema aditivo y multiplicativo, para posteriormente dar soluciones concretas y claras a problemas que contengan enunciados del objeto matemático en estudio. El segundo error (E8), que se enruta en los arreglos formados con respecto a las repeticiones que se pueden generar en el caso de la permutación, también ha sido un punto de quiebre con gran auge al evolucionar el tiempo en el campo del pensamiento formal, pues el estudiante, en muchas ocasiones, al enfrentarse a problemas de permutación repite elementos cuando no tiene que hacerlo y ello hace que se tengan soluciones inadecuadas o poco válidas.

2. Al observar el diagrama de Pareto de las dificultades, se encontró que la D1 y D7 presentaban un mayor porcentaje, la primera corresponde a dificultad en el razonamiento del objeto matemático, que se refiere a la habilidad de comprender y aplicar los conceptos abstractos y simbólicos con respecto a la permutación y combinación, esto se debe en gran medida a que, desde el lente didáctico, pedagógico y de enseñanza, se han dejado a un lado, no dándoles la importancia que requieren. La segunda habla sobre la dificultad de generalizar la solución en los ejercicios, es decir, que siempre está el desafío en encontrar una estrategia exitosa que permita resolver un problema y, de esta misma manera, resolver otros problemas similares o análogos.

III. CONCLUSIONES

Una de las conclusiones obtenidas en el desarrollo de la investigación, es que se hace relevante la identificación de los errores y las dificultades presentadas en actividades evaluativas realizadas a los estudiantes, puesto que hacerlo nos da apertura a la tipificación de idoneidades, funciones semióticas y conflictos semióticos para estrategias pedagógicas, conceptuales y cognitivas en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de permutación y combinación.

REFERENCIAS

[1] B. Aldana, C. Gutiérrez y D. Grisales, Una configuración epistémica a una situación problema, desde el enfoque Ontosemiótico en la didáctica de la matemática, en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Pérez-Vera, Iván Esteban; García, Daysi (Eds.), México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2019, pp. 234-243.

[2] M. I. Cano & D. C. Zapata, *Análisis del pensamiento aleatorio desde las representaciones semióticas presentes en las pruebas saber grado quinto: caso Institución Educativa Escuela Normal Superior Amagá*, tesis de maestría Educación Matemática, Universidad de Medellín, Medellín, 2016.

[3] A. W. Edwars, *Pascal´s Arithmetical Triangle*. London: Charles Griffin, 1987.

[4] L. P. Montiel Buriticá "Análisis de la competencia matemática modelación de estudiantes con limitación auditiva, articulada con los conceptos de función exponencial natural y logaritmo natural, por medio de los registros de representación semiótica". *XI Simposio de Matemática y Educación Matemática*, Universidad del Quindío, 2020.

[5] E. Villanueva, P, *Análisis de las dificultades que presentan los estudiantes del grado quinto al resolver problemas de combinatoria simple en la Escuela Normal Superior de Ibagué y en el Colegio de la Presentación de Ibagué*, tesis de maestría en Educación, Universidad del Tolima, Ibagué, 2015.

[6] M. Sales, Diagrama de Pareto, EALDE Business School, 2013.

Biografías

Autor 1: Juan Pablo Rojas Montoya

Candidato a Magíster en Ciencias de la Educación, de la Universidad del Quindío; Ingeniero Electrónico, de la Universidad del Quindío.

Áreas de investigación: Educación Matemática.

Autor 2: Eliécer Aldana Bermúdez

Doctor en Educación Matemática, de la Universidad de Salamanca (España), Magíster en Administración de la Educación, énfasis en dirección, de la Universidad del Valle; Licenciado en Educación en la especialidad de Matemáticas, de la Universidad del Quindío. Director del grupo de investigación GEMAUQ. Coordinador de la línea de Matemáticas en la Maestría y Doctorado en Ciencias de la Educación, de la Universidad del Quindío

Áreas de investigación: Educación Matemática.

Autor 3: Linda Poleth Montiel Buriticá

Candidata a Doctora en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, de la Universidad Autónoma de Guerrero (México); Magíster en Ciencias de la Educación con énfasis en Educación Matemática, de la Universidad del Quindío; Licenciada en Matemáticas, de la Universidad del Quindío. Docente catedrática de la línea de Educación en Matemáticas en la Maestría en Ciencias de la Educación, de la Universidad del Quindío.

Áreas de investigación: Educación Matemática y Matemática Aplicada.

Razonamiento geométrico y aprendizaje de la trigonometría: un avance en las representaciones semióticas desde la métrica y el ángulo[1]

Geometric reasoning and learning trigonometry: an advance in semiotic representations from metrics and angles.

Orozco-Belalcázar, Johan[2], Aldana- Eliécer[3] y Erazo, Jhon[4]

Resumen

El propósito de este documento es divulgar algunos avances de investigación, en el marco de un proyecto de investigación a nivel de posgrado en curso, el cual se ha focalizado en la articulación del razonamiento geométrico para el aprendizaje de la trigonometría, articulando los saberes matemáticos en secuencias de aprendizaje integradas por las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele a los procesos cognitivos de la geometría, mediados por los Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval. De este modo, se logra identificar las barreras presentes en los estudiantes, al querer generar un anclaje visual-discursivo, implementando el estudio del ángulo como objeto matemático y unidad figural elemental para el aprendizaje de la trigonometría. Una vez identificadas estas barreras, se presenta el diseño de secuencias que articulan los procesos cognitivos de visualización, construcción y razonamiento, teniendo en cuenta las características propias del grupo de intervención, para así lograr un anclaje tanto visual-discursivo

1 Trabajo presentado para optar al título de Magíster en Ciencias de la Educación de la Universidad del Quindío.

2 Universidad del Quindío; 0000-0001-5184-9408. Contacto: jmorozcob@uqvirtual.edu.co.
3 Universidad del Quindío 0000-0003-1691-2699. Contacto: eliecerab@uniquindio.edu.co.
4 Universidad del Quindío; 0000-0002-0036-4264. Contacto: jderazo@uniquindio.edu.co.

como un anclaje discursivo-visual, brindando instrumentos óptimos que propicien el trazado de las figuras y que garanticen los cambios figurales que logran, desde las aprehensiones perspectivas y discursivas, transformaciones a nivel de tratamiento y conversión, que conllevan los registros de las razones trigonométricas a representaciones gráficas de la función seno y coseno.

Palabras clave: razonamiento geométrico, trigonometría, registros de representación, articulación.

Abstract

The purpose of this document is to transmit some research advances within the framework of the ongoing postgraduate research project, which has focused on the articulation of geometric reasoning for learning trigonometry. Articulating mathematical knowledge in learning sequences united by the learning phases of Van Hiele's model. To the cognitive processes of geometry settled by Raymond Duval's Semiotic Representation Records.

In this way, it is possible to identify the barriers demonstrated by the students, wanting to generate a visual-discursive anchor by implementing the study of the angle as a mathematical object and elementary figural unit for the learning of trigonometry. Once these barriers are identified, it is presented the design of sequences that articulate the cognitive processes of visualization, construction and reasoning. Taking into account the characteristics of the intervention group in order to achieve both visual-discursive anchoring and discursive-visual anchoring. Providing optimal instruments that promote the drawing of the figures and that guarantee the figural changes that achieve from the apprehensions, perspectives and discursive transformations at the level of treatment and conversion and that carry the records of the trigonometric ratios to graphic representations of the sine and cosine functions.

Keywords: geometric reasoning, trigonometry, semiotic representation, articulation.

I. INTRODUCCIÓN

La idea de explorar razonamientos geométricos en el estudio y aprendizaje de la trigonometría, se deriva del proceso académico que se desarrolla con estudiantes de grado décimo y reflexiona en torno a las experiencias de aula, a los entornos de aprendizaje, la revisión de la literatura y los hallazgos sobre los errores y dificultades en su aprendizaje [1], y más allá de ello, en la necesidad de articular conceptos y procesos matemáticos propios de la trigonometría.

Articular saberes matemáticos es un proceso de creación, que parte de elementos conceptuales conocidos para generar objetos matemáticos de mayor complejidad [2]. Es así que parte de la comunidad de educadores ha buscado, desde el inicio de la matemática moderna, contribuir más eficazmente al desarrollo de estrategias, teorías, metodologías y didácticas de aula [3] que cumplan este proceso de creación. Por tanto, la desvinculación del razonamiento geométrico dotado de un conjunto de elementos con conocimientos básicos del aprendizaje de la trigonometría, no ha de permitir una articulación con un estudio de corte analítico en matemáticas avanzadas [4].

Se deduce, en cierta medida y apoyados en investigaciones previas [5] [6], la necesidad inherente al estudiante de profundizar en el uso del lenguaje, nociones y conceptos matemáticos abstractos, que abarquen diferentes componentes tanto empíricos, basados en su percepción, como teóricos que desarrollen su disciplina científica, permitiéndole relacionar los aspectos abstractos, conceptuales, deductivos y formales, que no son accesibles físicamente, a través de evidencias sensoriales directas o mediante el uso de instrumentos [7], por ello, se hace necesario que el estudiante logre, a través de diferentes sistemas de representación [7], comprender los objetos trigonométricos.

En esta medida, y basados en el ángulo como unidad figural elemental y su métrica, el presente artículo muestra los procesos cognitivos geométricos y los registros de representación semiótica de Raymond Duval mediante la siguiente cuestión de interés: ¿Cómo la métrica y el ángulo articulan el razonamiento geométrico y el aprendizaje de la trigonometría para alcanzar los estándares básicos de matemática en grado décimo?

En consecuencia, surge el siguiente objetivo de investigación:

Articular los procesos cognitivos geométricos desde las aprehensiones discursivas y visuales, para lograr el aprendizaje de la trigonometría mediado por los registros de representación semiótica.

DESARROLLO DEL DOCUMENTO

A. Metodología

La investigación presenta una metodología de tipo cualitativa interpretativa [9], que permite interactuar con la población de estudio y fortalece la perspectiva sistémica de Godino junto a los subsistemas principales [3] en el proceso de articulación matemática, siendo estos el saber matemático, el trabajo del alumno y el trabajo del profesor, este último es el encargado de analizar, comprender e interpretar la realidad educativa.

Se emplea como estrategia metodológica la aplicación del Modelo de Van Hiele [10], apropiando las fases de aprendizaje al diseño de secuencias de aprendizaje de la siguiente manera:

Fase 1. De información:
- Prueba Diagnostica. Explorando los aprendizajes.

Fase 2. Orientación dirigida.

Fase 3. Explicitación:
- Secuencia 1. La métrica de nuestros ángulos.
- Secuencia 2. Trabajando con Pitágoras.
- Secuencia 3. De la razón a la función.

Fase 4. Orientación libre.

Fase 5. Integración:
- Prueba final. Aplicando los aprendizajes

En el diseño metodológico de las secuencias de aprendizaje se integraron los procesos cognitivos de visualización, construcción y razonamiento; presentadas para lograr un anclaje desde lo discursivo-visual y viceversa; y la aplicación tuvo en cuenta el intercambio de experiencias propuestas por Van Hiele, con actividades individuales y grupales.

Las herramientas utilizadas para la recolección de la información fueron:

- Comunicación entre el docente y el estudiante.
- Comunicación entre los estudiantes (socializaciones).
- Producciones escritas y digitales.
- Fotografías bajo consentimiento informado a padres.

B. Aplicación de las actividades

Se presenta la articulación entre la aplicación de dos actividades:

Actividad #2, secuencia 2, fase 2. Construcción con material manipulable.

Desde el proceso de razonamiento, se orientaron un conjunto de instrucciones que permitieron construir el triángulo equilátero bajo operaciones de tratamiento figural de la hoja de papel, utilizando la técnica de origami como ambiente integrador. Luego de la descomposición de la figura en forma de rectángulo, y luego de un cambio configural, se logró la construcción de la figura presente, como se muestra en la Figura 1.

Fig. 1. Triangulo equilátero
Fuente: estudiante E10.

Una vez el estudiante logró concluir las operaciones de tratamiento figural, en la construcción del triángulo, se establecieron las medidas de las unidades figurales elementales estableciendo el valor de los ángulos en y la longitud de cada lado en 8 cm.

El estudiante E10 alcanzó a superar el nivel local de razonamiento, al reconocer las unidades figurales que constituyen el triángulo y establecer el registro numérico de los ángulos, y la medida de sus lados, bajo las operaciones de tratamiento presentadas de manera discursiva en la actividad; también logró alcanzar el nivel global de razonamiento, al realizar la transformación de reconfiguración y establecer, mediante una unidad figural adicional, la bisección del ángulo y construcción de un triángulo rectángulo, como se observa en la Figura 2.

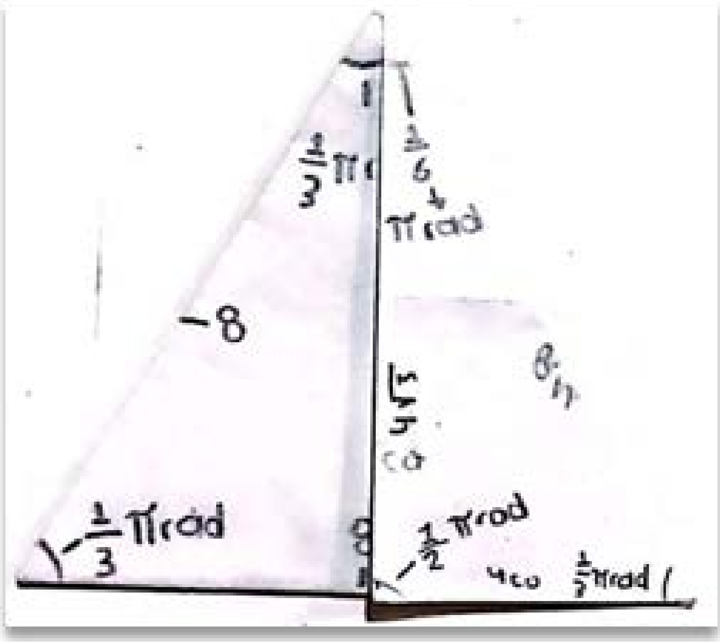


Fig. 2. Reconfiguración del triángulo
Fuente: estudiante E10.

El desarrollo de la actividad #2 permitió identificar que el estudiante E10 logró una conversión desde un anclaje discursivo a un anclaje visual, consiguiendo así construir la figura geométrica, bajo un tratamiento, también la de establecer la configuración de la misma y finaliza con la reconfiguración al construir con material manipulable un triángulo rectángulo; se expone que en actividades posteriores estableció las razones trigonométricas para los ángulos notables, a partir de sus propias construcciones.

Actividad #2 de la secuencia 3, fase 3.

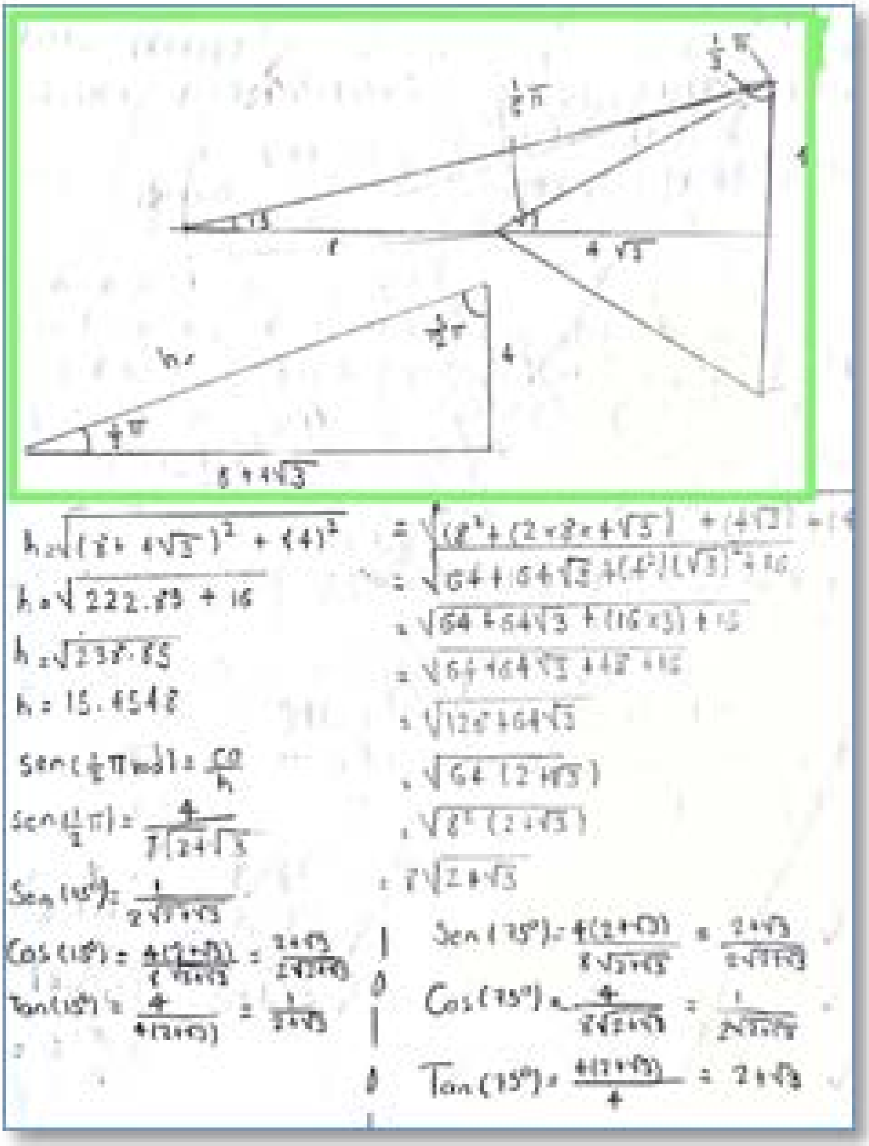
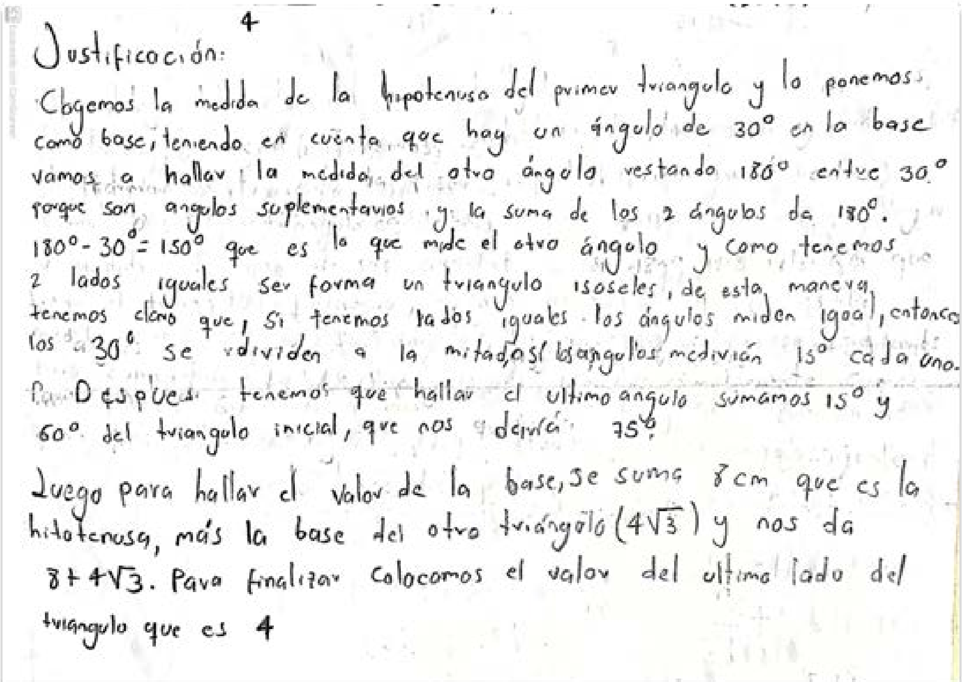


Fig. 3. Razones trigonométricas de ángulos de 15° y 75°
Fuente: estudiante E10.

Como se observa en el recuadro verde, el estudiante desde el proceso de visualización logró, mediante modificaciones mereológicas de la figura (ver Figura 1), construir un triángulo con ángulos internos de 15° y 75° para, posteriormente, formalizar las razones trigonométricas.

En la Figura 4, el estudiante logra una conversión desde un anclaje visual-discursivo a nivel global, al presentar la descripción del proceso realizado.



4

Justificación:

Cogemos la medida de la hipotenusa del primer triangulo y lo ponemos como base, teniendo en cuenta que hay un ángulo de 30° en la base vamos a hallar la medida del otro ángulo restando 180° entre 30° porque son angulos suplementarios y la suma de los 2 ángulos da 180°. 180° - 30° = 150° que es lo que mide el otro ángulo y como tenemos 2 lados iguales se forma un triangulo isoseles, de esta manera, tenemos claro que, si tenemos 2 lados iguales los ángulos miden igual, entonces los 30° se dividen a la mitad así los angulos medirián 15° cada uno. Despues tenemos que hallar el ultimo angulo sumamos 15° y 60° del triangulo inicial, que nos deriva 75°.

Luego para hallar el valor de la base, se suma 8 cm que es la hipotenusa, más la base del otro triangulo $(4\sqrt{3})$ y nos da $8+4\sqrt{3}$. Para finalizar colocamos el valor del ultimo lado del triangulo que es 4

Figura 4. Razonamiento actividad #2
Fuente: estudiante E10.

II. CONCLUSIONES

La construcción de secuencias de aprendizaje, bajo el diseño articulado de los saberes matemáticos, logró que los procesos cognitivos, y puestos en la práctica por el grupo de intervención, permitieran alcanzar el aprendizaje de los conceptos de razones trigonométricas.

Las aprehensiones discursivas–visuales y las visuales–discursivas, presentes en el diseño de las secuencias, integran de manera coordinada los registros semióticos en el estudio de la trigonometría, permitiendo evidenciar el aprendizaje logrado por los estudiantes en el desarrollo de las actividades entregadas al docente investigador.

REFERENCIAS

[1] *J. Zubieta, Tipificación de errores y dificultades en el desarrollo de las funciones trigonométricas de estudiantes de grado decimo*, tesis de pregrado, Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., 2018.

[2] I. Pérez Pérez y S. S. Moreno Gutiérrez, "La articulación de Saberes Matemáticos en el tema de los sistemas de ecuaciones lineales", *Unión- Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 7(26), 2011.

[3] M. Schmidt *et al.*, *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*, Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, 2006.

[4] H. Aponte, *Coordinación de registros semióticos en la presentación de la periodicidad, el acotamiento y la conversión de unidades de las funciones trigonométricas seno y coseno*, tesis de pregrado, Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Santiago de Cali, 2016.

[5] G. Montiel, *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*, tesis doctoral, 2013.

[6] E. Martin Fernández, J. F. Ruiz Hidalgo, L. Rico, "Significado escolar de las razones trigonométricas elementales". *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 34(3), pp. 51-71, 2016, https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/314145

[7] R. Duval, "Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación", *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), pp. 143-168, 2006.

[8] R. Duval, "Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning", *Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International*

Group for the Psychology of Mathematics Education, 25(1), pp. 3-26, 1999. https://doi.org/10.1076/noph.25.1.3.7140.

[9] R. Bisquerra Alzina, *Metodología de la investigación educativa*. Editorial La Muralla, 2004.

[10] G. Vargas y R. Gamboa Araya, "El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría", *Uniciencia*, 27(1), pp. 74-94, 2013.

Biografías

Autor 1: Johan Manuel Orozco Belalcazar

Candidato a Magister en Ciencias de la Educación de la Universidad del Quindío; Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Quindío y docente de área en el Colegio San Pedro Claver, del Municipio de Tuluá, Valle del Cauca.

Áreas de investigación: Educación Matemática.

Autor 2: Dr. Eliécer Aldana Bermúdez

Doctor en Educación Matemática (León) de la Universidad de Salamanca: Salamanca, Castilla y León de España; Especialista en Docencia Universitaria (Cundinamarca) de la Universidad Santo Tomás: Bogotá, Colombia; Magíster en Administración de la Educación, énfasis en dirección (Valle del Cauca); Licenciado en Educación en la especialidad de Matemáticas de la Universidad del Quindío: Armenia, Quindío.

Áreas de investigación: Educación matemática GEMAUQ.

Autor 3: Mg. Jhon Darwin Erazo Hurtado

Licenciado en matemáticas (Universidad del Quindío); docente en educación media y superior en el área de matemáticas, Magíster en Ciencias de la Educación (Universidad del Quindío), Estudiante de Doctorado en Educación (UNINI-FUNIBER).

Investigador Junior avalado por Colciencias (Colombia) según Convocatoria 894 de 2021.

Áreas de investigación: Educación matemática GEMAUQ.

Propuesta curricular intercultural que incorpora elementos de la cosmovisión de la cultura ancestral Emberá Chamí para la enseñanza del pensamiento numérico[1]

Intercultural curricular proposal that incorporates elements of the worldview of the Emberá Chamí ancestral culture for the teaching of numerical thinking

Vargas-Vargas, Sergio[2], Jiménez-García, Francy Nelly[3]

Resumen

La educación matemática de los pueblos indígenas y los procesos para su inclusión en el aula forman parte de la discusión en pedagogía que aún está pendiente por darse en Colombia. La presencia de integrantes de la comunidad Emberá Chamí en las instituciones educativas suscita la necesidad de adaptar el currículo desde el respeto a la sabiduría ancestral. El objetivo de este estudio es construir una propuesta curricular intercultural, que incorpore elementos de la cosmovisión matemática ancestral Emberá Chamí para la enseñanza del pensamiento numérico en los grados tercero a quinto de básica primaria. Se aborda desde un enfoque cualitativo, alcance descriptivo y explicativo, diseño de investigación etnográfico con participación de la comunidad educativa de la Institución Educativa El Madroño. La revisión bibliográfica permitió retomar la cosmovisión

1 Grupo de investigación Aplicaciones y Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, UNAL

2 Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales; código ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6273-6513. Contacto: sevargasv@unal.edu.co.

3 Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Universidad Autónoma de Manizales, código ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1546-8426. Contacto: fnjimenezg@unal.edu.co.

matemática relacionada con el pensamiento numérico del pueblo Emberá. Se recolectó información que ayudará a definir los elementos trascendentes que deben ser incluidos dentro de una propuesta curricular intercultural. Posteriormente, se construyó una malla curricular para la enseñanza del pensamiento numérico en los grados objeto de estudio. Finalmente, se realizó la difusión de los hallazgos al interior de la Institución Educativa.

Palabras clave: etnomatemática, currículo intercultural, pensamiento numérico, número emberá, malla curricular.

Abstract

The mathematics education of indigenous peoples and the processes for their inclusion in the classroom are part of the discussion on pedagogy that is still pending in Colombia. The presence of members of the Emberá Chamí community in educational institutions raises the need to adapt the curriculum based on respect for ancestral wisdom. The objective of this study was to construct an intercultural curriculum proposal that incorporates elements of the Emberá Chamí ancestral mathematical cosmovision for the teaching of numerical thinking in the third to fifth grades of elementary school. It is approached from a qualitative approach, descriptive and explanatory scope, and ethnographic research design with the participation of the educational community of the Educational Institution El Madroño. The bibliographic review made it possible to retake the mathematical cosmovision related to the numerical thinking of the Emberá people. Information was collected to help define the transcendental elements that should be included in an intercultural curricular proposal. Subsequently, a curriculum for the teaching of numerical thinking in the grades under study was constructed. Finally, the findings were disemínate within the educational institution.

Keywords: ethnomathematics, intercultural curriculum, numerical thinking, emberá number, curriculum.

I. INTRODUCCIÓN

La colonización española vislumbró un panorama distorsionado que impidió a los invasores contemplar la existencia de una cultura local [1]. La visión culturalizadora se mantuvo y fue a partir del año 1991 que el estado colombiano se reconoció como un país pluriétnico y multicultural. Luego de más de 200 años de independencia, aún prevalece cierto dominio sobre las poblaciones indígenas, ya que los aprendizajes de las instituciones educativas son medidos sin distinción desde los referentes de calidad, a través de las pruebas externas bajo una estructura de pensamiento occidental, aspecto que desconoce el valor cultural de los grupos étnicos. Por esta razón, es necesario articular saberes que permitan a estas poblaciones trasegar por el sistema educativo [2], aprender los elementos necesarios para su coexistencia en ambientes interculturales y aunar esfuerzos por evitar su desaparición, resultado del desarraigo de sus tradiciones y territorios ancestrales.

Algunas investigaciones, como la de Peña Rincón [4], muestran cómo la etnomatemática permite comprender otras formas de ser, conocer y relacionarse con el mundo desde una perspectiva descolonizadora, y desde allí problematizar lo que entendemos por conocimiento matemático. Así mismo, existen otros trabajos que valoran de manera significativa el sentido del número desde la visión de la comunidad Emberá Chamí [3]. Fernández Sánchez [1] contempla que la educación matemática en el contexto colombiano está fundada en la visión occidental, por tanto, plantea la necesidad de iniciar una indagación sobre el concepto y sentido de los números.

Este trabajo pretende fortalecer la enseñanza del pensamiento numérico, a partir del entendimiento de la cosmovisión matemática de la población indígena perteneciente a la etnia Emberá Chamí, denominada "IUMA DRUA", asentada en la vereda El Madroño, del municipio de Belalcázar, Caldas. De igual forma, actualizar el PEI y responder así a las necesidades de la población indígena vinculada a la institución, en busca de favorecer la preservación de la sabiduría ancestral, de su cultura y sus formas de vida.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

Este trabajo desarrolla un enfoque cualitativo que, de acuerdo con [5], es flexible y se mueve entre los eventos y su interpretación, entre las respuestas y el desarrollo de la teoría. El diseño metodológico es etnográfico dado que pretende explorar, examinar y entender sistemas sociales y producir interpretaciones y significados culturales desde la perspectiva de los participantes. La población objeto de estudio la conformaron 30 estudiantes integrantes de la comunidad Emberá y 33 de población mayoritaria matriculados en la Institución Educativa El Madroño.

La ejecución de la propuesta se realizó en 6 etapas:

Etapa 1. Rastreo de información bibliográfica relacionada con el pensamiento numérico de la cultura embera.

Etapa 2. Recolección de información (Encuestas, entrevistas, conversatorios, diarios de campo, observación participante).

Etapa 3. Análisis cualitativo y cuantitativo de la información.

Etapa 4. Revisión del plan de estudios de la Institución Educativa El Madroño

Etapa 5. Elaboración de una malla curricular intercultural para la enseñanza de pensamientos numéricos en aulas con población Emberá Chamí.

Etapa 6. Plan de difusión de la malla curricular a los docentes de la Institución Educativa El Madroño, como apoyo a los procesos de enseñanza con población Emberá.

Al aplicar los instrumentos se evidenció que:

- El pueblo Emberá posee un sistema de numeración propio en base 5, que posteriormente pasa a base 20 ya que son 20 los dedos en el cuerpo. Inicia en el conteo de uno en uno de los dedos de las manos hasta completar la mano que se denomina "jua". Seguidamente, se realiza la combinación entre los dedos y las manos (y pies) hasta llegar al 20. No existe representación simbólica propia, ya que se recurre a los números occidentales para denotar el conjunto.
- El instrumento "encuesta etnográfica estudiantes" permitió contrastar los saberes que debe tener todo Emberá según el modelo pedagógico de su pueblo. Se evidencio un enorme desconocimiento de la cultura propia. Con relación a los números, no identifican su trascendencia cultural ni simbología, por ende no se aplicaban en ningún contexto.
- El instrumento "Encuesta a docentes (etnoeducador y población mayoritaria)" mostró la dificultad de los docentes para atender a la población Emberá dado el desconocimiento de la cultura, la inasistencia de los estudiantes, los procesos de migración rural, los métodos de evaluación que no discriminan población y la falta de acompañamiento. Pese a ello, destacan habilidades en procesos de pensamiento matemáticos.
- La "entrevista grupal estudiantes embera" permitió entrever aspectos relacionados con la cultura, el ambiente escolar, prácticas cotidianas dentro de la comunidad, formas de conteo, gusto por las matemáticas, entre otras.
- La "entrevista grupal estudiantes no Ember**á**" permitió, conocer los elementos que aprendían de la cultura Emberá. Finalmente, tener conocimiento de la disposición y la apertura a integrar elementos propios de los aborígenes para ambientar la enseñanza de contenidos matemáticos.
- La "entrevista al etnoeducador Jhonatan Arce" y la "entrevista realizada al gobernador del asentamiento" logró recuperar los aspectos relevantes de la enseñanza de procesos relacionados con el pensamiento numérico Emberá, y recopilar información para contrastar con las indagaciones bibliográficas, como elemento crucial para la construcción de una propuesta intercultural.

- La "entrevista a los sabedores" llevó a conocer su visión e interpretación del sentido del número, operaciones matemáticas básicas, sistema de numeración, situaciones cotidianas y condujeron a la interpretación de las características propias de la cultura matemática del asentamiento y de los procesos asociados al pensamiento numérico.
- La observación participante arrojó singularidades en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Así, se participó en dos sesiones de clase.
- Los conversatorios permitieron visibilizar un profundo desconocimiento del origen del número y la constitución del sistema de numeración propio debido a la fuerte influencia del conocimiento occidental. La mayor parte de la comunidad solamente reconoce los números embera hasta el 5, relacionando el fonema con la cantidad. Algunos indígenas lograban realizar el conteo de forma aditiva hasta el número 10 desconociendo la posibilidad continuar contando.
- El instrumento "matriz de análisis del plan de **área de matemáticas** I.E. El Madroño" comparó los contenidos relacionados con el pensamiento numérico, dejando en evidencia que no existe en la institución una perspectiva intercultural.

Como consecuencia de este estudio, se propone la malla curricular intercultural que pueden ser aplicados en el aula, que integren población indígena.

GRADO: TERCERO							
PRIMER PERIODO							
ESTANDAR	COMPETENCIA	D.B.A.	COMPETENCIA EMBERA	CONTENIDOS ASOCIADOS AL PENSAMIENTO NUMERICO	METODOLOGIA	EJE CURRICULAR INTEGRADOR EMBERA	TRANSVERSALIZACION CON PROYECTOS DE LEY
Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros).	Razonamiento	1. Interpreta, formula y resuelve problemas de composición, transformación y comparación en diferentes contextos	Recuperar y aplicar prácticas y técnicas propias de producción (manejo de semillas, cultivos, cosechas y terrenos), que desarrollen los planteamientos de la soberanía alimentaria en concordancia con el pensamiento indígena y las políticas propias.	Representación de conjuntos Relaciones de pertenencia o no pertenencia Unión e intersección entre conjuntos Conjunto de los números naturales	**A. ACTIVIDADES BÁSICAS:** Juego: "agua de limón" para formar grupos teniendo en cuenta diferentes características. **B. CUENTO PEDAGÓGICO:** Lectura del relato tradicional embera. **C.ACTIVIDAD PRACTICA:** Actividad práctica de conjuntos: Agrupación planta medicinales dependiendo de su uso Ejercicios prácticos **D ACTIVIDAD DE APLICACIÓN:** Recolecta elemento presentes en el territorio y forma conjuntos teniendo en cuenta las características dadas por el docente	1. Territorio, territorialidad y espiritualidad 2. Ambiente y Salud. 5. Culturas y arte. 7. Economía, producción y pensamientos matemáticos.	**EDUCACIÓN PARA EL EJERCICIO DE LOS DERECHOS HUMANOS** Realización de cronograma y presupuesto para la realización de actividades del gobierno estudiantil y de los comités de aula.
Uso representaciones principalmente concretas y pictóricas para realizar equivalencias de un número en las diferentes unidades del sistema decimal.	Comunicación	3. Establece comparaciones entre cantidades y expresiones que involucran operaciones y relaciones aditivas y multiplicativas y sus representaciones numéricas		Números de cuatro, cinco y seis cifras Valor posicional Relación mayor que, menor que, igual a Relación de igualdad Resolución de problemas comparativos Números romanos/Números embera	**A. ACTIVIDADES BÁSICAS:** Juego lotería de números occidentales teniendo en cuenta el valor posicional de cada una de las cifras en el número y su relación. **B. CUENTO PEDAGÓGICO:** Lectura del relato tradicional embera. **C.ACTIVIDAD PRACTICA:** Usando palos de paleta y otros materiales elabora la boca de los cocodrilos comelones y realiza la actividad práctica. **D ACTIVIDAD DE APLICACIÓN:** Ejercicios de aplicación sobre el valor posicional de los números	1. Territorio, territorialidad y espiritualidad 2. Ambiente y Salud. 5. Culturas y arte. 7. Economía, producción y pensamientos matemáticos.	**EDUCACION AMBIENTAL:** Desarrollar cálculos aritméticos y diagramas considerando las características de posibles Proyectos agropecuarios.

Fig. 1. Ejemplo de la propuesta de Malla curricular intercultural
Fuente: Elaboración propia

Finalmente, se realiza la divulgación de la malla curricular intercultural al colectivo docente. Se generó un debate respecto a la importancia de realizar este tipo de esfuerzos en las diferentes disciplinas del saber.

II. CONCLUSIONES

El desarrollo del pensamiento numérico implicar ir más allá de los procesos algorítmicos, busca la aplicación de conocimientos cotidianos en la resolución de las problemáticas de las realidades culturales, lo que permite que los estudiantes se sientan interesados por acercarse a la matemática como un medio de interacción con la madre naturaleza.

Es interesante vislumbrar cómo dentro de la cosmovisión Emberá, asociada al concepto del número, no solo se esconde la cantidad, la unidad o el conjunto. Cuando se tienen, por ejemplo, dos elementos, se tiene una pareja, una familia. Ese es el sentido del número. El significado ancestral que se le asocia.

No obstante, el sistema de oferta y demanda en el que se encuentra inmerso el pueblo Emberá se moviliza con base en la cultura occidental, esto es, en términos de lenguaje y sistemas de numeración. Es fundamental, como parte del proceso de desarrollo del pensamiento numérico, el acercamiento a la matemática occidental como un mecanismo que garantice la supervivencia de la comunidad indígena como grupo minoritario. La cultura Emberá tiene una tradición oral, es necesario usar los relatos como estrategia didáctica que favorezca la enseñanza de los contenidos de carácter matemático.

Referencias

[1] O. Fernández Sánchez, *El sentido del número al margen de occidente* (Primera ed., vol. 1), Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira, 2018.

[2] Ministerio de Educación Nacional. CRIDEC, *Modelo pedagógico del pueblo Emberá de Caldas "Tejiendo saberes, conocimientos y prácticas pedagógicas"*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, 2010.

[3] C. J. Echavarría Hincapié, Movilización de saberes matemáticos en maestras y maestros indígenas a través de prácticas ancestrales, tesis de maestría, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín, 2017.

[4] P. Peña Rincón, C. Tamayo Osorio & A. Parra, (2015). "Una visión latinoamericana de la etnomatemática: tensiones y desafíos". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(2), pp. 13-150, 2015.

[5] R. Hernández Sampieri. C.F. Collado, M del P Baptista. Quinta edición, McGraw Hill, 2014.

Biografías

Autor 1: Sergio Joan Vargas Vargas

Maestrante en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia; Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad Católica de Manizales; Normalista Superior en la Escuela Normal Superior de Villahermosa – Tolima; docente de aula en la Institución Educativa El Madroño en el municipio de Belalcázar, Caldas.

Autor 2: Francy Nelly Jiménez García

Ph. D. en Ingeniería; Magister en Ciencias Físicas; Ingeniera Química; Especialista en educación vocacional. Docente e investigadora de la

Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, y de la Universidad Autónoma de Manizales. Líder del grupo de investigación en Aplicaciones y enseñanza de la ciencias exactas y naturales.

Áreas de investigación: enseñanza y aprendizaje de la matemática y la física.

Género y producción de energía a través de bicicleta con dínamo: Aplicar la estadística para un análisis de preferencias y factores influyentes[1]

Gender and energy production through bicycle dynamo: Applying Statistics for a preference analysis and influential factors

***Arriaga-Villanueva, Norma*[2]**

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo identificar las herramientas estadísticas para evaluar y comparar las preferencias de género en la producción de energía, mediante el pedaleo de bicicleta con dínamo, con el fin de determinar las diferencias y los factores que influyen en estas preferencias.

Se utilizarán métodos estadísticos para examinar los datos recopilados sobre las preferencias de obtención de energía y variables relacionadas. Considerando la edad, experiencia con bicicleta y conciencia ambiental, como posibles factores de influencia.

Para realizar las pruebas de rodamiento-energía, se cuenta con una bicicleta convencional a la que se ha instalado un dínamo en una de las llantas que, al momento de girar, genera corriente directa que se almacenará en una batería, se pretende realizar las pruebas auxiliados con un prototipo

1 Universidad SABES, plantel Celaya; https://orcid.org/0000-0001-8924-0729. Contacto: norma.arriagav@sabes.edu.mx.

2 La presente investigación se derivó de prototipo para usar estática una bicicleta convencional realizado con innovación frugal en la materia de Investigación en Ciencia y Tecnología impartida a alumnos de la carrera de Ingeniería Industrial de segundo cuatrimestre

que permite colocar en forma estática la bicicleta. Este prototipo está realizado en madera, consta de una base con barras paralelas de 40 cm con dos soportes paralelos de 20 cm, con ranuras curvas y un balero de rodamiento blanco de plástico con ranura en U, que soporta una carga de 99,246 kilogramos. Las pruebas se realizarán en el centro universitario SABES, plantel Celaya, con alumnos de género femenino y masculino de diferente edad, altura y complexión; seleccionados aleatoriamente.

Los resultados que se obtengan permitirán comprender mejor las preferencias de género en relación con la producción de energía y proporcionarán información valiosa para promover prácticas sostenibles y amigables con el medio ambiente e identificar posibles áreas de enfoque para futuras iniciativas en la generación de energía.

Palabras clave: género, energía sustentable, estadística.

Abstract

This research aims to identify the statistical tools to evaluate and compare gender preferences in energy production by pedaling a bicycle with a dynamo; in order to determine the differences and factors that influence these preferences.

A Statistical methods will be used to examine the data collected on energy procurement preferences and related variables. Considering age, experience with a bicycle and environmental awareness; as possible influencing factors.

To carry out the bearing-energy tests, there is a conventional bicycle to which a dynamo has been installed in one of the tires that, when turning, generates direct current that will be stored in a battery, the tests are intended to be carried out aided with a prototype that allows the bicycle to be placed statically. This prototype is made of wood, it consists of a base with 40 cm parallel bars with two 20 cm parallel supports with curved grooves and a white plastic ball bearing with a U groove that supports a load of 99,246 kilograms. The tests will be carried out at the SABES Celaya campus with female and male students of different ages, heights and builds; randomly selected.

The results obtained will allow a better understanding of gender preferences in relation to energy production and will provide valuable information to promote sustainable and environmentally friendly practices and identify possible focus areas for future initiatives in energy generation.

Keywords: gender, sustainable energy, statistics.

I. INTRODUCCIÓN

Los teléfonos celulares son una herramienta de comunicación y consulta de contenidos, indispensable para más de 77 millones de mexicanos [1] pero también, representantes en el Foro del Día Mundial de la Eficiencia Energética afirmaron que los celulares son un elemento importante de consumo de electricidad en nuestros hogares y oficinas.

La batería de un teléfono móvil necesita una potencia media de 5 watts (0,005 kW) y suele cargarse entre una y dos horas. Una carga completa requerirá de 0,0095 kWh. Si planteamos que un usuario lo carga al menos una vez por día, el consumo de electricidad alcanzaría los 3,46 kWh, sin dejar el cargador conectado más tiempo del necesario [2], son 427.670.000 kWh de consumo al día; ya que el total de conexiones de teléfonos móviles celulares en México asciende a 123.500.000 [3], país donde 8 de cada 10 personas usamos celular. Estas cifras son preocupantes, y son sólo del consumo de energía en celulares, sin considerar el consumo por computadora y demás aparatos electrodomésticos.

Como antecedente del tema, los autores Salazar, Arroyave y Pérez [4], en su clasificación Generación Eléctrica por Rotación, incluyen la propulsión humana, en la cual las bicicletas estáticas con el dínamo forman parte del semillero de la tecnología mecánica como fuente potencial de electricidad, donde la relación transmisión adecuada (capacidad humana) y los diferentes mecanismos electromagnéticos permiten generar buen amperaje a revoluciones por minuto moderadas de 8 VCD (Voltaje de Corriente Directa, que se refiere a fuente de poder a un circuito eléctrico que convierte la electricidad de un voltaje de corriente alterna a un voltaje de corriente directa). Por lo anterior, las bicicletas estáticas pueden convertirse en fuentes energéticas, que promueven además la salud cardiovascular de las familias.

Objetivo General. Identificar las herramientas estadísticas para evaluar y comparar las preferencias de género en la producción de energía, mediante el pedaleo de bicicleta con dínamo, con el fin de determinar las diferencias y los factores que influyen en estas preferencias.

Objetivo Específico. Realizar el planteamiento matemático para analizar la influencia de variables en las preferencias de género para obtener energía, a través del pedaleo de bicicleta con dínamo.

Justificación

a. Utilizar prototipo que permite usar de forma estática una bicicleta convencional, mismo que se elaboró con mentefactura e innovación frugal.
b. Favorecer a la sustentabilidad, generando energía a través de un dínamo instalado en una bicicleta.
c. Aplicar las matemáticas mediante un muestreo estadístico.

II. DESARROLLO DEL DOCUMENTO

El promedio de pedaleo, por hora, de los hombres en una bicicleta convencional puede variar dependiendo de varios factores, como: la condición física, resistencia, velocidad y experiencia en ciclismo. En general, un ciclista promedio puede mantener un ritmo de pedaleo constante entre 60 y 90 revoluciones por minuto (RPM). Esto significa que, en una hora, un hombre podría pedalear alrededor de 3.600 a 5.400 veces, considerando un ritmo constante. Las mujeres pueden mantener un ritmo de pedaleo similar al de los hombres. Estos números son aproximados y pueden variar de persona a persona, dejando de lado los gustos y preferencias de cada ciclista.

Se entiende por cadencia media, la que se obtiene al final de cada recorrido, teniendo en cuenta todas las pedaladas por minuto que se han dado.

Los dínamos son dispositivos electromagnéticos que convierten la energía mecánica en energía eléctrica. Funcionan según el principio de la inducción electromagnética descubierto por Michael Faraday en 1831 [5]. Es importante destacar que generan corriente eléctrica de tipo alterna (AC), que generalmente se cambia a corriente continua (DC) mediante un rectificador para su uso práctico en dispositivos electrónicos.

Un dínamo instalado en una bicicleta para generar energía con el pedaleo se llama generador de buje. Consiste en un pequeño generador eléctrico ubicado en el buje de la rueda de la bicicleta. Al pedalear, el movimiento de las ruedas hace girar el generador, lo cual produce corriente eléctrica que puede ser utilizada para alimentar luces delanteras o traseras de la bicicleta y almacenar energía en una batería con puerto USB para cargar el celular; así pues, los generadores de buje son una forma práctica y sostenible de aprovechar la energía del pedaleo y proporcionar iluminación o energía adicional durante el ciclismo.

La cantidad de energía eléctrica generada por un ciclista en una hora, utilizando un dínamo en una bicicleta, puede variar según diferentes factores, como la velocidad promedio, la resistencia del generador y la eficiencia del sistema en general. Se estima que un ciclista promedio puede generar entre 5 y 6 Watts por hora de potencia. Sin embargo, la potencia real generada puede ser menor, debido a las pérdidas de eficiencia en el sistema, como la fricción mecánica y la conversión de corriente alterna a corriente continua. Esta cantidad de energía podría utilizarse para alimentar luces de bicicleta, cargar dispositivos electrónicos pequeños o almacenarse en batería para su uso posterior.

La probabilidad

Se puede aplicar para estimar la cantidad de energía generada, en función de la probabilidad de que el hombre mantenga una determinada fuerza y velocidad durante el tiempo en que pedalea. Sin embargo, no es el enfoque más adecuado para calcular la energía real generada, sino más bien para predecir o estimar rangos probables. Ayuda al cálculo de estas estimaciones el prototipo que permite usar de forma estática la bicicleta convencional, en un espacio abierto con sombra, en las instalaciones de nuestro centro universitario, y con ello minimizar efectos de factores de terreno, clima o tráfico.

Para estimar la energía generada, es necesario conocer la eficiencia del dínamo, la cual indica qué proporción de la energía mecánica del pedaleo se convierte en energía eléctrica. Esta eficiencia puede variar, dependiendo del tipo y la calidad del dínamo. Sólo hemos localizado dínamos de plástico, preferimos metálico por ser una pieza más robusta y de mayor duración.

La estadística

Para determinar si las mujeres o los hombres prefieren obtener este tipo de energía a través de pedalear una bicicleta con un dínamo instalado, se pueden utilizar métodos estadísticos para recopilar y analizar datos.

Un enfoque común sería realizar una encuesta para recopilar la opinión y evaluar la preferencia de una muestra representativa de mujeres y hombres. Una vez que se hayan recopilado los datos, lo siguiente es aplicar técnicas estadísticas para analizarlos, como:

1. Análisis descriptivo: para obtener estadísticas resumidas, como el porcentaje de mujeres y hombres que prefieren esta forma de generación de energía, así como medidas de tendencia central (para determinar el promedio de la generación de energía de ambos géneros) y dispersión (para analizar si el factor género afecta la producción de energía).
2. Prueba de hipótesis: como la prueba estadística de chi-cuadrada o la prueba t de Student, para determinar si existe una diferencia significativa en las preferencias entre mujeres y hombres.
3. Análisis de regresión: para determinar si el género es un predictor significativo.

La estadística inferencial

Se refiere al proceso de sacar conclusiones o generalizar los resultados de una muestra a una población más amplia [6]. Si la muestra utilizada en el estudio es representativa de la población de interés, se pueden realizar inferencias válidas y obtener conclusiones sobre las diferencias o similitudes en las preferencias entre mujeres y hombres, en relación con esta forma de generación de energía.

Hipótesis

Hipótesis nula (H0): no hay diferencia en las preferencias entre mujeres y hombres para obtener energía mediante pedalear una bicicleta con un dínamo instalado.

Hipótesis alternativa (H1): existe una diferencia en las preferencias entre mujeres y hombres para obtener energía, mediante pedalear una bicicleta con un dínamo instalado.

Las herramientas estadísticas que se pueden utilizar para contrastar la hipótesis, en el contexto de la preferencia entre mujeres y hombres para obtener energía a través de pedalear una bicicleta con un dínamo instalado, son:

1. Prueba de chi-cuadrada: esta prueba se utiliza para analizar la asociación entre dos variables categóricas, como el género y la preferencia de obtención de energía. Permite determinar si hay una relación significativa entre las variables o si la asociación es simplemente el resultado del azar [7].
2. Prueba t de Student: esta prueba se utiliza para comparar las medias de dos grupos diferentes [8], en este caso, las medias de preferencia de obtención de energía entre mujeres y hombres. Permite determinar si hay una diferencia significativa entre los dos grupos.
3. Análisis de regresión: esta técnica permite evaluar la relación entre una variable dependiente categórica (preferencia de obtención de energía) y una o más variables independientes (como el género y otras variables de control). El análisis de regresión ayuda a determinar si el género tiene un efecto significativo en la preferencia, teniendo en cuenta otros factores.

Variables de estudio

En el contexto de la preferencia entre mujeres y hombres para obtener energía a través de pedalear una bicicleta, con un dínamo instalado para generar y almacenar energía, las variables de estudio y sus dimensiones son:

1. Variable independiente: género.

- Dimensiones: mujeres y hombres.
- Variable de control: edad.
- Dimensiones: sin experiencia, principiante, intermedio, avanzado.

2. Variable dependiente: preferencia de obtención de energía.
- Variable de control: conciencia ambiental.
- Dimensiones: baja, moderada, alta.

La cantidad de energía requerida para cargar un celular puede variar, dependiendo del modelo y la capacidad de la batería del celular, así como de la eficiencia del sistema de carga utilizado. Sin embargo, como estimación aproximada, considerando un celular promedio y un sistema de carga eficiente, necesitan de un promedio de 5 a 10 vatios-hora (V), entre 1 y 2,1 Amperes de intensidad de corriente eléctrica, donde el tiempo de carga depende del tiempo de pedaleo estimado para cargar completamente un celular.

En términos de pedaleo en una bicicleta con dínamo, la generación de energía está relacionada con la cantidad de trabajo realizado y la eficiencia de la conversión de energía mecánica a energía eléctrica. Se reitera que se estima que un ciclista promedio puede generar entre 5 y 6 Watts de potencia sostenida durante una hora de pedaleo constante.

Si asumimos una eficiencia de conversión del 50% (lo cual puede variar dependiendo del sistema utilizado), significa que, durante una hora de pedaleo constante, se generarían aproximadamente 2,5 a 3 watts de energía. Esto sería suficiente para cargar un celular promedio.

La cantidad de energía generada al pedalear una bicicleta con dínamo por una mujer puede ser similar a la generada por un hombre, ya que la capacidad física para producir trabajo (movimiento) no está directamente relacionada con el género. Sin embargo, la cantidad exacta de energía generada dependerá de la capacidad física y el nivel de esfuerzo de la mujer en particular.

Estos cálculos no consideran posibles pérdidas de energía en el proceso de carga y conversión, cuando se depende mucho del dínamo.

Para minimizar obstáculos como distancia y costo de traslado a una ciclo-pista, el tráfico u otros aspectos que impidan pedalear de manera constante, además de lluvia u otro de clima que impidan salir y usar la bicicleta, o que por espacio y costo no se pueda tener una bicicleta fija (estática) en casa, en la materia Innovación en Ciencia y Tecnología se aplicó la mentefactura y la innovación frugal para crear el prototipo que se utilizará para usar en forma estática una bicicleta convencional, el cual se muestra en la Figura 1.

Fig. 1. Prototipo para usar de forma estática una bicicleta convencional
Fuente: Arriaga, N. (2023).

Fig. 2. Alumno rodando la bicicleta, probando el prototipo
Fuente: Arriaga, N. (2023).

Es importante definir las dimensiones de manera clara y coherente para asegurar la consistencia y la interpretación adecuada de los resultados.

III. CONCLUSIONES

La aplicación de las matemáticas, en especial la estadística, para la realización de esta investigación permitirá un procedimiento sistemático, controlado y crítico-reflexivo en nuestra búsqueda de hechos. Toda acción sustentable beneficia a nuestro planeta y la calidad de vida de las personas, matemáticamente es una suma que contribuye a los Objetivos de Desarrollo Sustentable (ODS) y, más importante y trascendental, es hacerlo de la mano de alumnos, quienes son futuros profesionistas y protagonistas de cambios en su entorno de desarrollo más próximo.

REFERENCIAS

[1] Instituto Nacional de Estadística y Geografía [INEGI]. En México 71.3 millones de usuarios de internet y 17.4 millones de hogares con conexión a este servicio: ENDUTIH, 2017. https://www.inegi.org.mx/contenidos/saladeprensa/boletines/2018/OtrTemEcon/ENDUTIH2018_02.pdf

[2] H. Takahashi, *¿Cuánto pagas por cargar el celular?* 2017. https://www.forbes.com.mx/cuanto-pagas-cargar-celular/

[3] O. Islas, Resultados del estudio Digital, 2023. https://www.eluniversal.com.mx/opinion/octavio-islas/resultados-del-estudio-digital-2023-mexico/#:~:text=Chrome%20(82.68%25)%20es%20el,cuarto%2C%20Firefox%20(1.76%25).&text=La%20hegemon%C3%ADa%20de%20Chrome%20se%20mantiene.

[4] E. Salazar, J. F. Arroyave, y W. Pérez. "Energías alternativas, experiencias desde el semillero de investigación en tecnología mecánica". *Scientia et Technica*, XVI(49), pp. 260-265, 2011.

[5] J. Arencibia, *Generadores de Electricidad. Ley de Faraday-Lentz*, 2014. https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/fsancac/2014/03/12/generadores-de-electricidad-ley-de-faraday-lentz/

[6] C. Ortega, *Estadística Inferencial, qué es, importancia y ejemplos*, 2023. https://www.questionpro.com/blog/es/estadistica-inferencial/

[7] R. Amat, *Test estadísticos para variables cualitativas: test exacto de Fisher, chi-cuadrado de Pearson*, McNemar y Q-Cochran, 2016. https://cienciadedatos.net/documentos/22.2_test_exacto_de_fisher_chi-cuadrado_de_pearson_mcnemar_qcochran

[8] IBM, *Prueba T para muestras independientes,* 2021. https://www.ibm.com/docs/es/spss-statistics/25.0.0?topic=tests-independent-samples-t-test

Biografías

Autor 1: Norma Arriaga Villanueva

Licenciada en Administración de Empresas; Licenciada en Ingeniería Industrial; Maestra en Educación Superior; Doctora en Administración; docente tiempo completo Universidad SABES, plantel Celaya; Profesor Virtual por Asignatura del doctorado en Innovación de la Universidad Virtual del Estado de Guanajuato. Autora del libro Estrés Laboral: Administración de los Factores Psicosociales de Riesgo. Con distribución mundial desde al 2017 por Amazon.

Áreas de investigación: Educación, Administración e Ingeniería Industrial.

Análisis cualitativo de la eficacia de la derivada fraccionaria en la ley de la dinámica

Tenorio-Quiñones, Javier Alexander[1]

La interacción enseñanza-aprendizaje y contribución de la
investigación en las ciencias exactas y naturales
VII Encuentro Internacional sobre la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Resumen

En el presente trabajo, se aborda la ley de la dinámica en su versión fraccionaria. Posteriormente, se emprende la búsqueda de las ecuaciones del movimiento para el caso de aceleración uniforme en su formulación fraccionaria. Esto se logra mediante la aplicación de conceptos del análisis fraccionario y una definición más amplia de la transformada de Laplace.

Palabras clave: derivada e integral fraccionaria, transformada de Laplace, ley de la dinámica.

Abstract

In the present work, the law of dynamics is addressed in its fractional version. Subsequently, the search for the equations of motion for the case of uniform acceleration in its fractional formulation is undertaken. This is achieved by applying concepts from fractional analysis and a broader definition of the Laplace transform.

Keywords: derivative and fractional integral, Laplace transform, law of dynamics.

[1] **Autor 1: Javier Alexander Tenorio Quiñones**

Magíster en Matemáticas, Licenciado en Matemáticas y Física; de la Universidad Tecnológica de Pereira.

*Resumen de investigación: Estudio de las transformadas integrales como método de resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias y sus aplicaciones, Universidad Tecnológica de Pereira, 2023 [4].

* Grupo de investigación: ABE- Application of differential equations, bifurcation and stability, de la Universidad Tecnológica de Pereira

I. INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccionario, también conocido como cálculo de orden fraccional, constituye una rama fundamental en el ámbito del análisis matemático. Su enfoque se centra en el estudio de cuestiones asociadas a derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales que involucran órdenes no enteros. En los últimos años, esta disciplina ha ganado creciente relevancia debido a su versatilidad y aplicación en diversos contextos de investigación.

La historia de las matemáticas resguarda pocos eventos cuyos orígenes sean tan precisos como el del cálculo fraccionario, o más adecuadamente llamado cálculo generalizado. Sus raíces se remontan a una carta fechada el 30 de septiembre de 1695, en la cual W. Leibniz y G. de L'Hôpital intercambiaron ideas sobre el significado de la derivada de orden $\frac{1}{2}$. Desde aquella época, hasta nuestros días, renombrados matemáticos han contribuido significativamente a su desarrollo y formalización. Entre los estudiosos contemporáneos sobresalen figuras como Baleanu y su equipo, mencionados en [1], así como Diethelm [2], Li y Zeng [3], entre otros.

El cálculo de orden fraccionario se revela intrincado desde una perspectiva matemática, generando en la actualidad un gran interés tanto en su análisis teórico como en su resolución numérica. Esta atención se debe en parte a su demostrada relevancia e importancia en el ámbito de las ciencias e ingeniería. Un ejemplar estudio sobre su formulación, aplicación y uso en diversas disciplinas del saber ha sido llevado a cabo por Tenorio [4].

En el dominio de la física, la comprensión de las leyes de la dinámica reviste una importancia vital. Estas leyes proporcionan información esencial sobre las ecuaciones del movimiento, permitiendo la determinación de la posición y velocidad de una partícula en un instante dado. El objetivo primordial de esta investigación es formular la ecuación diferencial asociada a la segunda ley de Newton para órdenes arbitrarias α, y emplear los operadores integro-diferenciales con el propósito de proporcionar soluciones a estas ecuaciones y mostrar la gran utilidad del análisis fraccionario en la modelización de problemas de distantes áreas de la ciencia, en particular, en la física.

II. Operadores Fraccionarios de Riemann-Liouville y Caputo

1.1. Integral de Riemann-Liouville

Definición 1. *Sean* $f \in L^1[a,b]$ *y* $\alpha \in C$ *tal que* $Re(\alpha) > 0$. *La integral de Riemann-Liouville de orden a de la función f, denotadas por,* $\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,t}[f(t)]$ *se definen como:*

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,t}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \quad t > a \qquad (2)$$

denominada integral izquierda.

El físico matemático italiano Michele Caputo introdujo una innovadora definición de la derivada de orden fraccionario, que ofrecía una interpretación física para las condiciones iniciales en los cada vez más frecuentes problemas aplicados bajo estudio. La definición de Derivada Fraccionaria de Caputo simplifica la complejidad interpretativa asociada con la Derivada de Riemann-Liouville. Esto se debe a que las condiciones iniciales requeridas por la definición de Caputo son de orden entero, lo que conecta directamente con el desarrollo formal histórico.

En la obra de Kilbas y Srivastava [5], se profundiza en las interpretaciones de las derivadas fraccionarias.

1.2. Derivada de Caputo

Definición 2. *Sea $f \in AC[a,b]$, $\alpha \in C$ tal que $Re(\alpha) \geq 0$, la derivada de Caputo se define como:*

$$D^{\alpha}_{a^+,t}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds, \quad t > a$$

donde $f^{(n)}(s)$ denota la $n-$ ésima derivada ordinaria de f.

Partiendo de la definición de derivada fraccionaria de Caputo establecida en (2), se tiene:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+,t}[(t-a)^{\eta}] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{\frac{d^n}{ds^n}(s-a)^{\eta}}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds \\ &= \frac{\eta\cdot(\eta-1)\cdot\ldots\cdot(\eta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{(s-a)^{\eta-n}}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds. \end{aligned}$$

Considerando el cambio de variable $u = s - a$ y agrupando de manera idónea obtenemos:

$$D^{\alpha}_{a^+,t}[(t-a)^{\eta}] = \frac{\eta\cdot(\eta-1)\cdot\ldots\cdot(\eta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{n-\alpha-1} \int_0^{t-a} u^{\eta-n}\left(1-\frac{u}{t-a}\right)^{n-\alpha-1} du.$$

Ahora, consideremos el cambio de variable $v = \frac{u}{t-a}$ y ordenando obtenemos:

$$D^{\alpha}_{a^+,t}[(t-a)^{\eta}] = \frac{\eta\cdot(\eta-1)\cdot\ldots\cdot(\eta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\eta-\alpha} \int_0^1 v^{\beta-n}(1-v)^{n-\alpha-1} dv.$$

Nótese que la última integral corresponde a $B(\eta-n+1, n-\alpha)$ denominada función Beta de Euler que puede ser escrita como:

$$B(\eta-n+1, n-\alpha) = \frac{\Gamma(\eta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\eta-\alpha+1)}$$

luego:

$$D^{\alpha}_{a^+,t}[(t-a)^{\eta}] = \frac{\eta\cdot(\eta-1)\cdot\ldots\cdot(\eta-n+1)\cdot\Gamma(\eta-n+1)}{\Gamma(\eta-\alpha+1)} (t-a)^{\eta-\alpha}$$

Por lo tanto:

Llegando a lo que se quería demostrar (2.1).

Denotemos $\mathcal{T}^{\alpha}(t)$ a la función definida como:

$$\mathcal{T}^{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad t \geq 0 \tag{3}$$

Se procede a hallar la Transformada de Laplace de (3) haciendo el cambio de variable $v = st$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathcal{T}^{\alpha}(t)] &= \frac{s^{a-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} u^{\alpha-1}e^{-u} du \\ &= \frac{s^{a-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha) \\ &= \frac{1}{s^{\alpha+1}}, \end{aligned}$$

luego:

$$\mathcal{L}[\mathcal{T}^{\alpha}(t)] = \frac{1}{s^{\alpha}} \tag{4}$$

Proposición 1. *Sean $\alpha \in C$ tal que* $Re(\alpha)>0$ *y $f \in L^1(a,b)$ tales que existen $\mathcal{I}^{\alpha}_{0+,t}[f(t)], \mathcal{D}^{\alpha}_{0+,t}[f(t)]$ y $D^{\alpha}_{0+,t}[f(t)]$*

Entonces:

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{I}^{\alpha}_{0+,t}[f(t)]\right] = \frac{F(s)}{s^{\alpha}}. \tag{5}$$

$$\mathcal{L}\left[D^{\alpha}_{0+,t}[f(t)]\right] = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$. Las expresiones anteriores son equivalentes a la versión clásica de Transformada de Laplace de la integral y la derivada. La expresión (5) es la Transformada de Laplace de la integral Fraccionaria de Riemann-Liouville y Transformada de Laplace de la Derivada Fraccionaria de Caputo, respectivamente.

Proposición 2. *Sean* $f \in L^1(a,b)$ *y* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$ *Si* $\alpha \leq \beta$. *Sean* $m,n \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha < m$; $n-1 < \beta < n$. *Si existen* $D^{\alpha+\beta}_{a+,t}[f(t)], \left(D^{\alpha}_{a+,t}D^{\beta}_{a+,t}\right)[f(t)]$

,entonces:

$$\left(D^{\alpha}_{a+,t}D^{\beta}_{a+,t}\right)[f(t)] = D^{\alpha+\beta}_{a+,t}[f(t)].$$

Demostración 1.

A partir de las definiciones (1) y (2) se tiene que:

$$D^{\alpha}_{0,t}[f(t)] = I^{n-\alpha}_{0+,t}\left[f^{(n)}(t)\right]$$

Luego es posible establecer:

$$D^{\alpha}_{0+,t}\left[D^{\beta}_{0+,t}(f(t))\right] = \mathcal{I}^{n-\alpha}_{0+,t}\left[D^{\beta+n}_{0+,t}(f(t))\right]$$

Es claro que la integral fraccionaria de Riemann-Liouville se puede expresar como la convolución $\mathcal{I}^{\alpha}(t) * f(t)$, donde $\mathcal{I}^{\alpha}(t)$ es la función definida en (3). Aplicando Transformada de Laplace fraccionaria, el resultado obtenido en (4) y considerando la Transformada de la convolución se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[D^{\alpha}_{0+,t}\left[D^{\beta}_{0+,t}(f(t))\right]\right] &= \mathcal{L}\left[\mathcal{I}^{n-\alpha}_{0+,t}\left[D^{\beta+n}_{0+,t}(f(t))\right]\right]\\ &= \mathcal{L}\left[\mathcal{I}^{n-\alpha}_{(t)} * D^{\beta+n}_{0+,t}(f(t))\right]\\ &= \frac{1}{s^{n-\alpha}}\left[s^{\beta+n}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\beta+n-k-1} \quad f^{(k)}(0)\right]\\ &= s^{\beta+\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\beta+\alpha-k-1}f^{(k)}(0)\\ &= \mathcal{L}\left[D^{\beta+\alpha}_{0+,t}[f(t)]\right]\end{aligned}$$

Aplicando la transformada inversa se tiene:

$$D^{\alpha}_{0+,t}\left[D^{\beta}_{0+,t}(f(t))\right] = D^{\beta+\alpha}_{0+,t}[f(t)]$$

La segunda ley de Newton establece que la variación en el movimiento de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta aplicada sobre el cuerpo y ocurre en el mismo sentido y dirección de dicha fuerza.

Dicho de otra manera,

$$F = \frac{dp}{dt}$$

También es posible expresar la segunda ley de Newton de la siguiente manera:

$$F = m\frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\right] \tag{6}$$

Expresemos la ecuación (6) en el cálculo fraccionario, consideremos además la derivada en el sentido de Caputo bajo condiciones iniciales de posición y velocidad y tomemos la fuerza originada por la acción del campo gravitatorio sobre la masa de un cuerpo. Es decir:

$$mD^{\beta}_{0+,t}\left[D^{\alpha}_{0+,t}(x(t))\right] = -mg.$$

Considerando la proposición (2) y simplificando:

$$D^{\beta+\alpha}_{0+,t}(X(t)) \quad = -g.$$

Aplicando la transformada de Laplace fraccionaria en el sentido de Caputo y evaluando las condiciones iniciales se llega:

$$s^{\beta+\alpha}X(s) - \sum_{k=0}^{1} s^{\beta+\alpha-k-1}f^{(k)}(0) = \frac{-g}{s}$$

$$s^{\beta+\alpha}X(s) - x_0 s^{\beta+\alpha-1} - v_0 s^{\beta+\alpha-2} = \frac{-g}{s},$$

simplificando se tiene:

$$X(s) = \frac{x_0}{s} + \frac{v_0}{s^2} - \frac{g}{s^{\beta+\alpha+1}}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace se tiene la solución del problema.

$$X(t) = x_0 + v_0 t - \frac{g}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}t^{\beta+\alpha} \tag{7}$$

Consideremos la propiedad 2.1 de la proposición (2) y aplicamos la derivada fraccionaria de Caputo en (7) para obtener la ecuación que define la velocidad de una partícula en un instante de tiempo t, entonces:

$$D^{\alpha}_{0+,t}(x(t)) = \frac{v_0}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha} - \frac{g}{\Gamma(\beta+1)}t^{\beta} \qquad (8)$$

Las ecuaciones (7) y (8) corresponden a las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado en versión fraccionaria.
A partir del resultado obtenido en (7) y (8) se desprenden los siguientes casos que estudiaremos posteriormente:

1. $0 < \alpha \leq 1$, $\beta = 1$, $\text{Max}(\alpha) + \beta = 2$, entonces:

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{g}{\Gamma(\alpha+2)}t^{1+\alpha},$$

$$D^{\alpha}_{0+,t}(x(t)) = \frac{v_0}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha} - gt.$$

2. $0 < \alpha,\beta \leq 1$, $\alpha = \beta$, $2\,\text{Máx}(\alpha) = 2$, entonces:

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{g}{\Gamma(2\alpha+1)}t^{2\alpha}$$

$$D^{\alpha}_{0+,t}(x(t)) = \frac{v_0}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha} - \frac{g}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}$$

Analicemos la eficacia del parámetro α mediante un ejemplo clásico de caída libre. Se deja caer un cuerpo desde cierta altura, al cabo de $10s$ el cuerpo toca el piso. Hallar las velocidades que registra el cuerpo y las alturas en que se encuentra a partir de las Ecuaciones de Movimiento Fraccionarias, considerando las condiciones establecidas en los casos 1 y 2.

Como el cuerpo se deja caer y se contabiliza su recorrido a partir del instante que desciende, entonces $x_0 = 0$, $v_0 = 0$.

Tabla 1
Caso 1

α	0,2	0,4	0,6	0,8	0,99	1
tiempo (s)	10	10	10	10	10	10
velocidad (m/s)	98	98	98	98	98	98
posición (m)	140, 9	198, 1	272, 9	368, 8	483, 2	49 0

Fuente: elaboración propia

Tabla 2
Caso 2

α	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1
tiempo (s)	10	10	10	10	10	10
velocidad (m/s)	16, 9	27, 7	43,6	66,3	96,1	98
posición (m)	27, 7	66, 3	140, 9	272, 9	476, 6	49 0

Fuente: elaboración propia

A partir de las tablas que relacionan los casos 1 y 2, es posible determinar que las condiciones establecidas en el caso 2 no son tan eficientes como las del caso 1, esto debido a que a medida que α tiende a uno el módulo de la posición y velocidad no convergen rápidamente al valor real.

III. CONCLUSIONES

Se encontraron las ecuaciones del movimiento fraccionarias, las cuales satisfacen las ecuaciones clásicas cuando el parámetro se acerca a 1. No conviene emplear las condiciones del caso 2 a la hora de encontrar funciones que convergen a la real, porque las aproximaciones de las magnitudes físicas no son apropiadas.
Los operadores integro-diferenciales fraccionarios proporcionan información adicional y relevante en la modelización de problemas de distantes áreas de la ciencia.
Los resultados obtenidos inducen a suponer que la derivada fraccionaria está relacionada con un tiempo propio que, bajo alguna

transformación, podría ser equivalente al tiempo clásico.

Referencias

[1] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas y J. Trujillo, *Fractional Calculus Models and Numerical Methods*, World Scientific Publishing Company, 2012.

[2] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, 2004.

[3] C. Li, F. Zeng, *Numerical Methods for Fractional Calculus*, CRC Press, 2015.

[4] A. Tenorio, *Estudio de las transformadas integrales como método de resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias y sus aplicaciones*, Universidad Tecnológica de Pereira, 2023.

[5] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations,* Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2006.